ชื่อหนังสือ แคลคูลัส 1-1
บาร์โค้ด 9789743897146
ISBN 974-389-714-3

แคลคูลัส
CALCULUS 1-1

สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี

- คณะบริหารธุรกิจ
- คณะวิทยาศาสตร์
- คณะวิศวกรรมศาสตร์ และผู้สนใจทั่วไป

ชัยประเสริฐ แก้วเมือง

YBOOK SKYBOOK SKYBOOK SKYBOOK SKYBOOK SKYBOOK SKYBOOK SKYBOOK SKYBOOK SKYBOOK SKYBOOK SKYBOOK SKYBOOK SKYBOOK SKYBOOK SKYBOOK SKYBOO

แคลคูลัส

CALCULUS 1-1

โดย...ชัยประเสริฐ แก้วเมือง

วท.บ. (คณิตศาสตร์) ศศ.ม. (ศึกษาศาสตร์-การสอน)

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

SKYBOOK COMPANY LIMITED

515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์ อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130

โทร. 0-2958-1125-7, 0-2567-5119 โทรสาร. 0-2567-5105

e-mail: sales@skybook.co.th

www.skybook.co.th

“แคลคูลัส 1-1”

พิมพ์ครั้งที่ 1 มิถุนายน 2549
พิมพ์ครั้งที่ 2 กุมภาพันธ์ 2550
พิมพ์ครั้งที่ 3 ตุลาคม 2551

สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย
ห้ามคัดลอกถ่ายเอกสารหรือพิมพ์
หรือวิธีหนึ่งวิธีใดของหนังสือเล่มนี้ก่อนได้รับอนุญาต
จากบริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

ราคา 200 บาท

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

ชัยประเสริฐ แก้วเมือง
แคลคูลัส 1-1 -- พิมพ์ครั้งที่ 3 -- ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์, 2551.
464 หน้า
1. แคลคูลัส
I. ชื่อเรื่อง
515
ISBN-13 : 978-974-389-714-6
ISBN-10 : 974-389-714-3
S7903-30-10-08

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด
515/276-8 ถ.รังสิต-ปทุมธานี ต.ประชาธิปัตย์
อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี 12130
e-mail: sales@skybook.co.th
www.skybook.co.th โทร. 0-2958-1125-7 โทรสาร. 0-2567-5105

หากท่านผู้อ่านซื้อหนังสือที่จัดพิมพ์โดยบริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด และพบว่าหนังสือสลับหน้า พิมพ์ไม่ชัดเจน
หน้าขาดหายไม่ครบ หรือความบกพร่องอื่นใดอันเนื่องมาจากกระบวนการพิมพ์และการเข้าเล่ม
กรุณาส่งหนังสือมาที่บริษัทฯ เพื่อรับหนังสือเล่มใหม่

พิมพ์ที่ บริษัท พี เอ็น เค แอนด์ สกายพริ้นติ้งส์ จำกัด
โทรศัพท์ : 0-2812-1484, 0-2812-2265

หนังสือแคลคูลัส 1-1 เล่มนี้ เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส 1-1 (13011125) ตามหลักสูตรหมวดวิชาศึกษาทั่วไป กลุ่มวิทยาศาสตร์กับคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี คณะบริหารธุรกิจ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล และเนื่องจากผู้เขียนได้เรียบเรียงเนื้อหาแคลคูลัสที่เป็นพื้นฐานไว้ครบถ้วนทุกเรื่อง ดังนั้น หนังสือเล่มนี้จึงเหมาะสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรีทุกคณะทุกสาขาวิชาที่เรียนวิชาแคลคูลัส

เนื้อหาในหนังสือเล่มนี้ประกอบด้วย เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น ฟังก์ชัน ลิมิตและความต่อเนื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิสัย การประยุกต์ของอนุพันธ์ การอินทิเกรต เทคนิคการอินทิเกรตและการประยุกต์ของอินทิกรัล โดยเรียบเรียงด้วยภาษาที่ง่ายและปูพื้นฐานจากเนื้อหาระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พัฒนาเป็นเนื้อหาแคลคูลัสที่สูงขึ้น จากเนื้อหาที่ง่ายไปสู่เนื้อหาที่ซับซ้อน มีการให้นิยาม ทฤษฎีบทพร้อมการพิสูจน์ตามลำดับขั้นตอน มีตัวอย่างพร้อมคำอธิบายอย่างละเอียด มีแบบฝึกหัดพร้อมเฉลยคำตอบที่ครอบคลุม สามารถศึกษาได้ด้วยตัวเอง

คำศัพท์ที่ใช้ในหนังสือเล่มนี้ส่วนใหญ่ใช้ตามพจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พิมพ์ครั้งที่ 8 (แก้ไขเพิ่มเติม) พ.ศ. 2545 แต่ก็มีบางคำที่ไม่ได้ใช้ตามพจนานุกรม โดยเฉพาะเนื้อหาในส่วนของการอินทิเกรต เช่น คำว่า integration และ integral ในหนังสือเล่มนี้ใช้คำว่า การอินทิเกรต และ อินทิกรัล เป็นต้น ซึ่งเป็นการใช้ตามแบบเรียนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายและตำราแคลคูลัสทั่วไป ทั้งนี้เพื่อไม่ให้นักศึกษาเกิดความสับสนในการใช้คำศัพท์

ผู้เขียนเรียบเรียงหนังสือเล่มนี้โดยศึกษาค้นคว้า ทั้งจากตำราภาษาอังกฤษและตำราภาษาไทย ทวนสอบความรู้ความเข้าใจที่ได้จากตำราหลายเล่ม จึงหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อนักศึกษาและผู้สนใจโดยทั่วไป หากมีข้อผิดพลาดประการใด ผู้เขียนต้องขออภัยไว้ ณ ที่นี้ และยินดีรับข้อติติงหรือข้อเสนอแนะ ด้วยความขอบคุณยิ่ง

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ ครู อาจารย์ ผู้บังคับบัญชาและผู้มีพระคุณทุกท่าน ที่ให้ความรัก ความรู้ ประสบการณ์และให้การสนับสนุนมาโดยตลอด ขอบคุณสมาชิกในครอบครัวที่เป็นกำลังใจที่ดียิ่งให้เรียบเรียงหนังสือเล่มนี้สำเร็จลงได้

คุณความดีที่พึงมี ขอมอบแด่คุณพ่อ คุณแม่และครูอาจารย์ทุกท่าน

(นายชัยประเสริฐ แก้วเมือง)

	หน้า
บทที่ 1 เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น	**1**
1.1 ระบบพิกัดฉาก	**1**
1.1.1 การกำหนดพิกัดของจุด	1
1.1.2 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด	3
1.1.3 จุดแบ่งของส่วนของเส้นตรง	5
แบบฝึกหัด 1.1	**6**
1.2 เส้นตรง	**7**
1.2.1 ความชันของเส้นตรง	7
1.2.2 สมการเส้นตรง	9
1.2.3 ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับจุด	14
1.2.4 ระยะทางระหว่างเส้นคู่ขนาน	15
แบบฝึกหัด 1.2	**16**
1.3 พาราโบลา	**18**
1.3.1 นิยามพาราโบลา	18
1.3.2 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด	19
1.3.3 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k)	21
1.3.4 สมการรูปทั่วไปของพาราโบลา	24
แบบฝึกหัด 1.3	**25**
บทที่ 2 ฟังก์ชัน ลิมิตและความต่อเนื่อง	**27**
2.1 ฟังก์ชัน	**27**
2.1.1 นิยามของฟังก์ชัน	27
2.1.2 การตรวจสอบฟังก์ชัน	28
2.1.3 การหาค่าของฟังก์ชัน	30
2.1.4 พีชคณิตของฟังก์ชัน	31
2.1.5 ฟังก์ชันประกอบ	32
2.1.6 ชนิดของฟังก์ชัน	34
แบบฝึกหัด 2.1	**37**

2.2 ลิมิต 39

2.2.1 แนวคิดพื้นฐานของลิมิต 39

2.2.2 ทฤษฎีบทลิมิต 46

2.2.3 การหาลิมิตรูปแบบยังไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ 50

2.2.4 ลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดเป็นช่วง (ฟังก์ชันแบบมีเงื่อนไข) 53

แบบฝึกหัด 2.2 57

2.3 ลิมิตอนันต์และลิมิตที่อนันต์ 61

2.3.1 ลิมิตอนันต์ 61

2.3.2 ลิมิตที่อนันต์ 64

แบบฝึกหัด 2.3 76

2.4 ความต่อเนื่อง 78

2.4.1 นิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน 78

2.4.2 ความต่อเนื่องบนช่วง 82

แบบฝึกหัด 2.4 85

2.5 นิยามของลิมิต 87

แบบฝึกหัด 2.5 94

บทที่ 3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน 95

3.1 อัตราการเปลี่ยนแปลง 95

แบบฝึกหัด 3.1 97

3.2 นิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน 98

แบบฝึกหัด 3.2 107

3.3 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร 109

3.3.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต 109

3.3.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ 125

แบบฝึกหัด 3.3 ก 130

แบบฝึกหัด 3.3 ข 131

3.4 ความหมายเชิงเรขาคณิตของอนุพันธ์ 132

แบบฝึกหัด 3.4 134

3.5 อนุพันธ์อันดับสูง 134
แบบฝึกหัด 3.5 136
3.6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันปริยาย 137
แบบฝึกหัด 3.6 140

บทที่ 4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิสัย 143
4.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง 143
4.1.1 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง 143
4.1.2 ฟังก์ชันลอการิทึม 144
4.1.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม 147
4.1.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง 153
แบบฝึกหัด 4.1 ก 156
แบบฝึกหัด 4.1 ข 156
4.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 158
4.2.1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ 158
4.2.2 ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 164
แบบฝึกหัด 4.2 ก 169
4.2.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 169
แบบฝึกหัด 4.2 ข 174
4.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน 175
4.3.1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน 175
4.3.2 ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน 178
4.3.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน 178
แบบฝึกหัด 4.3 182

บทที่ 5 การประยุกต์ของอนุพันธ์ 183
5.1 อัตราสัมพัทธ์ 183
แบบฝึกหัด 5.1 187
5.2 ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยสำหรับอนุพันธ์ 188
แบบฝึกหัด 5.2 190

5.3 การวิเคราะห์ลักษณะของฟังก์ชัน **191**
5.3.1 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด 191
5.3.2 ความเว้า 195
5.3.3 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ 200
5.3.4 ค่าสุดขีดของฟังก์ชัน 208
แบบฝึกหัด 5.3 **210**
5.4 โจทย์ปัญหาค่าสุดขีด **212**
แบบฝึกหัด 5.4 **217**
5.5 การร่างกราฟของฟังก์ชัน **218**
แบบฝึกหัด 5.5 **226**
5.6 ความเร็ว ความเร่ง **226**
5.6.1 ความเร็ว 226
5.6.2 ความเร่ง 227
5.6.3 ความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง ความเร็ว และความเร่ง 228
5.6.4 อัตราเร็วและอัตราเร่ง 229
แบบฝึกหัด 5.6 **235**
5.7 ค่าเชิงอนุพันธ์ **236**
5.7.1 นิยามค่าเชิงอนุพันธ์ 236
5.7.2 ความหมายทางเรขาคณิตของค่าเชิงอนุพันธ์ 238
5.7.3 สูตรของค่าเชิงอนุพันธ์ 241
5.7.4 การหาค่าประมาณของฟังก์ชัน 242
5.7.5 การหาค่าคลาดเคลื่อนของฟังก์ชัน 244
แบบฝึกหัด 5.7 **245**
5.8 การประยุกต์ของอนุพันธ์ในทางธุรกิจ **247**
5.8.1 ฟังก์ชันอุปสงค์และฟังก์ชันอุปทาน 247
5.8.2 ฟังก์ชันต้นทุน 250
5.8.3 ฟังก์ชันรายได้ 256
5.8.4 ฟังก์ชันกำไร 258
แบบฝึกหัด 5.8 **260**

5.9 รูปแบบยังไม่กำหนด **263**

5.9.1 รูปแบบยังไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ 263

5.9.2 รูปแบบยังไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$ 266

5.9.3 รูปแบบยังไม่กำหนด $0\cdot\infty$ และ $\infty-\infty$ 268

5.9.4 รูปแบบยังไม่กำหนด 0^0 , ∞^0 และ 1^∞ 270

แบบฝึกหัด 5.9 **273**

บทที่ 6 การอินทิเกรต **275**

6.1 อินทิกรัลไม่จำกัดเขต **275**

6.1.1 นิยามอินทิกรัลไม่จำกัดเขต 275

6.1.2 สูตรการอินทิเกรต 276

แบบฝึกหัด 6.1 ก **278**

6.1.3 การอินทิเกรตโดยการแทนค่า 279

แบบฝึกหัด 6.1 ข **287**

6.1.4 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ 289

แบบฝึกหัด 6.1 ค **292**

6.1.5 การอินทิเกรตที่ได้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน 293

แบบฝึกหัด 6.1 ง **295**

6.2 อินทิกรัลจำกัดเขต **296**

6.2.1 การคำนวณพื้นที่โดยใช้ลิมิตของผลบวก 296

6.2.2 นิยามอินทิกรัลจำกัดเขต 302

6.2.3 ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยสำหรับอินทิกรัล 306

แบบฝึกหัด 6.2 ก **307**

6.2.4 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 308

6.2.5 การหาอินทิกรัลจำกัดเขตโดยการแทนค่า 310

แบบฝึกหัด 6.2 ข **312**

บทที่ 7 เทคนิคการอินทิเกรต **313**

7.1 การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิตที่มีพจน์ $u^2 \pm a^2$ หรือ $a^2 \pm u^2$ **313**

แบบฝึกหัด 7.1 **316**

7.2 การอินทิเกรตทีละส่วน 317
7.2.1 สูตรการอินทิเกรตทีละส่วน 317
7.2.2 การอินทิเกรตทีละส่วนซ้ำ 323
7.2.3 ตารางการอินทิเกรตทีละส่วน 325
แบบฝึกหัด 7.2 328
7.3 การอินทิเกรตโดยแยกเป็นเศษส่วนย่อย 329
แบบฝึกหัด 7.3 340
7.4 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง 341
แบบฝึกหัด 7.4 354
7.5 การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ 355
แบบฝึกหัด 7.5 360
7.6 การอินทิเกรตโดยการแทนค่าทางพีชคณิต 361
แบบฝึกหัด 7.6 364

บทที่ 8 การประยุกต์ของอินทิกรัล 365
8.1 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง 365
8.1.1 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้งกับแกน x 365
8.1.2 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้งกับแกน y 370
8.1.3 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้งตามแนวแกน x 372
8.1.4 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้งตามแนวแกน y 377
แบบฝึกหัด 8.1 383
8.2 ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งหาพื้นที่ภาคตัดได้ 385
8.2.1 ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งมีพื้นที่ภาคตัดตั้งฉากกับแกน x 385
8.2.2 ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งมีพื้นที่ภาคตัดตั้งฉากกับแกน y 387
แบบฝึกหัด 8.2 388
8.3 ปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน 389
8.3.1 ปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนโดยวิธีแบบจาน 389
แบบฝึกหัด 8.3 ก 397
8.3.2 การหาปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนโดยวิธีแบบเปลือก 399
แบบฝึกหัด 8.3 ข 404

8.4 การประยุกต์อินทิกรัลไม่จำกัดเขต **405**

8.4.1 การประยุกต์อินทิกรัลไม่จำกัดเขตกรณีทั่วไป 405

แบบฝึกหัด 8.4 ก **409**

8.4.2 การประยุกต์อินทิกรัลไม่จำกัดเขตในทางธุรกิจ 410

แบบฝึกหัด 8.4 ข **413**

8.5 การประยุกต์อินทิกรัลจำกัดเขตในทางธุรกิจ **415**

8.5.1 ส่วนเกินผู้บริโภค 415

8.5.2 ส่วนเกินผู้ผลิต 415

แบบฝึกหัด 8.5 ก **419**

8.5.3 อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันหน่วยสุดท้าย 420

แบบฝึกหัด 8.5 ข **422**

คำตอบแบบฝึกหัด **423**

บรรณานุกรม **455**

เรขาคณิตวิเคราะห์ (analytic geometry) เป็นเนื้อหาที่สำคัญของคณิตศาสตร์ เป็นการประยุกต์วิธีการทางพีชคณิตมาแก้ปัญหาทางเรขาคณิต ทำให้การศึกษาเรขาคณิตแบบเดิมง่ายขึ้น บทเรียนนี้จะกล่าวถึงเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น มีเนื้อหาเกี่ยวกับระบบพิกัดฉาก เส้นตรงและพาราโบลา เพื่อทบทวนเป็นความรู้พื้นฐานก่อนที่จะศึกษาเนื้อหาแคลคูลัสในบทต่อไป

1.1 ระบบพิกัดฉาก (Rectangular Coordinate System)

1.1.1 การกำหนดพิกัดของจุด

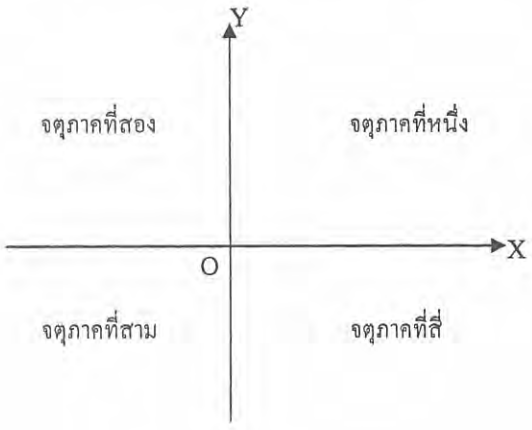
ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสองจำนวนหรือจุดบนเส้นตรง สามารถแทนได้ด้วยจุดบนระบบพิกัดฉาก การกำหนดระบบพิกัดฉากสามารถทำได้ดังนี้

บนระนาบใด ๆ ลากเส้นจำนวนสองเส้น เส้นหนึ่งเป็นเส้นแนวนอน อีกเส้นเป็นเส้นแนวตั้ง โดยลากให้ตั้งได้ฉากและตัดกันที่จุด O จุดนี้แทนจำนวนศูนย์ และเรียกว่า **จุดกำเนิด (origin)**

เส้นแนวนอนเรียกว่า **แกน** X ($x-axis$) ค่าของ x ที่จุดกำเนิดมีค่าเป็นศูนย์ ทางด้านขวามีค่าเป็นบวก และทางด้านซ้ายมีค่าเป็นลบ

เส้นแนวตั้งเรียกว่า **แกน** Y ($y-axis$) ค่าของ y ที่จุดกำเนิดมีค่าเป็นศูนย์ ทางด้านบนมีค่าเป็นบวก และทางด้านล่างมีค่าเป็นลบ

เรียกแกนทั้งสองว่า **แกนพิกัด** (axes of coordinates) เรียกระนาบที่มีแกนพิกัดเป็นแกน X และแกน Y ว่า**ระนาบ** XY แกนพิกัดทั้งสองจะแบ่งระนาบออกเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วนเรียกว่า **จตุภาค** (quadrant) โดยจตุภาคที่หนึ่ง จตุภาคที่สอง จตุภาคที่สาม และจตุภาคที่สี่แสดงดังรูป 1.1



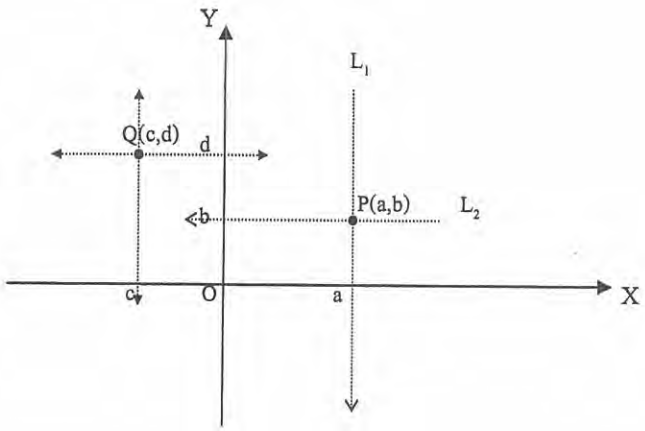
รูป 1.1

การกำหนดพิกัดของจุด บนระนาบ XY สามารถทำได้ ดังนี้

ถ้า P เป็นจุดบนระนาบ สามารถหาพิกัดของจุด P ได้ โดยลากเส้นตรง L_1 ผ่านจุด P ขนานกับแกน Y และไปตัดแกน X ที่ $x = a$ และลากเส้นตรง L_2 ผ่านจุด P ขนานกับแกน X และไปตัดแกน Y ที่ $y = b$ แล้ว จะได้ว่าจุด P มีพิกัดเป็นคู่อันดับของจำนวนจริง (a,b) เรียก a ว่าพิกัด x เรียก b ว่าพิกัด y นั่นคือจุด $P(a,b)$ มีค่า $x = a$ และ ค่า $y = b$

ด้วยวิธีการเช่นนี้ จะได้ว่าพิกัดของจุดกำเนิด คือ $(0,0)$

ในทางกลับกัน ถ้ามีคู่อันดับของจำนวนจริง เช่น (c,d) ก็สามารถหาจุด Q ซึ่งอยู่บนระนาบ XY ที่แทนคู่อันดับนี้ได้ โดยลากเส้นตรงขนานกับแกน Y ให้ตัดแกน X ที่ $x = c$ และลากเส้นตรงอีกเส้นให้ขนานกับแกน X และไปตัดแกน Y ที่ $y = d$ แล้วจะได้ว่าเส้นตรงสองเส้นนี้จะตัดกันที่จุด ๆ หนึ่ง จุดที่เส้นตรงทั้งสองตัดกันคือ จุดที่มีพิกัดเป็น (c,d) หรือจุด $Q(c,d)$ ซึ่งจะมีเพียงจุดเดียวเท่านั้น ดังรูป 1.2

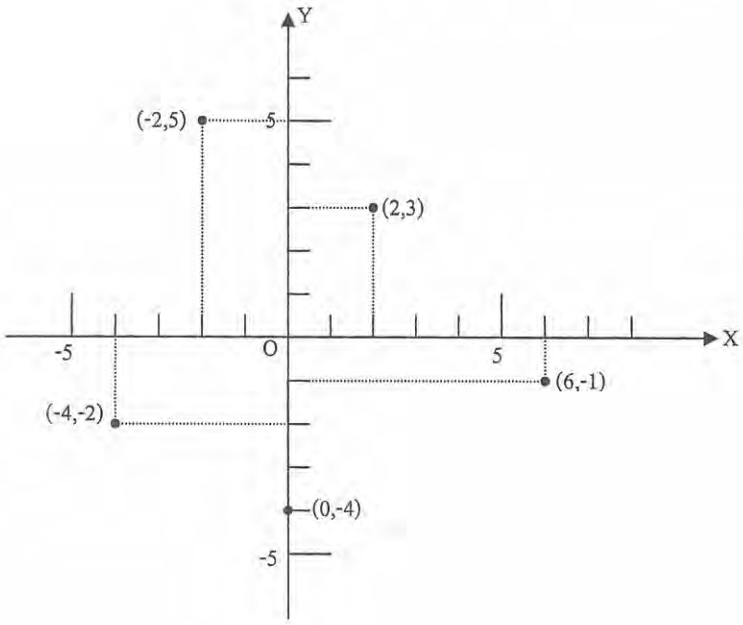


รูป 1.2

ด้วยวิธีการกำหนดพิกัดของจุดเช่นนี้ ทำให้ได้ข้อสรุปว่า

ในจตุภาคที่หนึ่ง	พิกัด x มีค่าเป็นบวก	และพิกัด y มีค่าเป็นบวก เช่นเดียวกัน
ในจตุภาคที่สอง	พิกัด x มีค่าเป็นลบ	แต่พิกัด y มีค่าเป็นบวก
ในจตุภาคที่สาม	พิกัด x มีค่าเป็นลบ	และพิกัด y มีค่าเป็นลบ เช่นเดียวกัน
ในจตุภาคที่สี่	พิกัด x มีค่าเป็นบวก	แต่พิกัด y มีค่าเป็นลบ

รูปต่อไปนี้แสดงตัวอย่างจุด (2,3) ,(–2,5), (–4,–2),(0,–4) และ (6,–1)



รูป 1.3 ✡

1.1.2 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

กำหนดให้ P_1 และ P_2 เป็นจุดในระนาบ ระยะทาง (distance) ระหว่างจุด P_1 และ P_2 เขียนแทนด้วย $|P_1P_2|$ หาได้ดังนี้

1. กรณี $P_1(x_1,0)$ และ $P_2(x_2,0)$ เป็นจุดบนแกน X จะได้

$$|P_1P_2| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

2. กรณี $P_1(x_1,y)$ และ $P_2(x_2,y)$ เป็นจุดบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน X จะได้

$$|P_1P_2| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

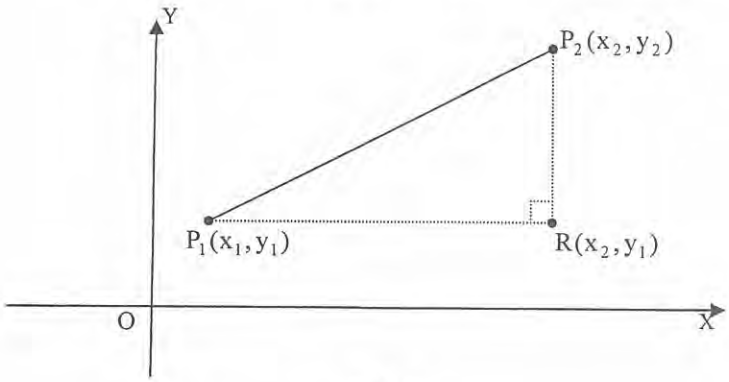
3. กรณี $P_1(0,y_1)$ และ $P_2(0,y_2)$ เป็นจุดบนแกน Y จะได้

$$|P_1P_2| = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$$

4. กรณี $P_1(x,y_1)$ และ $P_2(x,y_2)$ เป็นจุดบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y จะได้

$$|P_1P_2| = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$$

5. กรณี $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2,y_2)$ เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ ดังรูป 1.4



รูป 1.4

การหาระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2 ทำได้โดยลากเส้นตรงขนานกับแกน X ให้ผ่านจุด $P_1(x_1,y_1)$ และลากเส้นตรงอีกเส้นขนานกับแกน Y ให้ผ่านจุด $P_2(x_2,y_2)$ เส้นตรงทั้งสองจะตัดกันที่จุด $R(x_2,y_1)$ จะได้รูปสามเหลี่ยม P_1RP_2 เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมีมุม $P_1\hat{R}P_2$ เป็นมุมฉาก จากทฤษฎีบทปีธาโกรัส จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|P_1P_2| &= \sqrt{|P_1R|^2+|P_2R|^2}\\ &= \sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2}\\ &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\end{aligned}$$

นั่นคือ ระยะห่างระหว่างจุด $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2,y_2)$ หาได้จากสูตร

$$\boxed{|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

ตัวอย่าง 1.1.1 จงหาระยะทางระหว่างจุด $P_1(-1,2)$ และ $P_2(3,5)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}|P_1P_2| &= \sqrt{(3-(-1))^2+(5-2)^2}\\ &= \sqrt{16+9}\\ &= 5 \quad \text{หน่วย}\end{aligned}$$
✡

ตัวอย่าง 1.1.2 จงพิจารณาว่า จุด A(4,3), B(0,–1) และ C(8,–1) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมประเภทใด

วิธีทำ
$$|AB| = \sqrt{(0-4)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$
$$|AC| = \sqrt{(8-4)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$
$$|BC| = \sqrt{(8-0)^2+(-1-(-1))^2} = \sqrt{64+0} = \sqrt{64}$$

เพราะว่า $|AB|=|AC|$ ดังนั้น สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

นอกจากนี้ยังพบว่า $|BC|^2 = |AB|^2+|AC|^2$ ดังนั้น สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากด้วย โดยมี มุม A เป็นมุมฉาก AB และ AC เป็นด้านประกอบมุมฉาก ✡