



คณิตศาสตร์

เล่ม ๑

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

๖

$$v = \frac{ds}{dt}$$





หนังสือเรียน

รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๖ เล่ม ๑

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

จัดทำเป็นฉบับ e-book ครั้งที่ ๒ พ.ศ. ๒๕๖๖

มีลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำหนังสือเรียน ฉบับ e-book นี้ขึ้น โดยมีเนื้อหาเช่นเดียวกับหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๖ เล่ม ๑ ฉบับสื่อสิ่งพิมพ์ ที่จัดทำตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ ทุกประการ เพื่อให้นักเรียน ครู ผู้ปกครอง นักวิชาการ และผู้สนใจทั่วไป เข้าถึงได้ง่ายและสะดวก รวดเร็ว รวมทั้งสามารถเลือกใช้ตามความเหมาะสมกับจุดประสงค์ต่าง ๆ ทั้งนี้ สสวท. ขอสงวนสิทธิ์ ในหนังสือเรียน ฉบับ e-book นี้ ตามกฎหมายลิขสิทธิ์ ห้ามผู้ใดทำซ้ำ คัดลอก ดัดแปลง เลียนแบบ จำหน่าย หรือ เผยแพร่ โดยมิได้รับอนุญาต

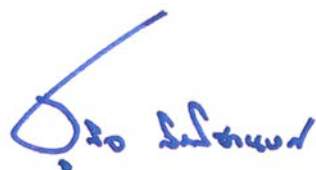
สามารถเข้าถึงสื่อดิจิทัลต่าง ๆ ของ สสวท. ได้ที่ <http://www.ipst.ac.th/ebook-resource/>

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อต้องการพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการคิด ใช้กระบวนการสืบเสาะหาความรู้และแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีการทำกิจกรรมด้วยการลงมือปฏิบัติ เพื่อให้ผู้เรียนได้ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และทักษะแห่งศตวรรษที่ ๒๑ ซึ่งในปีการศึกษา ๒๕๖๑ เป็นต้นไปนี้โรงเรียนจะต้องใช้หลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) สสวท. จึงได้จัดทำหนังสือเรียนที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตรเพื่อให้โรงเรียนได้ใช้สำหรับจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๖ เล่ม ๑ นี้ มีผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมที่ครอบคลุมเนื้อหาบางส่วนที่ปรากฏตามตัวชี้วัดรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๖ โดยเมื่อผู้เรียนเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ทั้ง ๖ เล่ม ครบทุกชั้นปีในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ - ๖ แล้วจะสามารถบรรลุผลสัมฤทธิ์ตามตัวชี้วัดของรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ได้ และในขณะเดียวกันก็สามารถต่อยอดเนื้อหาจากรายวิชาพื้นฐานไปสู่เนื้อหาในรายวิชาเพิ่มเติมได้โดยไม่ต้องเสียเวลาเรียนซ้ำซ้อน ทั้งนี้ หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม ๑ นี้ มีเนื้อหาที่จำเป็นที่ต้องเรียน ประกอบด้วยเรื่องลำดับและอนุกรม และแคลคูลัสเบื้องต้น ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญและเพียงพอสำหรับการศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษาในด้านวิทยาศาสตร์ หรือประกอบอาชีพในสาขาที่ใช้วิทยาศาสตร์เป็นฐาน เช่น แพทย์ ทันตแพทย์ สัตวแพทย์ เทคโนโลยีชีวภาพ วิศวกรรม สถาปัตยกรรม เศรษฐศาสตร์ พาณิชยศาสตร์ ฯลฯ โดยเน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์และการแก้ปัญหา เชื่อมโยงความรู้สู่การนำไปใช้ในชีวิตจริง ตลอดจนมีกิจกรรมที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีประสิทธิภาพ รวมทั้งสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง อันเป็นรากฐานในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติให้มีคุณภาพและพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศ

การจัดทำหนังสือเรียนเล่มนี้ ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการอิสระ คณาจารย์ทั้งหลาย รวมทั้งครูผู้สอน นักวิชาการ จากสถาบันและสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชน จึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้นี้หนังสือเรียนเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง



(ศาสตราจารย์ชูกิจ ลิมปิจำนงค์)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำอธิบายรายวิชา

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๖ เล่ม ๑

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ภาคเรียนที่ ๑

เวลา ๑๐๐ ชั่วโมง

จำนวน ๒.๕ หน่วยกิต

ศึกษา พร้อมทั้งฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาของสาระ ดังนี้

ลำดับและอนุกรม ลำดับ ลิมิตของลำดับอนันต์ อนุกรม สัญลักษณ์แสดงการบวก การประยุกต์ของลำดับและอนุกรม

แคลคูลัสเบื้องต้น ลิมิตของฟังก์ชัน ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ เส้นสัมผัสเส้นโค้ง อนุพันธ์อันดับสูง การประยุกต์ของอนุพันธ์ ฏิกยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต ปริพันธ์จำกัดเขต พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

โดยจัดประสบการณ์ให้ผู้เรียนได้พัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ การแก้ปัญหา การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยง การให้เหตุผล และการคิดสร้างสรรค์

การใช้สื่อ อุปกรณ์ เทคโนโลยี และแหล่งข้อมูล และนำประสบการณ์ ตลอดจนทักษะและกระบวนการที่ได้ ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ มีความรอบคอบ และมีวิจารณญาณ

การวัดผลประเมินผล ใช้วิธีการที่หลากหลายตามสภาพความเป็นจริงให้สอดคล้องกับเนื้อหาและทักษะที่ต้องการวัด

ผลการเรียนรู้

๑. ระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก
 ๒. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต
 ๓. หาผลบวกอนุกรมอนันต์
 ๔. เข้าใจและนำความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมไปใช้
 ๕. ตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่กำหนดให้
 ๖. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหา
 ๗. หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและจำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้ และนำไปใช้แก้ปัญหา
- รวมทั้งหมด ๗ ผลการเรียนรู้

แนะนำการใช้หนังสือเรียน

ส่วนนี้เป็นส่วนแนะนำโครงสร้างของหนังสือเรียนเพื่อการใช้หนังสือเรียนอย่างมีประสิทธิภาพ

ในหนังสือเล่มนี้จะแบ่งบทเรียนเป็น 2 บท โดยแต่ละบทจะมีส่วนประกอบ ดังนี้

“

.....
.....

”

ส่วนนำของบท

เกริ่นนำบทด้วยข้อมูลที่น่าสนใจ รวมถึงการนำไปใช้ในชีวิตจริง เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนตระหนักถึงความสำคัญของการเรียนเนื้อหาในบท

จุดมุ่งหมาย

เป้าหมายที่นักเรียนควรไปถึงหลังจากเรียนจบบทนี้

ความรู้ก่อนหน้า

ความรู้ที่นักเรียนจำเป็นต้องมีก่อนที่จะเรียนบทนี้

เสริมสมอง

เกร็ดความรู้หลากหลายรูปแบบเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน เช่น ประวัตินักคณิตศาสตร์ ตัวอย่างการนำเนื้อหาคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง การเชื่อมโยงเนื้อหาในบทกับวิชาอื่น

กิจกรรม

กิจกรรมที่นักเรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (learning and innovation skills) ที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 อันได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม (creativity and innovation) การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา (critical thinking and problem solving) การสื่อสาร (communication) และการร่วมมือ (collaboration)



จุดมุ่งหมาย



ความรู้ก่อนหน้า



เสริมสมอง



กิจกรรม



เทคโนโลยี

โจทย์ที่มีไอคอนนี้สามารถใช้เทคโนโลยีช่วยในการคิดได้ โดยอาจใช้เครื่องคิดเลข โปรแกรมสำเร็จรูปในคอมพิวเตอร์ โปรแกรมประยุกต์ในโทรศัพท์มือถือ สมาร์ทโฟน การค้นหาข้อมูลทางอินเทอร์เน็ต และอื่น ๆ ตามความเหมาะสม



โจทย์ท้าทาย

โจทย์ที่มีไอคอนนี้เป็นโจทย์ที่ค่อนข้างยากและซับซ้อนกว่าโจทย์แบบฝึกหัดทั่วไป เพื่อท้าทายความสามารถของนักเรียนที่ต้องการพัฒนาทักษะเพิ่มเติม นอกเหนือจากการเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท

แบบฝึกหัด

โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียน มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียน ช่วยให้นักเรียนสามารถตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของตนเองได้



แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดท้ายบท

แบบฝึกหัดท้ายบทแบ่งประเภทได้เป็น

- โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียนจบบท มีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท โดยจะมีแถบสี
- โจทย์ท้าทาย
- โจทย์เพื่อฝึกทักษะ ที่มีความน่าสนใจ โดยจะไม่มีแถบสีและไม่มีไอคอนหน้าเลขข้อ



แบบฝึกหัดท้ายบท

1.
.....
- ☆ 2.
.....
3.
.....

บทที่ 1 จะใช้สี



บทที่ 2 จะใช้สี



1



ลำดับและอนุกรม

บทที่ 1 ลำดับและอนุกรม

1

1.1 ลำดับ

3

1.1.1 ความหมายของลำดับ

3

1.1.2 ลำดับเลขคณิต

10

1.1.3 ลำดับเรขาคณิต

17

1.1.4 ลำดับฮาร์มอนิก

24

1.2 ลิมิตของลำดับอนันต์

26

1.3 อนุกรม

41

1.3.1 อนุกรมเลขคณิต

41

1.3.2 อนุกรมเรขาคณิต

48

1.3.3 อนุกรมอนันต์

55

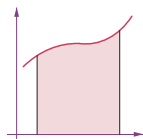
1.4 สัญลักษณ์แสดงการบวก

72

1.5 การประยุกต์ของลำดับและอนุกรม

85

2



แคลคูลัสเบื้องต้น

บทที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น

114

2.1 ลิมิตของฟังก์ชัน

116

2.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

137

2.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

146

2.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร

159

2.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

170

2.6 เส้นสัมผัสเส้นโค้ง

175

2.7 อนุพันธ์อันดับสูง

181

2.8 การประยุกต์ของอนุพันธ์

186

2.8.1 การเคลื่อนที่แนวตรง

186

2.8.2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

189

2.8.3 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

206

2.9 ปริมาณพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

218

2.10 ปริพันธ์จำกัดเขต

234

2.11 พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

247

บรรณานุกรม

270

ภาคผนวก

273

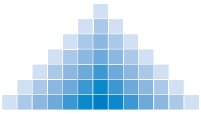
คณะผู้จัดทำ

277

บทที่

1

| ลำดับและอนุกรม



1.1 ลำดับ

1.1.1 ความหมายของลำดับ

1.1.2 ลำดับเลขคณิต

1.1.3 ลำดับเรขาคณิต

1.1.4 ลำดับฮาร์มอนิก

1.2 LIMIT ของลำดับอนันต์

1.3 อนุกรม

1.3.1 อนุกรมเลขคณิต

1.3.2 อนุกรมเรขาคณิต

1.3.3 อนุกรมอนันต์

1.4 สัญลักษณ์แสดงการบวก

1.5 การประยุกต์ของลำดับและอนุกรม



จุดมุ่งหมาย

1. หาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต
2. หา LIMIT ของลำดับอนันต์โดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับ LIMIT
3. ระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก
4. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต
5. หาผลบวกของอนุกรมอนันต์
6. ระบุได้ว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก
7. ใช้ความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมในการแก้ปัญหา

บทที่ 1

ลำดับและอนุกรม

“

ในการพิจารณาปริมาณยาที่ให้กับผู้ป่วยเพื่อให้ยาออกฤทธิ์ได้อย่างต่อเนื่องและไม่ตกค้างในร่างกายมากเกินไปจนเป็นอันตราย สามารถใช้อนุกรมเรขาคณิตมาช่วยในการคำนวณได้ ตัวอย่างเช่น ผู้ป่วยที่ติดเชื้อแบคทีเรียต้องรับประทานยาปฏิชีวนะครั้งละ 1 เม็ด ขนาด 250 มิลลิกรัม วันละ 4 ครั้ง (ทุก 6 ชั่วโมง) และเมื่อเวลาผ่านไปทุก 6 ชั่วโมง ปริมาณยาในร่างกายจะลดลงเหลือร้อยละ 4 จะได้ว่า หลังจากรับประทานยาเม็ดที่ 2 จะมีปริมาณยาอยู่ในร่างกาย $250 + 250(0.04) = 260$ มิลลิกรัม หลังจากรับประทานยาเม็ดที่ 3 จะมีปริมาณยาอยู่ในร่างกาย $250 + 250(0.04) + 250(0.04)^2 = 260.4$ มิลลิกรัม และสามารถคำนวณได้ว่าหลังจากรับประทานยาเม็ดที่ 10 จะมีปริมาณยาอยู่ในร่างกาย $250 + 250(0.04) + 250(0.04)^2 + \dots + 250(0.04)^9$ มิลลิกรัม ซึ่งผลบวกที่ได้อยู่ในรูปอนุกรมเรขาคณิต มีค่าประมาณ 260.42 มิลลิกรัม จะเห็นว่าถ้าผู้ป่วยรับประทานติดต่อกันตามที่แพทย์สั่ง ผู้ป่วยจะมีปริมาณยาในร่างกายค่อนข้างคงที่ตลอดระยะเวลาการรักษา ซึ่งจะทำให้การรักษาเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ แต่ถ้าผู้ป่วยหยุดการรับประทานยาก่อนกำหนด อาจทำให้ปริมาณยาที่จะออกฤทธิ์ไม่เพียงพอต่อการรักษา และทำให้เชื้อแบคทีเรียสามารถปรับตัวให้ทนต่อฤทธิ์ของยาชนิดนั้นได้ กลายเป็นเชื้อแบคทีเรียที่ดื้อยา ซึ่งถ้าเกิดการติดเชื้อครั้งต่อไปก็จะเป็นไปอย่างยากลำบากที่จะรักษาได้อีก



”



ความรู้ก่อนหน้า

- เลขยกกำลัง
- ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน



ipst.me/10550

1.1 ลำดับ

1.1.1 ความหมายของลำดับ

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

- 1) สุนีย์เก็บเงินทุกเดือนเดือนละ 500 บาท เป็นเวลา 8 เดือน เขียนตารางแสดงจำนวนเงินสะสมในแต่ละเดือนได้ดังนี้

เดือนที่	1	2	3	4	5	6	7	8
จำนวนเงินสะสม (บาท)	500	1,000	1,500	2,000	2,500	3,000	3,500	4,000

จากตาราง จะเห็นว่า ความสัมพันธ์ระหว่างเดือนที่เก็บเงินกับจำนวนเงินสะสมในแต่ละเดือนเป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ และมีเรนจ์เป็น $\{500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000\}$

- 2) จำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้นด้วยการแบ่งเซลล์จากหนึ่งเป็นสอง โดยเริ่มต้นมีแบคทีเรียหนึ่งเซลล์และแบ่งเซลล์ทุกวินาที เขียนตารางแสดงจำนวนแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไปในแต่ละวินาทีได้ดังนี้

เวลาที่ผ่านไป (วินาที)	1	2	3	4	5	6	...
จำนวนแบคทีเรีย (เซลล์)	2	4	8	16	32	64	...

จากตาราง จะเห็นว่า ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาที่ผ่านไปกับจำนวนแบคทีเรียในแต่ละวินาทีเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$ และมีเรนจ์เป็น $\{2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots\}$

ความสัมพันธ์ในข้อ 1) และ 2) เป็นความสัมพันธ์ที่มีโดเมนเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเต็มบวก และความสัมพันธ์ทั้งสองต่างก็เป็นฟังก์ชัน เรียกความสัมพันธ์เช่นนี้ว่า ลำดับ โดยให้นิยามของลำดับดังนี้

บทนิยาม 1

ลำดับ (sequence) คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ หรือมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

ในการเขียนแสดงลำดับ จะเขียนเฉพาะสมาชิกของเรนจ์เรียงกัน กล่าวคือ ถ้า a เป็นลำดับ ซึ่ง $a(1) = a_1, a(2) = a_2, a(3) = a_3, \dots, a(n) = a_n$ แล้ว

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของลำดับ

เรียก a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของลำดับ

เรียก a_3 ว่า พจน์ที่ 3 ของลำดับ

$\vdots$

และเรียก a_n ว่า พจน์ที่ n ของลำดับ หรือพจน์ทั่วไปของลำดับ

เรียกลำดับที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ว่า ลำดับจำกัด (finite sequence) และเรียกลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกว่า ลำดับอนันต์ (infinite sequence)

กรณี a เป็นลำดับจำกัด เขียนแสดงลำดับด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

กรณี a เป็นลำดับอนันต์ เขียนแสดงลำดับด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

ตัวอย่างของลำดับ

- 1) 7, 14, 21, 28, 35, 42 เป็นลำดับจำกัด
- 2) 1, 3, 5, 7, 9, ..., 99 เป็นลำดับจำกัด
- 3) 6, 11, 16, 21, 26, ..., $5n+1$, ... เป็นลำดับอนันต์
- 4) 4, 9, 16, 25, 36, ..., $(n+1)^2$, ... เป็นลำดับอนันต์

การศึกษาเรื่องลำดับต่อไปนี้จะกล่าวถึงเฉพาะลำดับซึ่งเรารู้ว่าเป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริงเท่านั้น และเรียกว่า ลำดับของจำนวนจริง

การเขียนแสดงลำดับ

สามารถเขียนแสดงลำดับได้หลายรูปแบบ ดังต่อไปนี้

การเขียนแสดงลำดับโดยเขียนแจกแจงพจน์ของลำดับ

ถ้าลำดับที่พิจารณาเป็นลำดับจำกัดและมีจำนวนพจน์ไม่มากนัก วิธีการกำหนดหรือเขียนแสดงลำดับจะใช้วิธีการเขียนพจน์ทั้งหมดของลำดับ ตัวอย่างเช่น

หยอดเงินลงในกระปุกออมสินวันละ 5 บาท จำนวนเงินในกระปุก 7 วันแรกสามารถเขียนเป็นลำดับได้ดังนี้ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35

ในกรณีที่ลำดับที่พิจารณาเป็นลำดับจำกัดแต่มีจำนวนพจน์มาก อาจเขียนเพียงพจน์แรก ๆ และใช้เครื่องหมาย ... เพื่อละพจน์กลาง ๆ ไว้ แล้วเขียนพจน์สุดท้ายกำกับ ตัวอย่างเช่น

จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 เขียนเป็นลำดับได้ดังนี้ 1, 2, 3, ..., 100

ในกรณีที่ลำดับที่พิจารณาเป็นลำดับอนันต์ จะเขียนเพียงพจน์แรก ๆ และใช้เครื่องหมาย ... เพื่อละพจน์ต่อ ๆ ไป โดยต้องเป็นที่เข้าใจตรงกันว่าพจน์ที่ละไว้หมายถึงอะไร ตัวอย่างเช่น

จำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้นด้วยการแบ่งเซลล์จากหนึ่งเป็นสอง โดยเริ่มต้นมีแบคทีเรียหนึ่งเซลล์และแบ่งเซลล์ทุกวินาที เขียนจำนวนแบคทีเรียในวินาทีที่ 1, 2, 3, 4, 5, ... เป็นลำดับได้ดังนี้ 2, 4, 8, 16, 32, ...

การเขียนแสดงลำดับโดยเขียนพจน์ทั่วไปของลำดับ

วิธีการนี้จะเขียนลำดับในรูปสูตรของพจน์ทั่วไปของลำดับ ตัวอย่างเช่น

หยอดเงินลงในกระปุกออมสินวันละ 5 บาท เป็นเวลา 7 วัน จำนวนเงินในกระปุกในวันที่ n เขียนเป็นลำดับได้ดังนี้ $a_n = 5n$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 เขียนเป็นลำดับได้ดังนี้ $a_n = n$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$

จำนวนแบคที่เรียที่เพิ่มขึ้นด้วยการแบ่งเซลล์จากหนึ่งเป็นสอง โดยเริ่มต้นมีแบคที่เรียหนึ่งเซลล์และแบ่งเซลล์ทุกวินาที เขียนจำนวนแบคที่เรียในวินาทีที่ n เป็นลำดับได้ดังนี้ $a_n = 2^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

จากตัวอย่างทั้งหมดข้างต้น จะเห็นว่าการกำหนดพจน์ทั่วไปของลำดับจะทำให้ทราบทุกพจน์ในลำดับนั้น

ตัวอย่างที่ 1

จงหาสี่พจน์แรกของลำดับที่ $a_n = 3n - 2$

วิธีทำ แทน n ใน $a_n = 3n - 2$ ด้วย 1, 2, 3 และ 4 จะได้สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = 3(1) - 2 = 1$$

$$a_2 = 3(2) - 2 = 4$$

$$a_3 = 3(3) - 2 = 7$$

$$a_4 = 3(4) - 2 = 10$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ 1, 4, 7 และ 10

ตัวอย่างที่ 2

จงหาหกพจน์แรกของลำดับที่ $a_n = n + (-1)^n n$

วิธีทำ แทน n ใน $a_n = n + (-1)^n n$ ด้วย 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 จะได้หกพจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = 1 + (-1)^1 (1) = 0$$

$$a_2 = 2 + (-1)^2 (2) = 4$$

$$a_3 = 3 + (-1)^3 (3) = 0$$

$$a_4 = 4 + (-1)^4 (4) = 8$$

$$a_5 = 5 + (-1)^5 (5) = 0$$

$$a_6 = 6 + (-1)^6 (6) = 12$$

ดังนั้น หกพจน์แรกของลำดับนี้ คือ 0, 4, 0, 8, 0 และ 12

ข้อสังเกต สามารถกำหนดลำดับในตัวอย่างที่ 2 ในอีกรูปแบบได้ดังนี้

$$a_n = \begin{cases} 2n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ 0 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

การเขียนแสดงลำดับโดยใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

เมื่อกำหนดพจน์เริ่มต้นจำนวนหนึ่งพร้อมกับสูตรการหาพจน์ถัดไปจากพจน์ก่อนหน้า จะเรียกรากำหนดลำดับด้วยวิธีนี้ว่า การนิยามโดยใช้ **ความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation)**

ตัวอย่างที่ 3

กำหนดลำดับ a_n ซึ่ง $a_1 = 2$ และ $a_n = a_{n-1} + 3$ เมื่อ $n \geq 2$ จงหาหำพจน์แรกของลำดับนี้

วิธีทำ แทน n ใน $a_n = a_{n-1} + 3$ ด้วย 2, 3, 4 และ 5 จะได้

$$a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$$

$$a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$$

$$a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14$$

ดังนั้น หำพจน์แรกของลำดับนี้ คือ 2, 5, 8, 11 และ 14

ตัวอย่างที่ 4

กำหนดลำดับ b_n ซึ่ง $b_1 = 1$ และ $b_n = nb_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 2$ จงหาหพจน์แรกของลำดับนี้

วิธีทำ แทน n ใน $b_n = nb_{n-1}$ ด้วย 2, 3, 4, 5 และ 6 จะได้

$$b_2 = 2b_1 = 2(1) = 2$$

$$b_3 = 3b_2 = 3(2) = 6$$

$$b_4 = 4b_3 = 4(6) = 24$$

$$b_5 = 5b_4 = 5(24) = 120$$

$$b_6 = 6b_5 = 6(120) = 720$$

ดังนั้น หพจน์แรกของลำดับนี้ คือ 1, 2, 6, 24, 120 และ 720

ข้อสังเกต สามารถกำหนดพจน์ทั่วไปของลำดับในตัวอย่างที่ 4 ได้เป็น $b_n = n!$



เสริมสมอง : ลำดับฟีโบนัชชีและลำดับลูคัส

ลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) คือ ลำดับ F_n ซึ่ง $F_1 = 1, F_2 = 1$ และ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$ เรียกแต่ละพจน์ของลำดับฟีโบนัชชีว่า จำนวนฟีโบนัชชี (Fibonacci number) ซึ่งได้แก่ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... ส่วนลำดับลูคัส (sequence of Lucas numbers) คือ ลำดับ L_n ซึ่ง $L_1 = 1, L_2 = 3$ และ $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$ เรียกแต่ละพจน์ของลำดับลูคัสว่า จำนวนลูคัส (Lucas number) ซึ่งได้แก่ 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ... จะเห็นว่าลำดับฟีโบนัชชีและลำดับลูคัสเป็นลำดับที่กำหนดโดยใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดเดียวกัน กล่าวคือ แต่ละพจน์ของลำดับได้จากผลบวกของสองพจน์ก่อนหน้า แต่การกำหนดสองพจน์แรกของลำดับทั้งสองต่างกัน ทำให้ลำดับทั้งสองแตกต่างกัน

การเขียนแสดงลำดับโดยการบอกเงื่อนไขของลำดับหรือสมบัติของพจน์ของลำดับ

ถ้าไม่ทราบสูตรของพจน์ทั่วไปของลำดับและไม่ทราบความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับแล้ว การกำหนดลำดับจำเป็นต้องใช้วิธีการบอกเงื่อนไขของลำดับหรือสมบัติของพจน์ของลำดับ ตัวอย่างเช่น

- 1) a_n เป็นจำนวนเฉพาะตัวที่ n คือลำดับ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...
- 2) b_n เป็นทศนิยมตำแหน่งที่ n ของ π คือลำดับ 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, ...



แบบฝึกหัด 1.1.1

1. จงหาสี่พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

$$1) \quad a_n = 2n + 5$$

$$2) \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$3) \quad a_n = (-2)^n$$

$$4) \quad a_n = \frac{n+1}{n}$$

$$5) \quad a_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$$

$$6) \quad a_n = \frac{2^n}{3^n}$$

$$7) \quad a_n = (n-1)(n+1)$$

$$8) \quad a_n = n(n-1)(n-2)$$

2. จงหาหำพจน์แรกของลำดับ a_n ที่กำหนดโดยใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดต่อไปนี้
- 1) $a_1 = 0$ และ $a_n = a_{n-1} + n - 1$ เมื่อ $n \geq 2$
 - 2) $a_1 = 1,000$ และ $a_n = 1 + (0.05)a_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 2$
 - 3) $a_1 = 2$ และ $a_n = 6a_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 2$
 - 4) $a_1 = 1, a_2 = 2$ และ $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$
 - 5) $a_1 = 2, a_2 = 0$ และ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$
3. จงหาเจ็ดพจน์แรกของลำดับของจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 2 และ 7 ลงตัว โดยเรียงจากน้อยไปมาก

1.1.2 ลำดับเลขคณิต

พิจารณาลำดับ 4, 6, 8, 10, 12 จะเห็นว่าแต่ละพจน์ได้จากการบวกพจน์ก่อนหน้าที่อยู่ติดกันด้วย 2 หรือพจน์หลังลบด้วยพจน์หน้าที่อยู่ติดกันเป็นค่าคงตัวเท่ากับ 2 เสมอ นั่นคือ $6 - 4 = 8 - 6 = 10 - 8 = 12 - 10 = 2$ เรียกลำดับที่มีสมบัติเช่นนี้ว่า ลำดับเลขคณิต

บทนิยาม 2

ลำดับเลขคณิต (arithmetic sequence) คือ ลำดับซึ่งมีผลต่างที่ได้จากการนำพจน์ที่ $n + 1$ ลบด้วยพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นผลต่างนี้ว่า **ผลต่างร่วม (common difference)**

จากบทนิยาม ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ จะเป็นลำดับเลขคณิต ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงตัว d ที่ $a_{n+1} - a_n = d$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่างของลำดับเลขคณิต

- 1) $5, 10, 15, 20, 25, \dots, 5n, \dots$ ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิตที่มี 5 เป็นผลต่างร่วม
- 2) $1, 1, 1, 1, \dots$ ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิตที่มี 0 เป็นผลต่างร่วม
- 3) $5, 3, 1, -1, -3, \dots$ ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิตที่มี -2 เป็นผลต่างร่วม

นอกจากนี้ยังสามารถกำหนดลำดับเลขคณิต $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ได้ดังนี้
 จาก $a_{n+1} - a_n = d$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $a_{n+1} = a_n + d$
 ให้ a_1 และ d เป็นค่าคงตัว จะได้

$$\begin{aligned}
 a_2 &= a_1 + d \\
 a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\
 a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \\
 &\vdots \\
 a_n &= a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d
 \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$ เมื่อ a_1 เป็นพจน์แรก และ d เป็นผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 5

จงเขียนสี่พจน์ถัดไปของลำดับเลขคณิต $-1, 6, 13, \dots$

วิธีทำ จากลำดับเลขคณิต $-1, 6, 13, \dots$ ถ้าให้ d เป็นผลต่างร่วม

จะได้ $d = 6 - (-1) = 7$ และเนื่องจาก $a_3 = 13$

จะได้ $a_4 = a_3 + d = 13 + 7 = 20$

$$a_5 = a_4 + d = 20 + 7 = 27$$

$$a_6 = a_5 + d = 27 + 7 = 34$$

$$a_7 = a_6 + d = 34 + 7 = 41$$

ดังนั้น สี่พจน์ถัดไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $20, 27, 34$ และ 41

ตัวอย่างที่ 6

ถ้าลำดับเลขคณิตมี $a_1 = 22$ และ $a_2 = 35$ จงหาพจน์ที่ 100 ของลำดับนี้

วิธีทำ เนื่องจาก $a_1 = 22$ และ $a_2 = 35$ ดังนั้น ผลต่างร่วม คือ $d = 35 - 22 = 13$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d \text{ จะได้ } a_{100} = 22 + (100-1)(13) = 1,309$$

นั่นคือ พจน์ที่ 100 ของลำดับนี้ คือ 1,309

ตัวอย่างที่ 7

จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต 6, 2, -2, -6, ...

วิธีทำ จากลำดับเลขคณิต 6, 2, -2, -6, ... จะได้ $a_1 = 6$ และ $d = 2 - 6 = -4$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ } a_n = 6 + (n-1)(-4)$$

$$= 6 - 4n + 4$$

$$= 10 - 4n$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $10 - 4n$

ตัวอย่างที่ 8

ถ้าลำดับเลขคณิตมีพจน์ที่ 5 คือ 3 และพจน์ที่ 10 คือ 13 จงหาพจน์ที่ 100

$$\text{วิธีทำ จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ } 3 = a_1 + (5-1)d \quad \text{----- (1)}$$

$$\text{และ } 13 = a_1 + (10-1)d \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = 2$ และ $a_1 = -5$

$$\text{ดังนั้น } a_{100} = -5 + (100-1)(2) = 193$$

นั่นคือ พจน์ที่ 100 ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 193

ตัวอย่างที่ 9

ถ้า 6 และ 10 เป็นพจน์สองพจน์ของลำดับเลขคณิตที่มีพจน์อีกหนึ่งพจน์อยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองนี้ จงหาพจน์ที่อยู่ระหว่างพจน์ทั้งสองนี้

วิธีทำ ให้ a เป็นพจน์ที่อยู่ระหว่าง 6 และ 10 จะได้ 6, a , 10 เป็นลำดับเลขคณิต

$$\text{นั่นคือ } a - 6 = 10 - a$$

$$2a = 16$$

$$a = 8$$

ดังนั้น พจน์ที่อยู่ระหว่าง 6 และ 10 คือ 8

ตัวอย่างที่ 10

จงหาว่าจำนวนนับที่มากกว่า 7 แต่น้อยกว่า 1,610 ซึ่งหารด้วย 6 ลงตัว มีทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ จำนวนนับที่น้อยที่สุดที่มากกว่า 7 ซึ่งหารด้วย 6 ลงตัว คือ 12

เนื่องจาก 1,610 หารด้วย 6 ได้ผลหารเป็น 268 และได้เศษเป็น 2 ดังนั้น จำนวนนับที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 1,610 ซึ่งหารด้วย 6 ลงตัว คือ $1,610 - 2$ หรือ 1,608

จะได้ว่าลำดับของจำนวนนับที่มากกว่า 7 แต่น้อยกว่า 1,610 ซึ่งหารด้วย 6 ลงตัว เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 12 ผลต่างร่วมเป็น 6 และพจน์ที่ n เป็น 1,608

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ } 1,608 = 12 + (n-1)(6)$$

$$1,608 = 12 + 6n - 6$$

$$6n = 1,602$$

$$n = 267$$

ดังนั้น จำนวนนับที่มากกว่า 7 แต่น้อยกว่า 1,610 ซึ่งหารด้วย 6 ลงตัว มีทั้งหมด 267 จำนวน

ตัวอย่างที่ 11

นภาเริ่มต้นทำงานที่บริษัทแห่งหนึ่ง ในปีแรก นภาได้รับเงินเดือนเดือนละ 15,000 บาท ถ้านภาได้รับเงินเดือนเพิ่มขึ้นปีละ 300 บาท จงหาว่าในอีก 10 ปีข้างหน้า นภาจะได้รับเงินเดือนเดือนละเท่าใด

วิธีทำ เขียนลำดับเลขคณิตแทนเงินเดือนที่นภาได้รับแต่ละปีได้ดังนี้

$$15000, 15300, 15600, \dots, a_{11}$$

ลำดับที่ได้เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 15,000 และมีผลต่างร่วมเป็น 300

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ } a_{11} = 15,000 + (11-1)(300) = 18,000$$

ดังนั้น ในอีก 10 ปีข้างหน้า นภาจะได้รับเงินเดือนเดือนละ 18,000 บาท

ตัวอย่างที่ 12

กำหนดลำดับเลขคณิต 1, 4, 7, 10, 13, ... จงพิจารณาว่า 12,345 อยู่ในลำดับนี้หรือไม่

วิธีทำ ลำดับเลขคณิตที่กำหนดให้มีพจน์แรกเป็น 1 และมีผลต่างร่วมเป็น 3

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d \text{ จะได้ } a_1 = 1 \text{ และ } d = 3$$

ถ้า 12,345 เป็นพจน์ของลำดับนี้ จะได้ว่าเมื่อแทน a_n ใน $a_n = a_1 + (n-1)d$

ด้วย 12,345 แล้ว n ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก

$$\text{จะได้ } 12,345 = 1 + (n-1)(3)$$

$$= 1 + 3n - 3$$

$$= 3n - 2$$

$$\text{นั่นคือ } n = \frac{12,345 + 2}{3} = 4,115\frac{2}{3} \text{ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

ดังนั้น 12,345 ไม่อยู่ในลำดับนี้