

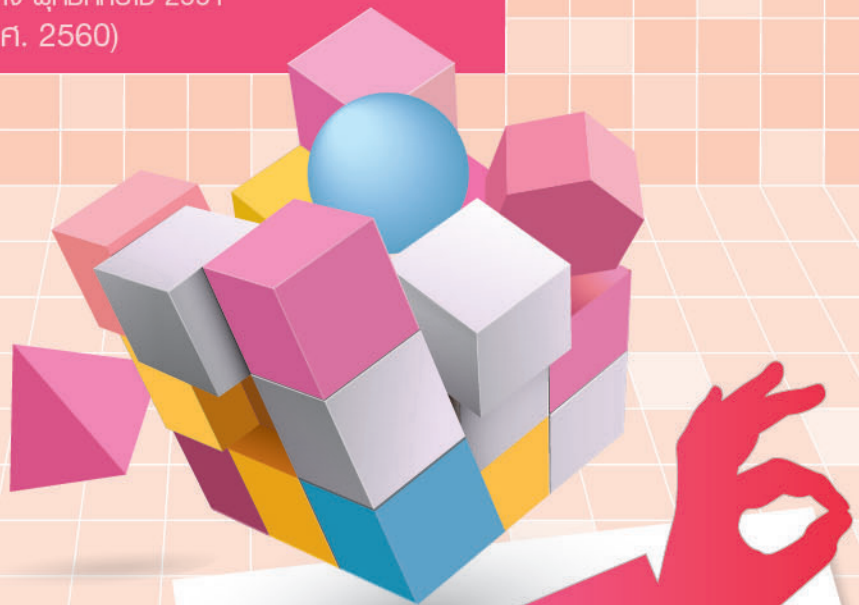
สุดยอดคำนวณและเทคนิคคิดลัด

คณิตศาสตร์

เพิ่มเติม

ม.6 เล่ม 1

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ตามหลักสูตรแกนกลาง พุทธศักราช 2551
(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)



จะเจียบคมและฉุกทาง
ต้องอ่าน เล่มนี้เท่านั้น

สรุปเนื้อหา และเทคนิคที่สำคัญ

แบบฝึกประจำบท พร้อมเฉลย

เนื้อหา

- ลำดับและอนุกรม
- แคลคูลัสเบื้องต้น

เรียบเรียงโดย

ดร.จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง

วศ.บ. (ไฟฟ้า ฉุกเฉิน)

ค.ม. (การจัดการคุณภาพ มรท.สวนสุนันทา)

คช.ด. (เทคโนโลยีการศึกษา ม.เกษตรศาสตร์)

นักวิชาการอิสระด้านคณิต วิทยา และเทคโนโลยีการศึกษา

สุดยอดคำนวณและเทคนิคคิดลัด

คณิตศาสตร์

เพิ่มเติม

ม.6 เล่ม 1

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551



จะเขียนคณและดูทาง
ต้องอ่าน เล่มนี้เท่านั้น

สรุปเนื้อหา และเทคนิคที่สำคัญ

แบบฝึกประจำบท พร้อมเฉลย

เนื้อหา

ลำดับและอนุกรม

แคลคูลัสเบื้องต้น

เรียบเรียงโดย

ดร.จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง

วศ.บ. (ไฟฟ้า วิทยา)

ค.บ. (การจัดการคุณภาพ มรณ.สวนสุนันทา)

ศษ.ด. (เทคโนโลยีการศึกษา ม.เกษตรศาสตร์)

นักวิชาการอิสระด้านคณิต วิทยา การจัดการคุณภาพ และเทคโนโลยีการศึกษา

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ (ฉบับเพิ่มเติม) พ.ศ. ๒๕๕๘

สุดยอดคำนวณและเทคนิคคิดลัด

คณิตศาสตร์

ม.6 เล่ม 1 (เพิ่มเติม)

คณิตศาสตร์

-:2:-

เพิ่มเติม
ม.6 เล่ม 1

ผู้เรียบเรียง : **ดร.จักรินกร วรรณโพธิ์กลาง**

กองบรรณาธิการ : อรศรี โรจน์พจนรัตน์, อมรศักดิ์ บุญเรือง, ณัฐนีน ลูกเสือถิรา, สถาพร พุทธิศิริพร,
พิรุณนิชา ไบสุวรรณ, มนชญา กมลวานนท์, युภาภรณ์ แดงมณี

จัดพิมพ์โดย : บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด
12 หม่อมแก้ว แขวง 3 ถ.พระราม 6 (ซอย 41) แขวงสามเสนใน เขตพญาไท กรุงเทพฯ 10400
โทร 02-279-6222 โทรสาร 02-279-6203-4

พิมพ์ที่ : บริษัท เรืองแสงการพิมพ์ (2002) จำกัด
48/1722 หมู่ 7 ซ.หมู่บ้าน ดี.เค. ถ.กาญจนาภิเษก แขวงบางบอน เขตบางบอน กรุงเทพฯ 10150

ผู้พิมพ์ - ผู้โฆษณา
นายมานิตย์ พิภพปัญญา



หนังสือเล่มนี้พิมพ์ด้วย กระดาษรีไซเคิล 100%
กระดาษจากไม้ปลูก ไม่รบกวนไม้ธรรมชาติ



คำนำ

หนังสือ คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 1 (เพิ่มเติม) เล่มนี้ เป็นหนังสือที่มีเนื้อหาตรงตามผลการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และยังได้สอดแทรกเนื้อหาที่เกินหลักสูตรพร้อมทั้งเทคนิคคิดลัดต่างๆ ตามที่ผู้เขียนเห็นว่าสำคัญ เนื่องจากผู้เขียนเห็นว่าการที่จะศึกษาคณิตศาสตร์ให้ประสบความสำเร็จได้นั้น ผู้ศึกษาจะต้องมีความรู้พื้นฐานในวิชาคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี และจะต้องมีเทคนิคคิดลัดต่างๆ เพื่อช่วยให้ผู้ศึกษาสามารถแก้ไขปัญหาโจทย์และแข่งขันกับเวลาได้อย่างรวดเร็ว

1. การอธิบายเนื้อหาในหนังสือเล่มนี้จะใช้ภาษาเดียวกับภาษาที่ผู้เขียนใช้สอน ดังนั้น จึงอ่านง่ายและเพลิดเพลินไปกับบทเรียน ทำให้ผู้อ่านมีความรู้สึกเหมือนกับว่าผู้เขียนมาสอนให้เองเลย

2. ครอบคลุมเนื้อหาพื้นฐานที่สำคัญโดยจะมีการแบ่งเนื้อหาให้เป็นระบบเพื่อจะได้ศึกษาได้ง่าย

3. โจทย์ในหนังสือเล่มนี้จะมีมากมายเพียงพอที่ผู้ศึกษาจะฝึกทำเพื่อเสริมสร้างทักษะและประสบการณ์ในการทำโจทย์

4. หนังสือเล่มนี้จะเน้นถึงเทคนิคและการวิเคราะห์โจทย์ต่างๆ อย่างเป็นระบบ

5. มีเทคนิคคิดลัดต่างๆ เพื่อช่วยให้ผู้ศึกษาทำข้อสอบแข่งขันได้อย่างรวดเร็ว

6. แนวข้อสอบเตรียมสอบเข้ามหาวิทยาลัย ระบบ TCAS

สุดท้ายนี้ผู้เขียนหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะให้ประโยชน์แก่ผู้อ่าน และขอขอบคุณ บริษัทสำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด ที่ให้โอกาสแก่ผู้เขียนได้เขียนหนังสือที่อยากเขียน สำหรับคุณงามความดีที่พึงมีจากหนังสือเล่มนี้ ขอมอบให้แด่ พ่อแม่ครูอาจารย์ คือ พระราชสังวรญาณ (พุทธ ฐานิโย) บุนพารี่ คือ ผอ.ประเสริฐ วรรณโพธิ์กลาง และนางสนาน วรรณโพธิ์กลาง พร้อมทั้งครูอาจารย์ผู้ประสิทธิ์ประสาทวิชาแก่ผู้เขียน

ด้วยความปรารถนาดี

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง

(ดร.จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง)

คณิตศาสตร์

-:3:-

เพิ่มเติม
ม.6 เล่ม 1

สารบัญ

บทที่ 1 ลำดับและอนุกรม	5
ลำดับ	5
ลำดับเลขคณิต	8
ลำดับเรขาคณิต	24
ลำดับฮาร์มอนิก	36
ลิมิตของลำดับอนันต์	37
อนุกรม	50
อนุกรมเลขคณิต	51
อนุกรมเรขาคณิต	57
อนุกรมอนันต์	62
สัญลักษณ์แสดงการบวก	77
การประยุกต์ของลำดับและอนุกรม	89
© แบบฝึกหัดท้ายบท บทที่ 1 ลำดับและอนุกรม พร้อมเฉลย	93

คณิตศาสตร์

–:4:–

เพิ่มเติม
ม.6 เล่ม 1

บทที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น	103
ลิมิตของฟังก์ชัน	103
ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	116
อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	121
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร	131
อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ	136
เส้นสัมผัสเส้นโค้ง	138
อนุพันธ์อันดับสูง	140
การประยุกต์ของอนุพันธ์	142
การเคลื่อนที่แนวตรง	142
ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน	147
โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด	169
ปริยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต	203
ปริพันธ์จำกัดเขต	213
พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง	214
© แบบฝึกหัดท้ายบท บทที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น พร้อมเฉลย	230

ลำดับและอนุกรม

บทที่
1

❁ ลำดับ

บทนิยาม ลำดับ (Sequence) คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรก หรือมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

♦ สิ่งที่เราควรหาคู้อย่างไรจากบทนิยาม

ลำดับ (Sequence) ถูกกำหนดให้มี 2 แบบ คือ

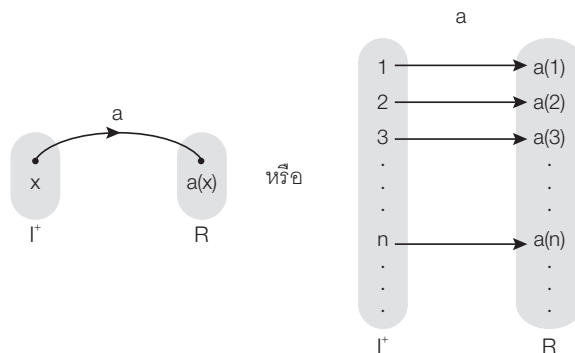
1. ฟังก์ชันที่มีโดเมน (Domain) เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก (I^+) n ตัวแรก

ข้อตกลง ลำดับที่มีโดเมน (Domain) เป็น $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ จะถูกเรียกว่า “ลำดับจำกัด (Finite Sequence)”

- หรือ 2. ฟังก์ชันที่มีโดเมน (Domain) เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก (I^+)

ข้อตกลง ลำดับที่มีโดเมน (Domain) เป็น $\{1, 2, 3, \dots\}$ จะถูกเรียกว่า “ลำดับอนันต์ (Infinite Sequence)”

❖ **สิ่งที่ควรทราบ** เรามักเห็นตัวโยงของฟังก์ชันใช้ f, g, h เป็นต้น แต่สำหรับเรื่องลำดับนิยมใช้ a เป็นตัวโยง สามารถเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้



นักคณิตศาสตร์ยังอนุโลมให้เขียน $a(x)$ แทนได้ด้วย a_x เช่น $a(1)$ แทนด้วย $a_1, a(n)$ แทนด้วย a_n เป็นต้น

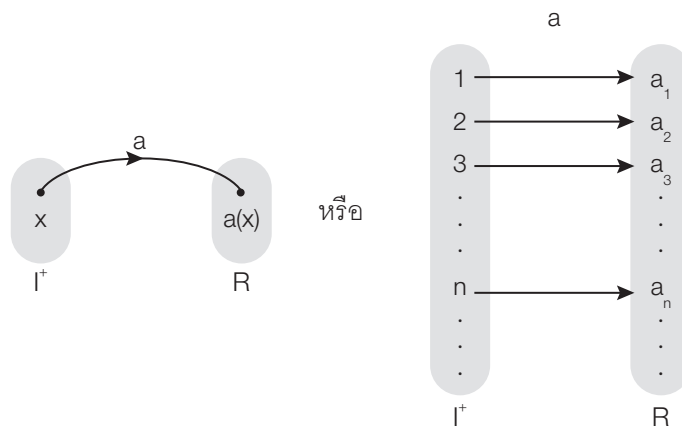
เรียก a_1 ว่าพจน์ที่ 1 ของลำดับ
 a_2 ว่าพจน์ที่ 2 ของลำดับ
 a_3 ว่าพจน์ที่ 3 ของลำดับ
 $\vdots$
 a_n ว่าพจน์ที่ n ของลำดับ
 $\vdots$

ดังนั้น สามารถเขียนแผนภาพของลำดับได้ใหม่ ดังนี้

คณิตศาสตร์

--5:--

เพิ่มเติม
ม.6 เล่ม 1



● การเขียนลำดับ

เนื่องจากลำดับ คือ ฟังก์ชัน แสดงว่า การเขียนลำดับจะคล้ายกับการเขียนฟังก์ชัน แต่การเขียนลำดับจะมีการอนุโลมเพิ่มเติมจากการเขียนฟังก์ชันซึ่งจะแสดงให้เห็นต่อไปนี้

1. การเขียนลำดับแบบแจกแจงสมาชิก คือ เขียนแสดงถึงสมาชิกคู่อันดับที่เกิดขึ้น มี 3 แบบ ดังนี้

1.1 แบบแจกแจงสมาชิกเป็นเซต

เช่น $a = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9), (6, 11), (7, 13), (8, 15), (9, 17)\}$

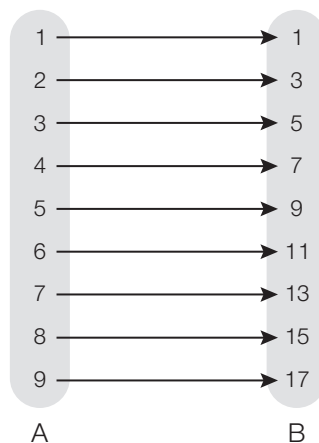
1.2 แบบแจกแจงสมาชิกแบบตาราง

เช่น

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_x	1	3	5	7	9	11	13	15	17

1.3 แบบแจกแจงสมาชิกเป็นแผนภาพการจับคู่

เช่น



คณิตศาสตร์

--:6:--

เพิ่มเติม
ม.6 เล่ม 1

2. การเขียนลำดับแบบแจกแจงสมาชิกที่นำเอาเฉพาะสมาชิกตัวที่ 2 มาจัดเรียงกันไปตามลำดับที่มันเคยคู่กับสมาชิกตัวที่ 1 ของแต่ละคู่อันดับตามข้อกำหนด

หมายเหตุ ตามข้อกำหนดเราต้องทราบเองนะว่า สมาชิกตัวที่ 1 ของแต่ละคู่อันดับจัดเรียงกันเป็น $1, 2, 3, \dots, n$ หรือ $1, 2, 3, \dots$

เช่น 1. ถ้า $a = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, (n, a_n)\}$

สามารถเขียนแทนได้ด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

2. ถ้า $a = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, (n, a_n), \dots\}$

สามารถเขียนแทนได้ด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

สิ่งที่ควรเน้น

1. การเขียนลำดับ a แบบแจกแจงสมาชิกที่นำเอาเฉพาะสมาชิกตัวที่ 2 มาจัดเรียงกันไปตามลำดับที่มันเคยคู่กับสมาชิกตัวที่ 1 ของแต่ละคู่อันดับตามข้อกำหนด ดังนี้

1.1 ถ้า a เป็นลำดับจำกัด แล้วสามารถเขียนแทนได้ด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

1.2 ถ้า a เป็นลำดับอนันต์ แล้วสามารถเขียนแทนได้ด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$
หรือ $a_1, a_2, a_3, \dots$

2. ถ้าเราไปเจอลำดับที่จัดเรียงเป็น $2, 6, 10, \dots$ แล้ว เราต้องทราบเองทันทีเลยว่ามันเหมือนกับลำดับ $\{(1, 2), (2, 6), (3, 10), \dots\}$

3. การเขียนลำดับแบบบอกเงื่อนไข

การเขียนลำดับแบบบอกเงื่อนไข จะอยู่ในรูป $a_n = \text{เทอมของ } n$

เช่น $a_n = n^2$ เราจะต้องทราบเองเลยว่า

พจน์ที่ 1 ของลำดับ คือ $a_1 = 1^2 = 1$

พจน์ที่ 2 ของลำดับ คือ $a_2 = 2^2 = 4$

พจน์ที่ 3 ของลำดับ คือ $a_3 = 3^2 = 9$

$\vdots$

พจน์ที่ n ของลำดับคือ $a_n = n^2$ ← อาจเรียกว่าพจน์ที่ n ของลำดับ

$\vdots$

ดังนั้น $a_n = n^2$ สามารถเขียนแทนได้ด้วย $1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$

สิ่งที่ควรเน้น

1. ถ้า a เป็นลำดับอนันต์ แล้ว a จะต้องมียกเงื่อนไข $a_n = \text{เทอมของ } n$

2. ถ้า a เป็นลำดับจำกัด แล้ว a อาจจะมีเงื่อนไข หรือไม่มีเงื่อนไขก็ได้

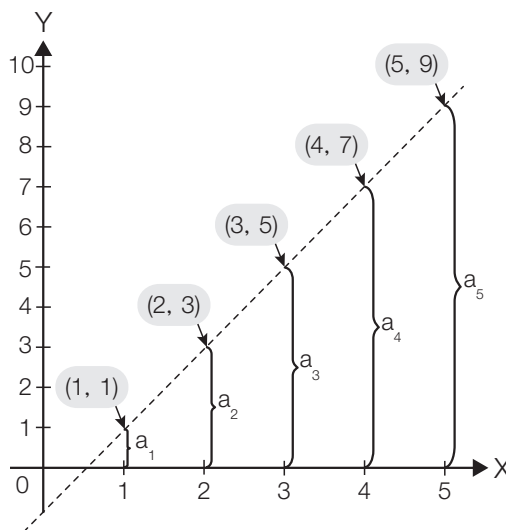
4. การเขียนลำดับแบบกราฟ

จำได้นะครับว่าในเรื่องลำดับเราจะต้องเริ่มสนใจ ตั้งแต่ a_1 ออกไป เนื่องจากข้อกำหนด
ได้นั้นว่า โดเมน (Domain) ของลำดับจะต้องเป็น $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ หรือ $\{1, 2, 3, \dots\}$

เช่น $a_n = 2n - 1$ สามารถเขียนแทนได้ด้วย $1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n - 1, \dots$

หรือ $\{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9), \dots\}$

จึงเขียนลำดับนี้แบบกราฟได้ดังนี้



ข้อสังเกต ในเรื่องลำดับเราจะต้องเริ่มสนใจตั้งแต่ a_1 ออกไป

◆ ลำดับแบบบอกเงื่อนไขที่ควรทราบ

เนื่องจากลำดับ คือ ฟังก์ชัน แสดงว่าลำดับจะมีลักษณะอย่างไรขึ้นอยู่กับว่าลำดับนั้น
เป็นฟังก์ชันชนิดใด ซึ่งฟังก์ชันมีมากมายหลายชนิดไม่จำกัด มีทั้งที่มีเงื่อนไขและไม่มีเงื่อนไข แต่ใน
หัวข้อนี้จะสนใจเฉพาะลำดับที่เป็นฟังก์ชันชนิดที่มีเงื่อนไข สำหรับหลักสูตรในระดับนี้ได้กล่าวไว้
2 ชนิด ดังนี้

1. ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence or Arithmetic Progression)
2. ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence or Geometric Progression)

❁ ลำดับเลขคณิต

บทนิยาม ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence or Arithmetic Progression) คือ ลำดับ
ที่ผลต่างซึ่งได้จากพจน์ขวามือ $(n + 1)$ ลบด้วยพจน์ซ้ายมือ (n) ที่ติดกันจะมี
ค่าคงตัวเสมอ

◆ ค่าคงตัวนี้ ถูกเรียกว่า “ผลต่างร่วม (common difference)”

◆ สิ่งที่ควรมองเห็นจากข้อกำหนด ดังนี้

1. ถ้ากำหนดให้ d เป็นผลต่างร่วม (common difference) แล้ว

$$\left. \begin{array}{l} d = a_{n+1} - a_n \\ \text{หรือ } a_{n+1} = a_n + d \end{array} \right\} \text{เมื่อ } n \in \mathbb{I}^+$$

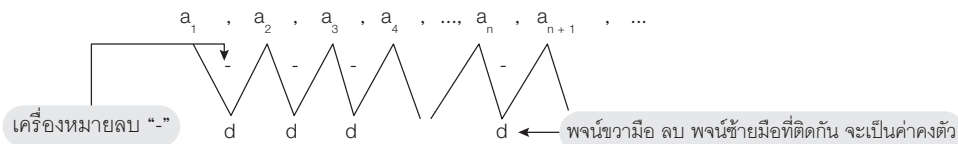
ข้อสังเกต

$a_{n+1} = a_n + d$ อาจกล่าวอีกอย่างได้ว่า “พจน์ขวามือ = พจน์ซ้ายมือ + ผลต่างร่วม”

เช่น ถ้ากำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต แล้ว

$$\left. \begin{array}{l} a_2 - a_1 = d \\ a_3 - a_2 = d \\ a_4 - a_3 = d \\ \vdots \\ a_{n+1} - a_n = d \end{array} \right\} \text{เมื่อ } d \text{ เป็นผลต่างร่วม (common difference)}$$

เราสามารถเขียนเป็นแบบภาพให้ดูได้ดังนี้



2. ถ้ากำหนดให้ a_1 เป็นพจน์แรก และ d เป็นผลต่างร่วม (common difference) แล้วสามารถเขียนพจน์อื่นๆ ของลำดับเลขคณิตในรูปของ a_1 และ d ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + d = (a_1 + (n-2)d) + d = a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ a_1 เป็นพจน์ที่ 1 ของลำดับเลขคณิต และ d เป็นผลต่างร่วม (common difference) แล้ว

$$\text{พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ } a_n = a_1 + (n-1)d$$

● สูตรการหาพจน์ที่ n (a_n) ของลำดับเลขคณิต

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

เมื่อ a_n เป็นพจน์ที่ n หรือพจน์ที่ต้องการหาของลำดับเลขคณิต

a_1 เป็นพจน์ที่ 1 ของลำดับเลขคณิต

d เป็นผลต่างร่วม (common difference)

● วิเคราะห์ลำดับเลขคณิต

จากสูตรการหาพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต $a_n = a_1 + (n - 1) d$

จะได้ $a_n = a_1 + dn - d$

สมมติให้ $a_1 - d = c$

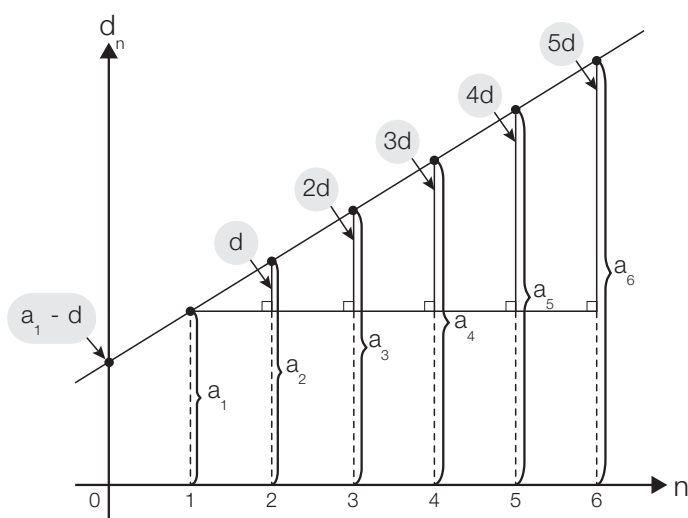
$$a_n = dn + (a_1 - d)$$

ลองเทียบกับสมการเส้นตรง $\begin{cases} a_n = dn + c \\ y = mx + c \end{cases}$ เมื่อ $c = a_1 - d$

ทำให้ทราบว่า d (ผลต่างร่วม) = m (ความชัน)

$$a_1 - d = c \text{ (จุดตัดแกน } y)$$

สามารถเขียนลำดับเลขคณิตแบบกราฟได้ ดังนี้



สิ่งที่ควรเน้น ในเรื่องลำดับเราจะต้องเริ่มสนใจ ตั้งแต่ a_1 ออกไป

การหาพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไป (a_n) ของลำดับเลขคณิต

เทคนิค
1

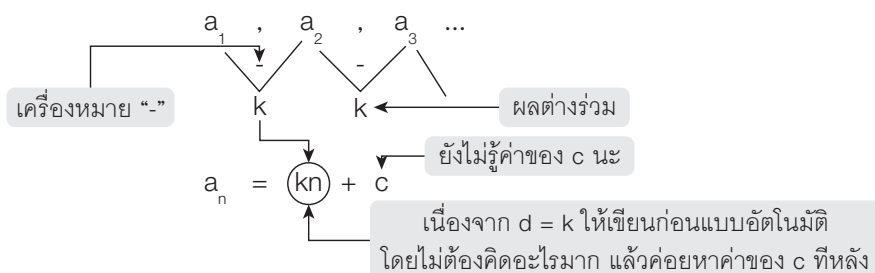
- วิธีตรง ใช้สูตรการหาพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต เข้าช่วย

หลักการ $a_n = a_1 + (n - 1) d$

- เทคนิคคิดลัด หัวใจของลำดับเลขคณิต คือ ผลต่างร่วม และพจน์ที่บอกมา คงจำได้นะว่า พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตสามารถเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่ง คือ $a_n = dn + c$

หลักการ

- ถ้าโจทย์กำหนดลำดับเลขคณิตมาให้ดังนี้



- หาค่าของ c จากการแทนค่าพจน์ที่บอกมา

เช่น ถ้าโจทย์บอก a_1 มาให้แล้วนำไปแทนค่าใน $a_n = kn + c$ ก็สามารถหาค่าของ c ได้ดังนี้

$$a_1 = k(1) + c$$

จะได้ $c = a_1 - k$

ถ้าโจทย์บอก a_3 มาให้แล้วนำไปแทนค่าใน $a_n = kn + c$ ก็สามารถหาค่าของ c ได้ดังนี้

$$a_3 = k(3) + c$$

จะได้ $c = a_3 - 3k$

ข้อสังเกต การอธิบายเทคนิคคิดลัดอาจจะยาว แต่เวลาทำจริง ๆ จะไม่ยากสามารถคิดในใจได้

- ตัวอย่าง 1 จงหาพจน์ที่ n (พจน์ทั่วไป) ของลำดับเลขคณิต

3, 7, 11, 15, ...

วิธีตรง จากโจทย์จะได้ $a_1 = 3$ และ $d = 7 - 3 = 4$ ตรงนี้ต้องคิดในใจนะ

จากสูตร $a_n = a_1 + (n - 1) d$

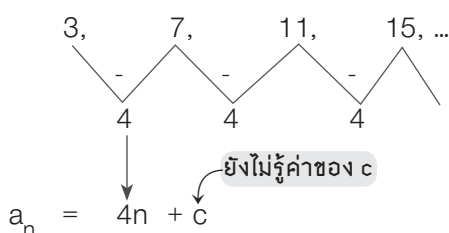
$$a_n = 3 + (n - 1) (4)$$

$$a_n = 3 + 4n - 4$$

ดังนั้น $a_n = 4n - 1$

เทคนิคคิดลัด (ต้องหัดคิดในใจให้ได้)

- โจทย์กำหนดลำดับเลขคณิตมาให้ ดังนี้



คณิตศาสตร์

~:11:~

เพิ่มเติม
ม.6 เล่ม 1

2. หาค่าของ c จากการแทนค่าพจน์ที่บอกมา

$$\left. \begin{array}{l} 3 = 4(1) - c \\ c = -1 \end{array} \right\} \text{หาค่าของ } c \text{ โดยใช้ } a_1 \text{ เป็นหลัก}$$

ดังนั้น $a_n = 4n - 1$

หมายเหตุ การหาค่าของ c อาจใช้พจน์ใดของลำดับเลขคณิตเป็นหลักก็ได้

$$\left. \begin{array}{l} \text{เช่น } 11 = 4(3) + c \\ c = -1 \end{array} \right\} \text{หาค่าของ } c \text{ โดยใช้ } a_3 \text{ เป็นหลัก}$$

แต่ที่นิยม ถ้าโจทย์บอก a_1 มาให้ควรใช้ a_1 เป็นหลักในการหาค่า c เนื่องจากตัวเลขไม่ยุ่งยาก

🐼 ตัวอย่าง 2 จงหาพจน์ที่ n (พจน์ทั่วไป) ของลำดับเลขคณิต

6, 13, 20, 27, ...

วิธีตรง จากโจทย์ จะได้ $a_1 = 6$ และ $d = 13 - 6 = 7$

จะสูตร $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$a_n = 6 + (n - 1)(7)$$

$$a_n = 6 + 7n - 7$$

ดังนั้น $a_n = 7n - 1$

เทคนิคคิดคลัด (ลองพยายามคิดในใจให้ได้)

1. โจทย์กำหนดลำดับเลขคณิตมาให้

$$\begin{array}{ccccccc} 6, & & 13, & & 20, & & 27, \dots \\ & \swarrow & & \searrow & \swarrow & & \searrow \\ & 7 & & 7 & & 7 & \\ & \downarrow & & & & & \\ a_n = & 7n & + & c \end{array}$$

↑ ยังไม่รู้ค่าของ c

2. หาค่าของ c จากการแทนค่าพจน์ที่บอกมา

$$\left. \begin{array}{l} 6 = 7(1) + c \\ c = -1 \end{array} \right\} \text{หาค่าของ } c \text{ โดยใช้ } a_1 \text{ เป็นหลัก}$$

ใช้ความจริงที่ว่า ถ้า $a_n = a_m + kd$ เป็นพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต

เทคนิค

2

แล้วรับรองได้เลยว่า $n = m + k$ แน่ อาจเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้

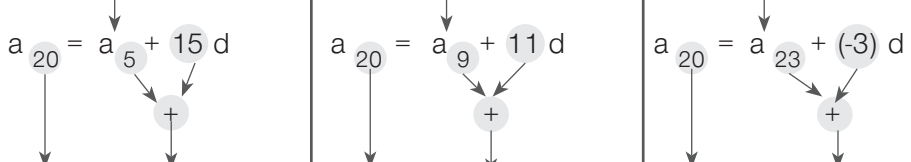
$$\left. \begin{array}{l} a_n = a_m + kd \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ n = m + k \end{array} \right\} \text{หรืออาจเขียนใหม่ได้เป็น } a_{m+k} = a_m + kd$$

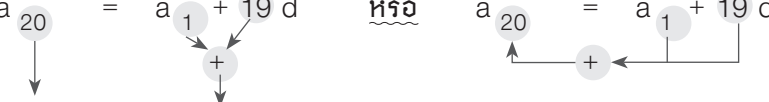
คณิตศาสตร์

~:12:-

เพิ่มเติม
ม.6 เล่ม 1

■ ลองวิเคราะห์หาคำใหม่

เช่น $a_{20} = a_1 + (20 - 1)d$ $a_{20} = a_1 + 19d$ $a_{20} = a_1 + (20 - 1)d$
 $a_{20} = a_1 + 19d$ $a_{20} = a_1 + 19d$ $a_{20} = a_1 + 19d$
 $a_{20} = (a_1 + 4d) + 15d$ $a_{20} = (a_1 + 8d) + 11d$ $a_{20} = (a_1 + 22d) - 3d$

 $a_{20} = a_5 + 15d$ $a_{20} = a_9 + 11d$ $a_{20} = a_{23} + (-3)d$
 $20 = 5 + 15$ $20 = 9 + 11$ $20 = 23 + (-3)$

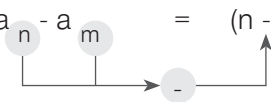
ข้อสังเกต $a_{20} = a_1 + 19d$ หรือ $a_{20} = a_1 + 19d$

 $20 = 1 + 19$

♦ ถ้าเราลองจัดรูป $a_n = a_m + kd$ ใหม่เป็น $a_n - a_m = kd$ แล้ว รับรองเลยว่า $n - m = k$ แน่

อาจเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้

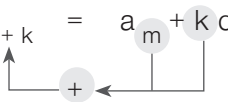
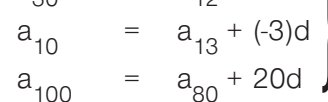
$a_n - a_m = kd$ หรืออาจเขียนได้เป็น $a_n - a_m = (n - m)d$

 $n - m = k$

เช่น $a_{120} - a_{80} = 40d$ $a_{10} - a_3 = 7d$ $a_9 - a_{12} = -3d$ $a_n - a_m = (n - m)d$

 $a_n - a_m = (n - m)d$

◆ เทคนิคย่อย 2.1

หลักการ

$a_{m+k} = a_m + kd$

เช่น $a_{30} = a_{12} + 18d$ $a_{10} = a_{13} + (-3)d$ $a_{100} = a_{80} + 20d$ คิดในใจให้ได้นะ

 $a_{m+k} = a_m + kd$

📌 ตัวอย่าง 1 ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่งมีพจน์ที่ 42 เท่ากับ -95 และผลต่างร่วมเท่ากับ $-\frac{5}{2}$ จงหาพจน์ที่ 54 ของลำดับเลขคณิตชุดนี้

วิธีตรง จากสูตร $a_n = a_1 + (n - 1)d$... ①
จะได้ $a_{42} = a_1 + (42 - 1)d$
 $-95 = a_1 + (41)\left(-\frac{5}{2}\right)$
 $a_1 = \frac{15}{2}$... ②

คณิตศาสตร์

~:13:~

เพิ่มเติม
ม.6 เล่ม 1

นำ ① แทนใน ② จะได้ $a_n = \frac{15}{2} + (n-1)d$
 จะได้ $a_{54} = \frac{15}{2} + (54-1)\left(-\frac{5}{2}\right)$
 ดังนั้น $a_{54} = -125$

เทคนิคย่อย 2.1 (หัดคิดในใจให้ได้)

จากโจทย์บอกพจน์ที่ 42 และผลต่างรวมมาให้เราสามารถตั้งสมการเพื่อหาพจน์ที่ 54 ได้เลยดังนี้

$$a_{54} = a_{42} + 12d$$

แทนค่าจะได้ $a_{54} = -95 + 12\left(-\frac{5}{2}\right)$
 ดังนั้น $a_{54} = -125$

ข้อสังเกต เมื่อเราใช้เทคนิคย่อย 2.1 เราไม่ต้องผ่านสูตร $a_n = a_1 + (n-1)d$ ที่ต้องหา a_1 ก่อน

☞ ตัวอย่าง 2 ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่งมีพจน์ที่ 19 เท่ากับ -32 และผลต่างรวมเท่ากับ -2 จงหาพจน์ที่ 1 ของลำดับเลขคณิตชุดนี้

วิธีตรง จากสูตร $a_n = a_1 + (n-1)d$
 จะได้ $a_{19} = a_1 + (19-1)d$
 $-32 = a_1 + 18(-2)$
 $a_1 = 4$

เทคนิคย่อย 2.1 (หัดคิดในใจให้ได้)

จากโจทย์บอกพจน์ที่ 19 และผลต่างรวมมาให้ เราสามารถตั้งสมการเพื่อหาพจน์ที่ 1 ได้เลยดังนี้

$$a_1 = a_{19} + (-18)d$$

แทนค่าจะได้ $a_1 = -32 - 18(-2)$
 ดังนั้น $a_1 = 4$

ข้อสังเกต ถ้าโจทย์ถามหา a_1 จะใช้วิธีตรง หรือ เทคนิคย่อย 1.1 ความเร็วไม่ค่อยแตกต่างกัน แต่ที่ผู้เขียนทำให้อู้นี้เนื่องจากต้องการให้ผู้ศึกษาหัดใช้เทคนิคย่อย 2.1 ให้เชี่ยวชาญ เชื่อเถอะถ้าใช้คล่องแล้วรับรองว่าสามารถหา a_1 ได้เร็วกว่าวิธีตรงแน่ๆ

◆ เทคนิคย่อย 2.2

หลักการ

$$a_n - a_m = (n-m)d$$

เช่น $a_{12} - a_9 = 3d$
 $a_{30} - a_{12} = 18d$
 $a_{100} - a_{120} = -20d$ } คิดในใจให้ได้

❶ ตัวอย่าง 1 ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่งมีพจน์ที่ 5 เท่ากับ 15 และพจน์ที่ 36 เท่ากับ 77 จงหาผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตชุดนี้

วิธีตรง

จาก $a_n = a_1 + (n - 1) d$

จะได้ $a_5 = a_1 + (5 - 1) d$

$$15 = a_1 + 4 d \quad \dots \textcircled{1}$$

และ $a_{36} = a_1 + (36 - 1) d$

$$77 = a_1 + 35 d \quad \dots \textcircled{2}$$

นำ $\textcircled{2} - \textcircled{1}$ จะได้ $62 = 31 d$

$$d = 2$$

ดังนั้น ผลต่างร่วม คือ 2

เทคนิคย่อย 2.2 (หัดคิดในใจให้ได้)

จากโจทย์บอกพจน์ที่ 5 และพจน์ที่ 36 มาให้เราสามารถตั้งสมการเพื่อหาผลต่างร่วมได้เลยดังนี้

$$a_{36} - a_5 = 31 d$$

แทนค่าจะได้ $77 - 15 = 31 d$

ดังนั้น $d = 2$

ข้อสังเกต เมื่อเราใช้เทคนิคย่อย 2.2 เราไม่ต้องผ่านสูตร $a_n = a_1 + (n - 1) d$ ที่ต้องหา a_1 ก่อน

❶ ตัวอย่าง 2 ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่งมีพจน์ที่ 4 เท่ากับ 18 และพจน์ที่ 7 เท่ากับ 16 จงหาผลต่างร่วม และพจน์ที่ 1 ของลำดับเลขคณิตชุดนี้

วิธีตรง

จาก $a_n = a_1 + (n - 1) d$

จะได้ $a_4 = a_1 + (4 - 1) d$

$$18 = a_1 + 3 d \quad \dots \textcircled{1}$$

และ $a_7 = a_1 + (7 - 1) d$

$$16 = a_1 + 6 d \quad \dots \textcircled{2}$$

นำ $\textcircled{2} - \textcircled{1}$ จะได้ $-2 = 3 d$

$$d = -\frac{2}{3} \quad \dots \textcircled{3}$$

นำ $\textcircled{3}$ แทนใน $\textcircled{1}$ จะได้ $18 = a_1 + 3 \left(-\frac{2}{3}\right)$

$$a_1 = 20$$

ดังนั้น ผลต่างร่วม คือ $-\frac{2}{3}$ และพจน์ที่ 1 คือ 20

เทคนิคย่อย 2.2 (หัดคิดในใจให้ได้)

จากโจทย์บอกพจน์ที่ 4 และพจน์ที่ 7 มาให้เราสามารถตั้งสมการเพื่อหาผลต่างร่วมได้เลยดังนี้

$$a_7 - a_4 = 3 d$$

แทนค่าจะได้ $16 - 18 = 3d$

ดังนั้น $d = -\frac{2}{3}$

ต้องรู้เองนะว่า $7 - 4 = 3$

คณิตศาสตร์

–:15:–

เพิ่มเติม
ม.6 เล่ม 1

จากเทคนิคย่อย 2.1 ทำให้ทราบว่า

$$a_1 = a_4 + (-3)d$$

แทนค่าจะได้ $a_1 = 18 - 3\left(-\frac{2}{3}\right)$

ดังนั้น $a_1 = 20$

🐼 ตัวอย่าง 3 พจน์แรกที่เป็นจำนวนเต็มลบของลำดับเลขคณิต 200, 182, 164, 146, ... มีค่าต่างจากพจน์ที่ 10 เท่ากับเท่าไร

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $a_1 = 200$

และ $d = 182 - 200 = -18$

จากสูตร $a_n = a_1 + (n - 1)d$

จะได้ $a_n = 200 + (n - 1)(-18)$

$a_n = 218 - 18n$

เนื่องจากโจทย์ต้องการหาพจน์แรกที่เป็นลบ แสดงว่าเราจะต้องหา n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $a_n < 0$ ดังนี้

$$218 - 18n < 0$$

$$218 < 18n$$

$$n > \frac{218}{18}$$

$$= 12.1$$

ระวัง! แต่ n จะต้องเป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 12.1 แสดงว่า n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $a_n < 0$ คือ 13 และ a_{13} คือพจน์แรกที่เป็นจำนวนเต็มลบของลำดับคณิตนี้

โจทย์ต้องการหาผลต่างระหว่าง a_{13} กับ a_{10}

$$|a_{13} - a_{10}| = |[a_1 + (13 - 1)d] - [a_1 + (10 - 1)d]|$$

$$= |3d|$$

$$= |3(-18)|$$

ดังนั้น $|a_{13} - a_{10}| = 54$

อาจใช้เทคนิคย่อยชุดที่ 2.2 เข้าช่วยดังนี้

ดังนั้น $|a_{13} - a_{10}| = |3d|$

$$= |3(-18)|$$

$$= 54$$

คณิตศาสตร์

-:16:-

เพิ่มเติม
ม.6 เล่ม 1

การหาจำนวนพจน์ของลำดับเลขคณิต

การหาจำนวนพจน์ของลำดับเลขคณิต โดยใช้สูตร $a_n = a_1 + (n - 1) d$ เข้าช่วย

หลักการ

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร} \quad a_n &= a_1 + (n - 1) d \\ \text{จัดรูปใหม่ดังนี้} \quad a_n &= a_1 + dn - d \\ dn &= a_n - a_1 + d \\ n &= \frac{a_n - a_1}{d} + \frac{d}{d} \\ &\vdots \\ \text{ดังนั้น} \quad n &= \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \\ \text{หรือ} \quad n &= \frac{\text{พจน์ท้าย} - \text{พจน์แรก}}{d} + 1 \end{aligned}$$

☛ ตัวอย่าง 1 ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่ง คือ 5, 12, 19, 26, ..., 670 จงหาว่าลำดับนี้มีกี่พจน์

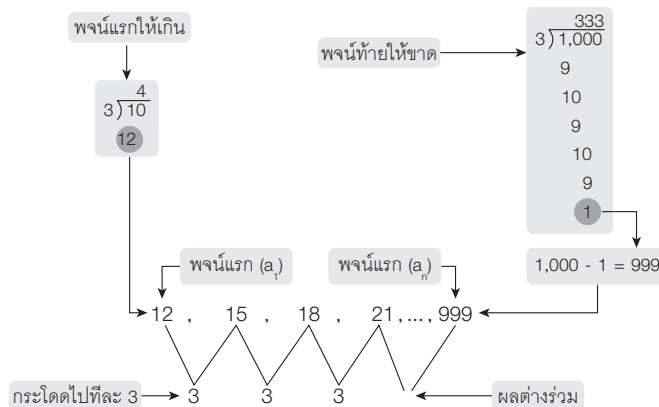
วิธีตรง จากโจทย์ทำให้รู้ว่า $a_1 = 5$, $d = 12 - 5 = 7$, $a_n = 670$

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร} \quad a_n &= a_1 + (n - 1) d \\ \text{จะได้} \quad 670 &= 5 + (n - 1) (7) \\ 670 &= 5 + 7n - 7 \\ 7n &= 672 \\ \text{ดังนั้น} \quad n &= 96 \\ \text{ใช้เทคนิค 3} \quad \text{จาก} \quad n &= \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \\ \text{หรือ} \quad n &= \frac{\text{พจน์ท้าย} - \text{พจน์แรก}}{d} + 1 \\ n &= \frac{670 - 5}{7} + 1 = 95 + 1 \\ \text{ดังนั้น} \quad n &= 96 \end{aligned}$$

☛ ตัวอย่าง 2 กำหนดตัวเลข 10 ถึง 1,000

1. หาด้วย 3 ลงตัว มีกี่จำนวน
2. หาด้วย 7 ลงตัว มีกี่จำนวน
3. หาด้วย 13 ลงตัว มีกี่จำนวน
4. หาด้วย 5 ลงตัว มีกี่จำนวน

วิธีทำ 1. ตัวเลข 10 ถึง 1,000 ที่หารด้วย 3 ลงตัวนำมาสร้างเป็นลำดับเลขคณิตได้ดังนี้



จากแผนภาพทำให้ทราบว่า $a_1 = 12$, $d = 3$ และ $a_n = 999$

คณิตศาสตร์

-:17:-

เพิ่มเติม
ม.6 เล่ม 1

$$\begin{aligned}
 \text{จากสูตร} \quad a_n &= a_1 + (n - 1) d \\
 \text{จะได้} \quad 999 &= 12 + (n - 1) (3) \\
 999 &= 12 + 3n - 3 \\
 3n &= 990 \\
 \text{ดังนั้น} \quad n &= 330 \\
 \text{ใช้เทคนิค 3} \quad \text{จาก} \quad n &= \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \\
 \text{หรือ} \quad n &= \frac{\text{พจน์ท้าย} - \text{พจน์แรก}}{d} + 1 \\
 \text{จะได้} \quad n &= \frac{999 - 12}{3} + 1 \\
 &= 329 + 1 \\
 \text{ดังนั้น} \quad n &= 330
 \end{aligned}$$

การสร้างพจน์ต่างๆ ของลำดับเลขคณิต แบบสมมาตร เข้าช่วย

เทคนิค 4 หลักการ

4

โดยปกติพจน์ต่างๆ ของลำดับเลขคณิต เราจะกำหนดให้เป็น $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots$ แต่ในบางครั้ง อาจทำให้แก้ปัญหาลำบากได้ยุ่งยาก ดังนั้นเราอาจสร้างพจน์ต่างๆ ของลำดับเลขคณิตใหม่แบบสมมาตรดังนี้

1. ถ้าโจทย์กำหนดให้จำนวนพจน์เป็นจำนวนคี่ แล้วสมมติให้ลำดับเลขคณิตเป็นดังนี้

มีพจน์กลางอยู่ 1 พจน์

$$\dots, a - 3d, a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$$

เมื่อ a เป็นค่าคงตัวแต่ไม่ใช่พจน์ที่ 1 และ d เป็นผลต่างร่วม

2. ถ้าโจทย์กำหนดให้จำนวนพจน์เป็นจำนวนคู่ แล้วสมมติให้ลำดับเลขคณิตเป็นดังนี้

มีพจน์กลางอยู่ 2 พจน์

$$\dots, a - 5d, a - 3d, a - d, a + d, a + 3d, a + 5d, \dots$$

เมื่อ a เป็นค่าคงตัว แต่ไม่ใช่พจน์ที่ 1 และ $2d$ เป็นผลต่างร่วม

◆ เทคนิคย่อย 4.1 เมื่อโจทย์กำหนดให้จำนวนพจน์เป็นจำนวนคี่

หลักการ สมมติให้ลำดับเลขคณิตเป็นดังนี้

มีพจน์กลางอยู่ 1 พจน์

$$\dots, a - 3d, a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$$

- ☛ ตัวอย่าง 1 เลข 3 จำนวนเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต ถ้าผลบวกของเลข 3 จำนวนนี้เป็น 24 และผลบวกของกำลังสองของแต่ละพจน์เป็น 242 แล้วผลบวกของพจน์แรกและพจน์สุดท้ายเท่ากับเท่าใด

วิธีตรง สมมติให้พจน์ทั้ง 3 มีรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{จากโจทย์จะได้ } (a_1) + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 24$$

$$3a_1 + 3d = 24$$

$$a_1 + d = 8$$

$$a_1 = 8 - d \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{และ } (a_1)^2 + (a_1 + d)^2 + (a_1 + 2d)^2 = 242 \quad \dots \textcircled{3}$$

นำ ② แทนใน ③ จะได้

$$(8 - d)^2 + (8 - d + d)^2 + (8 - d + 2d)^2 = 242$$

$$64 - 16d + d^2 + 64 + 64 + 16d + d^2 = 242$$

$$2d^2 = 50$$

$$d^2 = 25$$

$$d = \pm 5 \quad \dots \textcircled{4}$$

นำ ⑤ แทนใน ② จะได้

$$\begin{cases} d = 5, -5 \\ a_1 = 3, 13 \end{cases} \quad \dots \textcircled{5}$$

นำ ⑤ แทนใน ① จะได้เลข 3 จำนวนเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต 2 ชุดดังนี้

3, 8, 13 กับ 13, 8, 3

ดังนั้น ผลบวกของพจน์แรกและพจน์สุดท้ายเท่ากับ $13 + 3 = 16$

ใช้เทคนิคย่อย 4.1

เนื่องจากจำนวนพจน์ที่โจทย์กำหนดมาให้ เป็นเลขคี่ จึงสมมติให้พจน์ทั้งสามมีรูปแบบดังนี้

$$a - d, a, a + d \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{จากโจทย์จะได้ } (a - d) + (a) + (a + d) = 24$$

$$3a = 24$$

$$a = 8 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{และ } (a - d)^2 + (a)^2 + (a + d)^2 = 242 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\text{นำ ② แทนใน ③ จะได้ } (8 - d)^2 + (8)^2 + (8 + d)^2 = 242$$

$$64 - 16d + d^2 + 64 + 64 + 16d + d^2 = 242$$

$$2d^2 = 50$$

$$d^2 = 25$$

$$d = \pm 5 \quad \dots \textcircled{4}$$

นำ ④ และ ② แทนใน ① แล้ว ถ้า $d = 5$ และ $a = 8$ แล้วเลข 3 จำนวนเรียงกันได้ดังนี้

3, 8, 13

ถ้า $d = -5$ และ $a = 8$ แล้วเลข 3 จำนวนเรียงกันได้ดังนี้

13, 8, 3

ดังนั้น ผลบวกของพจน์แรกและพจน์สุดท้ายเท่ากับ $13 + 3 = 16$

ข้อสังเกต ถ้าโจทย์ไม่ซับซ้อนมากจะใช้วิธีตรงก็พอได้ แต่ถ้าโจทย์มีลักษณะซับซ้อนอาจต้องใช้เทคนิคย่อย 4.1 เข้าช่วยเพื่อทำให้การแก้ปัญหาลงมือทำได้ง่ายขึ้น

☞ ตัวอย่าง 2 เลข 3 จำนวนเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต ถ้าผลบวกของเลข 3 จำนวนนี้เป็น 27 ถ้าผลบวกของกำลังสามของแต่ละพจน์เป็น 2673 แล้ว ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของพจน์แรก และพจน์สุดท้ายเท่ากับเท่าใด _____

วิธีทำ เนื่องจากจำนวนพจน์ที่โจทย์กำหนดมาให้เป็นเลขคู่ จึงสมมติให้พจน์ทั้ง 3 มีรูปแบบดังนี้

$$a - d, a, a + d \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{จากโจทย์จะได้ } (a - d) + a + (a + d) = 27$$

$$3a = 27$$

$$a = 9 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{และ } (a - d)^3 + a^3 + (a + d)^3 = 2673$$

$$a^3 - 3a^2d + 3ad^2 - d^3 + a^3 + a^3 + 3a^2d + 3ad^2 + d^3 = 2673$$

$$3a^3 + 6ad^2 = 2673 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\text{นำ } \textcircled{2} \text{ แทนใน } \textcircled{3} \text{ จะได้ } 3(9)^3 + 6(9)d^2 = 2673$$

$$2187 + 54d^2 = 2673$$

$$d^2 = 9$$

$$d = \pm 3 \quad \dots \textcircled{4}$$

นำ $\textcircled{4}$ และ $\textcircled{2}$ แทนใน $\textcircled{1}$ แล้ว ถ้า $d = 3$ และ $a = 9$ แล้ว เลข 3 จำนวนเรียงกันได้ดังนี้

$$6, 9, 12$$

ถ้า $d = -3$ และ $a = 9$ แล้ว เลข 3 จำนวนเรียงกันได้ดังนี้

$$12, 9, 6$$

ดังนั้น ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของพจน์แรกและพจน์สุดท้ายคือ $|12 - 6| = |6 - 12| = 6$

☞ ตัวอย่าง 3 เลข 9 จำนวนเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต ถ้าผลบวกของเลข 9 จำนวนนี้เป็น 63 และผลบวกของกำลังสองของพจน์ที่ 3, 4, 5, 6 และ 7 เป็น 335 แล้ว จำนวนที่น้อยที่สุดใน 9 จำนวนนี้ เท่ากับเท่าใด _____

วิธีทำ สมมติให้พจน์ทั้ง 9 มีรูปแบบดังนี้

$$a - 4d, a - 3d, a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{จากโจทย์จะได้ } (a - 4d) + (a - 3d) + (a - 2d) + (a - d) + a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d) = 63$$

$$9a = 63$$

$$a = 7 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{และ } (a - 2d)^2 + (a - d)^2 + a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2 = 335$$

$$5a^2 + 10d^2 = 335 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\text{นำ } \textcircled{2} \text{ แทนใน } \textcircled{3} \text{ จะได้ } 5(7)^2 + 10d^2 = 335$$

$$245 + 10d^2 = 335$$

$$d^2 = 9$$

$$d = \pm 3 \quad \dots \textcircled{4}$$

นำ $\textcircled{4}$ และ $\textcircled{2}$ แทนใน $\textcircled{1}$ จะทำให้ทราบว่า

$$\text{ถ้า } d = 3 \text{ และ } a = 7 \text{ จำนวนที่น้อยที่สุดใน 9 จำนวน คือ } a - 4d = 7 - 4(3) = -5$$

$$\text{ถ้า } d = -3 \text{ และ } a = 7 \text{ จำนวนที่น้อยที่สุดใน 9 จำนวน คือ } a + 4d = 7 + 4(-3) = -5$$

ดังนั้น จำนวนที่น้อยที่สุดใน 9 จำนวนนี้ คือ -5

คณิตศาสตร์

–:20:–

เพิ่มเติม
ม.6 เล่ม 1

📌 ตัวอย่าง 4 จงหาค่าของ k โดยที่รากของสมการ $x^3 + 3x^2 - 6x + k = 0$ เป็นลำดับเลขคณิต

วิธีทำ เนื่องจากสมการ $x^3 + 3x^2 - 6x + k = 0$ เป็นสมการกำลังสาม

แสดงว่า รากของสมการนี้มีอยู่ 3 ตัว และโจทย์ยังกำหนดให้รากของสมการนี้เป็นลำดับเลขคณิตอีกด้วย ดังนั้น

สมมติให้ รากของสมการเป็น $a - d, a, a + d$... ①

แสดงว่าสมการนี้คือ $[x - (a - d)][x - a][x - (a + d)] = 0$

$$\text{จะได้ } x^3 - 3ax^2 + (3a^2 - d^2)x - (a^3 - ad^2) = 0$$

เทียบ ส.ป.ส. กับสมการในโจทย์ $x^3 + 3x^2 - 6x + k = 0$

$$\text{จะได้ } -3a = 3$$

$$a = -1 \quad \dots ②$$

$$\text{และ } 3a^2 - d^2 = -6$$

$$d^2 = 3a^2 + 6 \quad \dots ③$$

$$\text{นำ } ② \text{ แทนใน } ③ \text{ จะได้ } d^2 = 3(-1)^2 + 6$$

$$d^2 = 9 \quad \dots ④$$

$$\text{และ } k = -(a^3 - ad^2) \quad \dots ⑤$$

$$\text{นำ } ② \text{ และ } ④ \text{ แทนใน } ⑤ \text{ จะได้ } k = -[(-1)^3 - (-1)(9)]$$

$$k = -(-1 + 9)$$

$$\text{ดังนั้น } k = -8$$

◆ เทคนิคย่อย 4.2 เมื่อโจทย์กำหนดให้จำนวนพจน์เป็นจำนวนคู่

หลักการ สมมติให้ลำดับเลขคณิตเป็นดังนี้

มีพจน์กกลางอยู่ 2 พจน์

$$\dots, a - 5d, a - 3d, \mathbf{a - d}, \mathbf{a + d}, a + 3d, a + 5d, \dots$$

📌 ตัวอย่าง 1 เลข 4 จำนวนเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต ถ้าผลบวกของเลข 4 จำนวนนี้เป็น 28 และผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนเป็น 216 แล้ว ผลบวกของพจน์แรก และพจน์ที่สี่มีค่าเท่าใด

วิธีทำ สมมติให้พจน์ทั้ง 4 มีรูปแบบ ดังนี้

$$a - 3d, a - d, a + d, a + 3d \quad \dots ①$$

$$\text{จากโจทย์จะได้ } (a - 3d) + (a - d) + (a + d) + (a + 3d) = 28$$

$$4a = 28$$

$$a = 7 \quad \dots ②$$

$$\text{และ } (a - 3d)^2 + (a - d)^2 + (a + d)^2 + (a + 3d)^2 = 216$$

$$a^2 + 9d^2 + a^2 + d^2 + a^2 + d^2 + a^2 + 9d^2 = 216$$

$$4a^2 + 20d^2 = 216$$

$$a^2 + 5d^2 = 54 \quad \dots ③$$

นำ ② แทนใน ③ จะได้ $(7)^2 + 5d^2 = 54$

$$d^2 = 1$$

$$d = \pm 1 \quad \dots \text{ ④}$$

นำ ④ และ ② แทนใน ① แล้ว ถ้า $d = 1$ และ $a = 7$ แล้ว เลข 4 จำนวนเรียงกันได้ดังนี้

4, 6, 8, 10

ถ้า $d = -1$ และ $a = 7$ แล้ว เลข 4 จำนวนเรียงกันได้ดังนี้

10, 8, 6, 4

ดังนั้น ผลบวกของพจน์แรก และพจน์ที่สี่มีค่าคือ $4 + 10 = 14$

ตัวอย่าง 2 เลข 4 จำนวนเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต ถ้าผลบวกของเลข 4 จำนวนนี้ เป็น 36 และ ผลคูณของพจน์ที่หนึ่งและพจน์ที่สี่รวมกับผลคูณของพจน์ที่สอง และพจน์ที่สาม มีค่าเท่ากับ 122 แล้ว ผลบวกของ 2 พจน์กลางมีค่าเท่าใด _____

วิธีทำ สมมติให้พจน์ทั้ง 4 มี รูปแบบดังนี้

$$a - 3d, a - d, a + d, a + 3d \quad \dots \text{ ①}$$

$$\text{จากโจทย์จะได้ } (a - 3d) + (a - d) + (a + d) + (a + 3d) = 36$$

$$4a = 36$$

$$a = 9 \quad \dots \text{ ②}$$

$$\text{และ } (a - 3d)(a + 3d) + (a - d)(a + d) = 122$$

$$(a^2 - 9d^2) + (a^2 - d^2) = 122$$

$$2a^2 - 10d^2 = 122 \quad \dots \text{ ③}$$

นำ ② แทนใน ③ จะได้ $2(9)^2 - 10d^2 = 122$

$$162 - 10d^2 = 122$$

$$-10d^2 = 122 - 162$$

$$d^2 = 4$$

$$d = \pm 2 \quad \dots \text{ ④}$$

นำ ④ และ ② แทนใน ① แล้ว ถ้า $d = 2$ และ $a = 9$ แล้ว เลข 4 จำนวนเรียงกันได้ดังนี้

3, 7, 11, 15

ถ้า $d = -2$ และ $a = 9$ แล้ว เลข 4 จำนวนเรียงกันได้ดังนี้

15, 11, 7, 3

ดังนั้น ผลบวกของ 2 พจน์กลางคือ $7 + 11 = 18$

การหาพจน์กลางเมื่อลำดับเลขคณิตมีอยู่ 3 พจน์

เทคนิค

5

หลักการ กำหนดให้ x, A, y เป็นลำดับเลขคณิต

$$\text{จะได้ } A - x = y - A$$

$$2A = x + y$$

$$\text{ดังนั้น } A = \frac{x + y}{2} \quad \text{จำไว้ใช้แบบอัตโนมัตินะ}$$

คณิตศาสตร์

-:22:-

เพิ่มเติม
ม.6 เล่ม 1

📌 ตัวอย่าง กำหนดให้ x, A, y เป็นลำดับเลขคณิต แล้วจงหาค่า A เมื่อ

1. $x = 5$ และ $y = 15$
2. $x = 3$ และ $y = 7$
3. $x = \frac{1}{4}$ และ $y = \frac{1}{8}$
4. $x = a - b$ และ $y = a + b$

วิธีทำ ถ้า x, A, y เป็นลำดับเลขคณิตแล้ว $A = \frac{x + y}{2}$

1. $A = \frac{5 + 15}{2} = 10$
2. $A = \frac{3 + 7}{2} = 5$
3. $A = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}}{2} = \frac{3}{16}$
4. $A = \frac{(a - b) + (a + b)}{2} = \frac{2a}{2} = a$

หมายเหตุ ถ้าเจอโจทย์ประเภทนี้ให้ตอบทันทีเลยนะ

การหาพจน์ที่อยู่ระหว่างพจน์ 2 พจน์ใดๆ ของลำดับเลขคณิต

เทคนิค

6

เมื่อโจทย์บอกพจน์แรกและพจน์สุดท้ายพร้อมทั้งบอกจำนวนพจน์ที่อยู่ระหว่างมันมาให้

หลักการ

1. หาผลต่างร่วม (d) ให้ได้ก่อน ดังนี้

ถ้ากำหนดพจน์แรกเป็น x และพจน์สุดท้ายเป็น y ของลำดับเลขคณิต ซึ่งจำนวนพจน์ที่อยู่ระหว่างมันมีอยู่ k พจน์ ดังนี้

$$x, \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \dots, \boxed{k}, y$$

$\longleftarrow k \text{ พจน์} \longrightarrow$

ต้องทราบเองนะว่า จำนวนพจน์ตั้งแต่ x ถึง y มีทั้งหมด $(k + 2)$ พจน์

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ \text{จะได้} \quad y &= x + (k + 2 - 1)d \\ \text{ดังนั้น} \quad d &= \frac{y - x}{k + 1} \end{aligned}$$

2. เมื่อทราบ d แล้ว เราก็จะทราบพจน์ทุกพจน์ของลำดับเลขคณิต คือ

$$x, x + d, x + 2d, x + 3d, \dots, y$$

$\longleftarrow k + 2 \text{ พจน์} \longrightarrow$

📌 ตัวอย่าง 1 จงหาพจน์ 6 พจน์ของลำดับเลขคณิตที่อยู่ระหว่าง 5 และ 26

วิธีทำ ถ้า $x, \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \dots, \boxed{k}, y$ แล้ว $d = \frac{y - x}{k + 1}$

$\longleftarrow k \text{ พจน์} \longrightarrow$

$$\text{จากโจทย์} \quad x = 5, y = 26 \text{ และ} \quad k = 6$$

$$\text{จะได้} \quad d = \frac{26 - 5}{6 + 1} = \frac{21}{7} = 3$$

แสดงว่า ลำดับเลขคณิตจากโจทย์ที่รวม 5 และ 26 คือ 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26
ดังนั้น พจน์ทั้ง 6 พจน์ของลำดับเลขคณิตที่อยู่ระหว่าง 5 และ 26 คือ 8, 11, 14, 17, 20, 23

คณิตศาสตร์

:-23:-

เพิ่มเติม
ม.6 เล่ม 1