



สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

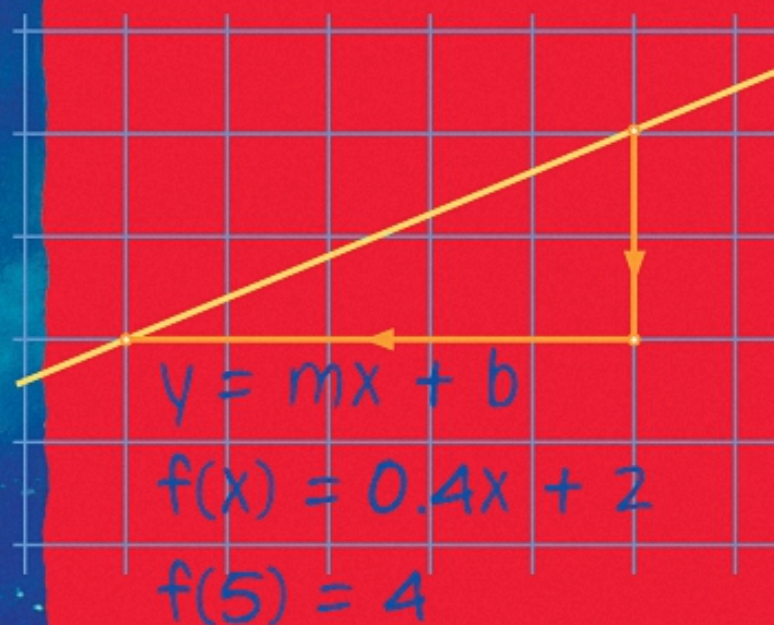
การสำรวจ

พีชคณิต



ด้วย

THE GEOMETER'S
SKETCHPAD®



STEVEN CHANAN
ERIC BERGOFSKY
DAN BENNET



การสำรวจ

พีชคณิต

ด้วย

THE GEOMETER'S
SKETCHPAD®



STEVEN CHANAN
ERIC VERGOFISKY
DAN BENNETT



สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ



Key Curriculum Press
Innovators in Mathematics Education

การสำรวจพีชคณิต ด้วย The Geometer's Sketchpad

แปลและเรียบเรียงจาก : Exploring Algebra with The Geometer's Sketchpad โดย Steven Chanan,
Eric Bergofsky, Dan Bennet

แปลและเรียบเรียงโดย : สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

พิมพ์ครั้งที่ 1 : กันยายน 2552 จำนวน 1,000 เล่ม

หนังสือ Exploring Algebra with the Geometer's Sketchpad เป็นลิขสิทธิ์ของ Key Curriculum Press แต่เพียงผู้เดียว

หนังสือการสำรวจพีชคณิต ด้วย The Geometer's Sketchpad และโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ฉบับภาษาไทยเป็นลิขสิทธิ์ของ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) แต่เพียงผู้เดียว

การอนุญาตให้ทำสำเนาโดยมีเงื่อนไขจำกัด

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) อนุญาตให้ผู้สอนที่ซื้อหนังสือการสำรวจพีชคณิต ด้วย The Geometer's Sketchpad มีสิทธิ์ทำสำเนากิจกรรมและแบบร่างตัวอย่างสำหรับใช้กับผู้เรียนเท่านั้น การคัดลอกหนังสือการสำรวจพีชคณิต ด้วย The Geometer's Sketchpad หรือแบบร่างของการสำรวจพีชคณิต โดยไม่ได้รับอนุญาตมีความผิดตามกฎหมาย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

924 ถ.สุขุมวิท เขตคลองเตย กรุงเทพฯ 10110 www3.ipst.ac.th

จัดพิมพ์และจัดจำหน่าย

ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

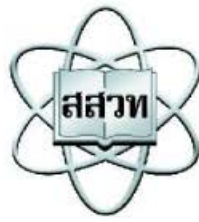
อาคารวิทยกิตติ์ ชั้น 14 ซอย จุฬาลงกรณ์ 64 ถนน พญาไท

แขวง วังใหม่ เขต ปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

โทรศัพท์ 0-2255-4433, 0-2218-9891

Website : [http : // www.chulabook.com](http://www.chulabook.com)

ISBN 978-616-7235-05-9



คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ตระหนักในความสำคัญของการใช้เทคโนโลยีช่วยในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน เพื่อให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น มีเจตคติที่ดีในการเรียนรู้ เรียนรู้อย่างมีความหมาย เกิดการพัฒนาทักษะด้านเทคโนโลยีสารสนเทศ และสามารถนำไปใช้ในการเรียนรู้ตลอดชีวิต ซึ่งเป็นไปตามพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พุทธศักราช 2542

สสวท. จึงได้แปลหนังสือการสำรวจพีชคณิต ด้วย The Geometer's Sketchpad ขึ้นเพื่อช่วยครูคณิตศาสตร์ในการค้นคว้าเพิ่มเติม และนำแนวคิดที่ได้ไปบูรณาการกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นและมัธยมศึกษาตอนปลายสำหรับนักเรียนที่สนใจ ได้อย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนั้นหนังสือเล่มนี้ยังจะช่วยให้นักเรียนที่สามารถศึกษาด้วยตนเอง สามารถเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติมจากชั้นเรียนได้ตามความสนใจ ส่งผลให้มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ มีทักษะในการจินตนาการ เกิดทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง ตามความสามารถของตน ซึ่งสอดคล้องกับการจัดการเรียนรู้ที่สนับสนุนการพัฒนาการตามความแตกต่างระหว่างบุคคล นอกจากนี้ นักเรียนยังสามารถมีปฏิสัมพันธ์กับสื่อการสอนที่สร้างไว้ให้แล้ว

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี หวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือ การสำรวจพีชคณิต ด้วย The Geometer's Sketchpad นี้จะเป็นประโยชน์แก่นักศึกษาคณิตศาสตร์ในมหาวิทยาลัย ครูคณิตศาสตร์และนักเรียน ตลอดจนผู้เกี่ยวข้องกับการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์ทุกท่าน

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สารบัญ

บทนำ	v
Sketchpad มาจากไหน	vi
การใช้กิจกรรมการสำรวจพืชชนิด.....	vii
การจัดกิจกรรมในชั้นเรียน	ix
ความเข้าใจส่วนใหญ่ได้มาจากการเขียนตอบคำถาม.....	xiii
การใช้โปรแกรม Sketchpad ในห้องเรียนแบบต่างๆ.....	xiv
คำสั่งพื้นฐานและคำสั่งลัด.....	xvii

บทที่ 1 : พืชชนิดเบื้องต้น

การบวกจำนวนเต็ม	3
การลบจำนวนเต็ม	6
หลากหลายแบบจำลองของการคูณ	9
เครื่องคูณเมทริกซ์ของรัช	12
การสำรวจสมบัติของการดำเนินการทางเลขคณิตทั้งสี่.....	16
แนะนำระนาบพิกัด	18
นิพจน์ที่สมมูลกัน : โจทย์ปัญหาทางเดินรอบแปลงดอกไม้.....	22
สมบัติการแจกแจง : สระว่ายน้ำ	24
การกระจายผลคูณของสองทวินาม.....	27
การแยกตัวประกอบของตรีนาม	29
กำลังสองและรากที่สอง	31
บทที่ 1 แนวคิดการทำโครงการ	33

บทที่ 2 : ความชันและเส้นตรง

จุด “การเรียงแถว” ในระนาบ.....	37
ความชันของเส้นตรง.....	40
เกมความชัน	42
วัดความชันอย่างไร.....	43
ความชันของเส้นขนานและเส้นตั้งฉาก	45
การแปรผันตรง	47
เส้นตรงที่อยู่ในรูปแบบ ความชัน-ระยะตัดแกน	50
เส้นตรงที่อยู่ในรูปแบบ จุด-ความชัน	53
เส้นตรงที่อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน.....	55
การแก้ระบบสมการ	57
ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ และ กราฟตัววี	60
หงส์และยิราฟ : รู้จักกับกำหนดการเชิงเส้น	62
การเดินทางของมด : แบบจำลองการเคลื่อนที่เชิงเส้น	66
บทที่ 2 แนวคิดการทำโครงการ	69



บทที่ 3 : พาราโบล่าและสมการกำลังสอง

มดยักร้อยยู่หนใด	73
พาราโบล่าในรูปแบบของจุดยอด	76
การสำรวจพาราโบล่าในรูปแบบของจุดยอด	79
พาราโบล่าในรูปแบบการแยกตัวประกอบ	81
พาราโบล่าในรูปแบบมาตรฐาน	84
พาราโบล่า : ใช้วิธีทางเรขาคณิต	87
การสร้างคอมพิวเตอร์และจานดาวเทียม	90
บทที่ 3 แนวคิดการทำโครงการ	93

บทที่ 4 : ฟังก์ชัน

ฟังก์ชันเส้นรอบวง	97
ฟังก์ชันของรูปสามเหลี่ยม	100
เรขาคณิตเชิงฟังก์ชัน	102
การแสดงฟังก์ชันอย่างพลวัต : แนะนำกราฟรางเลื่อน.....	104
จากกราฟรางเลื่อนสู่กราฟคาร์ทีเซียน	107
สำรวจโดเมนและเรนจ์ด้วยกราฟรางเลื่อนและกราฟคาร์ทีเซียน	110
สำรวจฟังก์ชันสี่และฟังก์ชันคู่ด้วยกราฟรางเลื่อนและกราฟคาร์ทีเซียน.....	113
การสำรวจฟังก์ชันประกอบด้วยกราฟรางเลื่อน.....	115
การคิดที่แตกต่าง : ทำแล้วทำอีก	117
บทที่ 4 แนวคิดการทำโครงการ	121

บทที่ 5 : การแปลงและเวกเตอร์

การเลื่อนขนานในระนาบพิกัด	125
การหมุนในระนาบพิกัด	127
การสะท้อนในเรขาคณิตและพีชคณิต	129
การสะท้อนกราฟของฟังก์ชัน	132
การสะท้อนที่ไม่มีค่าส่งสะท้อน : พีชคณิตของการสะท้อน	134
การเดินของเร็กซ์ : แนะนำเวกเตอร์	137
การบวกและการลบเวกเตอร์	140
บทที่ 5 แนวคิดการทำโครงการ	143

บันทึกกิจกรรม

บทที่ 1 : พีชคณิตเบื้องต้น	147
บทที่ 2 : ความชันและเส้นตรง	161
บทที่ 3 : พาราโบล่าและสมการกำลังสอง	174
บทที่ 4 : ฟังก์ชัน	181
บทที่ 5 : การแปลงและเวกเตอร์	192

บทนำ

ถ้าชื่อบอกเรื่องราวทั้งหมดได้ The Geometer's Sketchpad® จะบรรลุเป้าหมายที่ชัดเจนอย่างหนึ่งคือ ช่วยในการเรียนเรขาคณิต อย่างไรก็ตามบางครั้งซอฟต์แวร์ต่าง ๆ ก็มีความสามารถเกินกว่าชื่อ ตั้งแต่ได้มีการแนะนำ Sketchpad™ มาเป็นระยะเวลา 11 ปี โปรแกรมก็สมบูรณ์ ครูผู้สอนได้ใช้ความสามารถของ Sketchpad ในทางคณิตศาสตร์แบบที่ไม่คาดคิดมาก่อน ในที่สุดเมื่อมีหนังสือเล่มนี้ ก็ทำให้รู้ว่า The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือที่ยอดเยี่ยมสำหรับการสำรวจพีชคณิตเช่นเดียวกับเรขาคณิต

ในอีกแง่หนึ่งการเปิดเผยความจริงนี้ก็ไม่น่าตื่นเต้น มาร์ติน การ์ดเนอร์ ได้อธิบายธรรมชาติซึ่งเป็นองค์ประกอบของพีชคณิตและเรขาคณิตดังนี้ :

ไม่มีสื่อที่มีประสิทธิภาพที่ช่วยในการทำความเข้าใจเอกลักษณ์ทางพีชคณิตได้ดีกว่าแผนภาพที่ดี นั่นเองที่เราควรใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตเพื่อการพิสูจน์ แต่ในหลายกรณีการพิสูจน์ที่นำเสนอสมาสามารถเสริมโดยใช้การอุปมาทางเรขาคณิตที่ง่ายและสวยงามกว่า ซึ่งช่วยให้สามารถรับรู้และเข้าใจความจริงเกี่ยวกับบทฤษฎีได้ในเวลาอันรวดเร็ว (Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainment [New York: W. H. Freeman and Company, 1986], 192)

คำพูดของการ์ดเนอร์ได้รับการตีพิมพ์ก่อนที่จะเทคโนโลยีจะหลั่งไหลเข้าไปในห้องเรียนคณิตศาสตร์ ในกลางศตวรรษ 1980 เครื่องคิดเลขกราฟิกได้กลายเป็นสะพานเชื่อมระหว่างสัญลักษณ์นิยมของสมการพีชคณิตและลักษณะของกราฟของสมการที่มองเห็น

Sketchpad เวอร์ชัน 4 ได้เพิ่มความสามารถจากที่มีอยู่ในเครื่องคิดเลขกราฟิก เราจะพบตัวอย่างของกราฟและสมการ "พลวัต" แบบปฏิสัมพันธ์มากมายตลอดในหนังสือเล่มนี้ แต่ในการรวบรวม algebra collection เราพบว่า Sketchpad สามารถให้โอกาสในการเรียนรู้ซึ่งเครื่องคิดเลขกราฟิกไม่สามารถให้ได้ ต่อไปนี้เป็นบางส่วนของคำถามเชิงพีชคณิตและเชิงตัวเลขที่โปรแกรม Sketchpad เปิดโอกาสให้ศึกษา:

- การจำลองสมบัติการแจกแจงของการคูณด้วยกระเบื้องพีชคณิตเสมือนจะได้อธิบายเป็นอย่างไร
- มีวิธีการทางเรขาคณิตที่จะคำนวณหา ห.ร.ม. ของจำนวนเต็มสองจำนวนหรือไม่
- จะสามารถสำรวจรากที่สองและจำนวนอตรรกยะบนกริด Sketchpad ได้อย่างไร
- สมบัติอะไรของฟังก์ชันที่มองเห็นได้ชัดเจนเมื่อแสดงกราฟของฟังก์ชันบนระบบพิกัดที่มีแกน x และ y ขนานซึ่งกันและกัน
- สมบัติอะไรทางพีชคณิต/เรขาคณิตของเวกเตอร์ที่สามารถอนุมานได้จากการปฏิสัมพันธ์กับแบบจำลองของ Sketchpad

กิจกรรมในหนังสือเล่มนี้ครอบคลุมเนื้อหาหลักของรายวิชาพีชคณิตเบื้องต้น เช่น สมบัติของจำนวน เส้นตรง กราฟ พังก์ชัน การแปลง และการแยกตัวประกอบพหุนาม หัวข้อในขั้นสูงกว่าก็มีการแนะนำด้วยเหมือนกัน รวมทั้งเรื่องกำลังสอง กำหนดการเชิงเส้น และเวกเตอร์

แต่ละกิจกรรมจะเน้นแบบจำลองที่มองเห็นเป็นพลวัต มีหลายกรณีนักเรียนได้ใช้แบบร่างที่จัดทำไว้ให้เรียบร้อยแล้วในซีดี-รอม บางคราวนักเรียนอาจจะต้องสร้างแบบร่างเองตั้งแต่ต้นซึ่งจะได้ประโยชน์อย่างลึกซึ้งถึงรากฐานของแบบร่างทางพีชคณิตของนักเรียนเอง

ในที่นี้กิจกรรมเหล่านี้จะเป็นตัวอย่างใช้คู่กับหนังสือพีชคณิต ซึ่งพร้อมสำหรับการใช้งานจริงในโอกาสต่าง ๆ เช่น เมื่อเราจะสำรวจบทเรียนใดบทเรียนหนึ่งโดยใช้คอมพิวเตอร์ หรือเมื่อนักเรียนของเราเริ่มซักชวนกันก้าวสู่ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ หรือสำหรับวันที่เราต้องการทดลองบางสิ่งบางอย่างที่แตกต่างออกไป แบบร่างหลายแบบร่างสามารถใช้สร้างเป็นแบบจำลองเพื่อสาธิตโดยดูจากคอมพิวเตอร์หนึ่งเครื่องกับเครื่องฉาย โดยไม่ต้องออกไปนอกห้องเรียน

ไม่ว่าท่านจะเป็นครูหรือนักเรียน เราคิดว่ากิจกรรมที่อยู่ในหนังสือเล่มนี้จะเปลี่ยนวิธีคิดเกี่ยวกับพีชคณิตได้ อย่างไรก็ตามชื่อ The Geometer's Sketchpad ก็ยังคงจะเป็นเช่นนั้นต่อไป แต่ก็อย่าประหลาดใจถ้าเราเริ่มจะคิดว่าชื่อของมันจะเป็น The Mathematician's Sketchpad™

Sketchpad มาจากไหน

The Geometer's Sketchpad ได้รับการพัฒนาเป็นส่วนหนึ่งของ Visual Geometry Project ซึ่งเป็นโครงการที่ได้รับการสนับสนุนจาก National Science Foundation ภายใต้การอำนวยการของ Dr. Eugene Klotz จาก Swarthmore College และ Dr. Doris Schattschneider จาก Moravian College ในมลรัฐ Pennsylvania Nicholas Jackiw ผู้สร้างและผู้พัฒนาโปรแกรม Sketchpad ได้พัฒนา Sketchpad รุ่นแรกขึ้นภายใต้สภาวะแวดล้อมทางการศึกษาแบบเปิด โดยมีครู นักวิจัยและผู้ใช้งานเป็นผู้ให้ข้อมูลในการออกแบบ ทำให้ Sketchpad ได้รับการพัฒนา สร้างกระแสดอกรับอย่างล้นหลามและกระตือรือร้นกับโปรแกรมนี้ ในฤดูใบไม้ผลิของปี 1991 Key Curriculum Press ได้เปิดตัว Sketchpad ในเวลานั้นมีครู นักเรียน และผู้รักเรขาคณิตหลายร้อยคนใช้ Sketchpad และส่วนใหญ่ได้พูดถึงเรื่องราวของ Sketchpad และรอยคอซอฟต์แวร์คณิตศาสตร์นี้สำหรับโรงเรียนในยุคตมคติ

จากนั้น Key Curriculum Press ได้พัฒนาอย่างต่อเนื่องเพื่อศึกษาว่าโปรแกรม Sketchpad จะสามารถใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพในโรงเรียนได้อย่างไร โดยได้รับเงินสนับสนุนบางส่วนจาก National Science Foundation ผลของการวิจัยนี้ปรากฏอยู่ในหนังสือและเอกสารหลักสูตรเหล่านี้และยังดำเนินการพัฒนา Sketchpad ต่อไปอย่างไม่หยุดยั้ง ผลการสำรวจครู อาจารย์ระดับประเทศในปี 1999 ซึ่งจัดทำโดย the University of California, Irvine พบว่าครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ทั่วประเทศส่วนใหญ่จัดอันดับให้โปรแกรม Sketchpad เป็น “โปรแกรมที่มีคุณค่ากับนักเรียนมากที่สุด”

ในตอนเริ่มแรก The Geometer's Sketchpad ได้รับการออกแบบสำหรับใช้เรียนเรขาคณิตในโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย ถึงแม้ว่าการทดลองจะแสดงว่าโปรแกรม Sketchpad ใช้ได้ง่าย ทำให้เป็นไปได้ที่จะให้เด็กนักเรียนใช้ Sketchpad อย่างได้ผล และลักษณะเด่นของ Sketchpad ทำให้ดึงดูดความสนใจจากครูคณิตศาสตร์และครูที่สอนวิชาการศึกษาในระดับวิทยาลัย หนังสือ *การสำรวจพืชคณิต* ในตอนแรกได้ออกแบบสำหรับการเรียนพืชคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนปลายชั้นปีที่หนึ่ง ยังมีหน่วยการเรียนรู้ของหลักสูตรอื่น ๆ จาก Key Curriculum Press ที่เตรียมไว้สำหรับเด็กนักเรียนที่เล็กกว่าหรือโตกว่า อย่างไรก็ตามเราจะเห็นว่าหลายกิจกรรมในที่นี้สามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้ไม่ว่าเราจะสอนพืชคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น หรือ Pre-algebra หรือ Algebra 2 หรือสอนนิสิตนักศึกษาที่เรียนพืชคณิตในระดับวิทยาลัย

ลักษณะเด่นของกิจกรรมที่เป็นตัวอย่าง

กิจกรรมที่เป็นตัวอย่างประกอบด้วยสามส่วนหลักๆ คือ ส่วนนำซึ่งอธิบายจุดประสงค์ของกิจกรรมและสร้างแรงจูงใจและบริบท ส่วนที่สองเป็นหัวข้อแบบร่างและการสืบเสาะซึ่งนักเรียนต้องสร้างตามขั้นตอนและตอบคำถาม และส่วนสุดท้ายเป็นหัวข้อสำรวจเพิ่มเติมซึ่งเป็นส่วนขยายต่อการสืบเสาะที่เป็นไปได้

คำถามในแต่ละกิจกรรมมีตั้งแต่ตอบคำถามสั้นๆ เติมข้อความในช่องว่างไปจนถึงการเขียนตอบแบบบรรยาย ที่ว่างสำหรับการเขียนตอบได้จัดไว้ให้ในใบงานกิจกรรม แต่ในบางกรณีนักเรียนอาจต้องเขียนเพิ่มในกระดาษอีกแผ่น

ในกิจกรรมที่ไม่มีส่วนนำ ส่วนใหญ่เป็นการอธิบายในแบบคณิตศาสตร์ ขั้นตอนการสร้างจะไม่ใช่คำสั่งและการกระทำใน Sketchpad คำแนะนำจะรวบรัดกว่าและทำให้นักเรียนจดจ่ออยู่กับพืชคณิตแทนที่จะสนใจในรายละเอียดของการใช้ซอฟต์แวร์ซึ่งเป็นสิ่งเกินความจำเป็นขณะที่นักเรียนกำลังเรียนรู้ สำหรับนักเรียนที่ต้องการความช่วยเหลือเป็นพิเศษในการใช้ซอฟต์แวร์ คำแนะนำมีอยู่ในขอบทางซ้ายของหน้าต่างกระดาษ ในบางกรณีคำแนะนำเพิ่มเติมรวมอยู่ในบันทึกกิจกรรมของกิจกรรมนั้นแล้ว (ในตอนท้ายของหนังสือ) ในหัวข้อย่อย *แนะนำการสร้าง*

คำแนะนำในหัวข้อสำรวจเพิ่มเติมเป็นกิจกรรมท้าทายที่ดีมาก นักเรียนที่ทำกิจกรรมเสร็จก่อนสามารถเริ่มทำคำถามในการสำรวจเพิ่มเติม แต่คาดว่าคำถามเหล่านี้หลายคำถามอาจใช้เป็นโครงงานระยะยาว บางครั้งเราอาจต้องเตรียมหนึ่งในคำถามเหล่านี้เพื่อสาธิตให้นักเรียนดู นอกจากคำแนะนำที่นำมาในหัวข้อสำรวจเพิ่มเติม คำแนะนำอื่นๆ ได้รวบรวมไว้ในหัวข้อแนวคิดโครงงานซึ่งอยู่ตอนท้ายของแต่ละบท

บันทึกกิจกรรม

บันทึกกิจกรรมได้รวบรวมไว้เป็นบทสุดท้ายของหนังสือ และมีคำตอบของคำถามที่มีในกิจกรรม นอกจากนี้ในบันทึกกิจกรรมยังเสนอข้อมูลเกี่ยวกับผู้ฟังที่เป็นนักเรียนซึ่งจะใช้กิจกรรมนั้น ๆ ความรู้พื้นฐานทางพีชคณิตและคำศัพท์ที่นักเรียนควรรู้มาก่อน ระดับความเชี่ยวชาญของการใช้งาน Sketchpad ที่ต้องการ ที่ได้ที่คาดว่านักเรียนอาจพบกับความยุ่งยาก เวลาที่ใช้ในชั้นเรียนนานเท่าไรแบบร่างและเครื่องมือกำหนดเองใดที่ให้มาพร้อมกับกิจกรรมในซีดี-รอม

บันทึกกิจกรรมยังใช้เป็นแหล่งสำหรับเรื่องสัพเพเหระที่ดีทั้งหมดซึ่งไม่เหมาะสมสำหรับใส่ในเนื้อหาหลัก เราจะพบการเชื่อมต่อทางคณิตศาสตร์ ความจริงที่น่าสนใจ และความลึกซึ้งเชิงการสอนในโครงสร้างของกิจกรรม

ลักษณะเฉพาะของผู้ฟังที่เป็นนักเรียน มีดังนี้:

- **พีชคณิตเบื้องต้น/พีชคณิต 1:** กิจกรรมเหล่านี้โดยทั่วไปส่วนใหญ่เหมาะสำหรับนักเรียนที่เรียนพีชคณิตเบื้องต้น และใช้เป็นกิจกรรมทบทวนสำหรับนักเรียนที่เรียนพีชคณิต 1
- **พีชคณิต 1:** กิจกรรมเหล่านี้โดยทั่วไปส่วนใหญ่เหมาะสำหรับนักเรียนที่เรียนพีชคณิต 1 บางกิจกรรมอาจเหมาะสำหรับนักเรียนที่เรียนพีชคณิตเบื้องต้นขั้นสูง และใช้เป็นกิจกรรมทบทวนสำหรับนักเรียนที่เรียนพีชคณิต 2 กิจกรรมส่วนใหญ่ของหนังสือเล่มนี้จัดอยู่ในประเภทนี้
- **พีชคณิต 1/พีชคณิต 2:** กิจกรรมเหล่านี้โดยทั่วไปส่วนใหญ่เหมาะสำหรับนักเรียนที่เรียนพีชคณิต 1 และนักเรียนที่เรียนพีชคณิต 2

ความเชี่ยวชาญ Sketchpad แบ่งเป็นสามระดับ:

- **ระดับเริ่มต้น:** กิจกรรมทั้งหมด รวมทั้งกิจกรรมที่ระบุเป็นกิจกรรมสำหรับผู้เริ่มต้น คาดว่าผู้ใช้มีความรู้พื้นฐานการใช้คอมพิวเตอร์ทั่วไปและการใช้ Sketchpad ในเรื่อง : การคลิก การลาก การเลือก การใช้เมนู (สร้างและการวัด) และการเปิด/ปิดเอกสาร กิจกรรมที่ระบุสำหรับผู้เริ่มต้น โดยปกตินักเรียนเริ่มต้นด้วยแบบร่างที่ทำไว้ให้ล่วงหน้าและบ่อยครั้งที่ต้องการให้มีความเชี่ยวชาญ Sketchpad อีกเล็กน้อยมากกว่าความสามารถในการลากอ็อบเจกต์ไปรอบๆ และสังเกตการเปลี่ยนแปลง
- **ระดับปานกลาง :** ในกิจกรรมเหล่านี้ ผู้ใช้ต้องทำงานเกี่ยวกับ Sketchpad มากขึ้นเช่น การใช้กล่องเครื่องมือ และเมนูคำสั่งพื้นฐาน (โดยเฉพาะอย่างยิ่งในเมนูแสดงผล สร้าง และการแปลง) กิจกรรมเหล่านี้ไม่จำเป็นต้องยาก มีคำสั่งอย่างละเอียดได้ให้ไว้เกือบทุกขั้นตอน แต่ผู้ที่เริ่มหัดใช้อาจต้องใช้เวลานานเพื่อหาคำสั่งต่างๆ (ผู้ใช้อาจได้รับการพิจารณาเป็นผู้ที่มีความเชี่ยวชาญ Sketchpad ระดับกลาง หลังจากการใช้โปรแกรมสักสองสามครั้ง)
- **ระดับสูง :** กิจกรรมเหล่านี้เป็นกิจกรรมสำหรับนักเรียนที่มีความคล่องคล่องกับพื้นฐานของ Sketchpad และบางครั้งต้องรู้ลักษณะสำคัญขั้นสูงหลายอย่างเป็นอย่างดี นักเรียนเหล่านี้สามารถใช้คำสั่งที่ซับซ้อน สามารถควบคุมเมาส์ได้ดี ใช้เทคนิคการเลือกขั้นสูง การเคลื่อนไหว

และใช้ทางลัดด้วยแป้นพิมพ์ได้ ในการลองทำกิจกรรมดังที่ระบุนักเรียนไม่จำเป็นต้องมีความเชี่ยวชาญระดับสูงเช่นนั้น แต่นักเรียนจะพบว่าต้องใช้เวลานานหรือรู้สึกเบื่อนำรำคาญเพราะว่าเขาขาดประสบการณ์ที่จำเป็นในการทำกิจกรรมอย่างมีประสิทธิภาพ

เวลาที่ใช้ทำกิจกรรม ขึ้นอยู่กับเวลาที่เราต้องการให้นักเรียนใช้เขียน สนทนา และนำเสนอเกี่ยวกับสิ่งที่ค้นพบ ไม่มีกิจกรรมใดที่ออกแบบให้ใช้เวลานานกว่าหนึ่งคาบการเรียนรู้ 45 นาที บนคอมพิวเตอร์ แต่เราอาจเลือกที่จะใช้เวลาสองสามวันพูดเกี่ยวกับการสืบเสาะหนึ่งเรื่อง เวลาที่ใช้ทำกิจกรรมที่แนะนำในบันทึกนี้รวมเวลาที่ใช้ในการสร้าง การจัดการ การสังเกต คิด และเขียนข้อคาดการณ์หนึ่งข้อหรือมากกว่า เวลาที่แนะนำนี้ไม่รวมเวลาสำหรับการอภิปรายเพิ่มเติม การนำเสนอ หรือการขยายกิจกรรม

การจัดกิจกรรมในชั้นเรียน

เพื่อให้สามารถปรับการทำกิจกรรมได้ตามวิธีการสอนของครูหรือวิธีการเรียนของนักเรียนได้ หลากหลายรูปแบบ ดังนั้นการนำเสนอกิจกรรมในหนังสือเล่มนี้จึงเสนออย่างตรงไปตรงมาคงเส้นคงวา ไม่ซับซ้อน อย่างไรก็ตามความต้องการของแต่ละห้องเรียนแตกต่างกัน ครูเท่านั้นที่รู้และเข้าใจความต้องการของนักเรียนของตนเอง ในหัวข้อนี้จะแนะนำวิธีการจัดกิจกรรมเหล่านี้เพื่อให้เหมาะสมกับนักเรียน

ไม่ว่าจะถูกต้องหรือมีเหตุผลตามหลักคณิตศาสตร์หรือทางด้านการสอนอย่างไร กิจกรรมเสริมที่แยกออกมาจะทำให้ให้นักเรียนรู้สึกว่าเขาต้องเรียนรู้ทักษะหรือแนวคิดพิเศษโดยที่ไม่รู้ว่ามันสอดคล้องกับสิ่งที่เขารู้มาแล้วอย่างไร หรือมันมีความสำคัญอย่างไร หรือมันสัมพันธ์กับประสบการณ์เดิมและสิ่งที่เขาสนใจอย่างไร **การจัดกิจกรรม**หมายถึงการจัดการอย่างมีเหตุผลว่าทำไมแนวคิดบางอย่างจึงเกิดขึ้นและเกิดตรงไหน และมีความสำคัญอย่างไรทำไมจึงได้รับเลือก การจัดกิจกรรมยังเปิดโอกาสให้นักเรียนพิจารณาและถามคำถามเหล่านี้ โดยการจัดกิจกรรมที่สัมพันธ์กับชั้นเรียนของเรา เราต้องเชิญชวนนักเรียนให้เข้าสู่กระบวนการลงมือทำคณิตศาสตร์ (ได้แก่ การสังเกตความสัมพันธ์ การตั้งคำถาม การพิจารณาทางเลือกอื่น และการสื่อสารทางความคิด) มากกว่าเพียงแค่ทำตามเท่านั้น

กลยุทธ์สำหรับการจัดกิจกรรม

เทคนิคการจัดกิจกรรมมีประโยชน์ในการนำเข้าสู่บทเรียนของกิจกรรม การชี้แจงจุดมุ่งหมายที่จะนำไปสู่การพัฒนา จนกระทั่งสำเร็จซึ่งรวมทั้งการสรุปความและลงมือดำเนินการในแนวทางใหม่ เมื่อพิจารณาถึงวิธีการจัดกิจกรรมที่ดีที่สุดลองทำตามการแนะนำหนึ่งหรือสองกลยุทธ์ต่อไปนี้ (แน่นอน ไม่ใช่ทุกกลยุทธ์ที่จะประยุกต์ใช้ได้กับทุกกิจกรรม) ตัวอย่างที่อยู่ต่อจากคำแนะนำแต่ละข้อ เป็นกลยุทธ์ที่ใช้ได้กับกิจกรรมในหนังสือเล่มนี้ตั้งแต่หนึ่งกิจกรรมขึ้นไป

1. การนำเข้าสู่บทเรียน การเชื่อมโยงหัวข้อที่กำลังจะเรียนรู้เข้ากับแนวคิดที่ต้องการสร้างหรือกระตุ้นให้เกิดขึ้น หรือเชื่อมโยงเข้ากับเรื่องอื่นหรือประสบการณ์อื่น บางอย่างอาจง่ายเหมือนกับการเชื่อมโยงแนวคิดทางพีชคณิตย้อนกลับไปสู่เลขคณิต และการนับสามารถช่วยให้นักเรียนเปรียบเทียบและหาส่วนที่คล้ายกันระหว่างความรู้เรื่องอื่นๆ ซึ่งจะทำให้เกิดความเข้าใจอย่างลึกซึ้งที่น่าตื่นตาตื่นใจในแนวคิดที่เคยรู้มาแล้ว และทำให้ตระหนักถึงความต่อเนื่องของโครงสร้างที่รองรับด้วยคณิตศาสตร์ที่พวกเขา กำลังเรียนรู้

การคิดที่แตกต่าง: ทำแล้วทำอีก ก่อนเริ่มต้นกิจกรรมนี้ควรเตือนนักเรียนให้ระลึกว่ากระบวนการพื้นฐานของการนับ (หนึ่ง สอง สาม) เป็นการทำซ้ำ ที่เป็นกระบวนการของการบวกหนึ่งเข้ากับผลลัพธ์ก่อนหน้า ถามนักเรียนว่าเขาสามารถจินตนาการได้หรือไม่ว่ากระบวนการของการทำซ้ำสามารถใช้อธิบายความสัมพันธ์เชิงเส้นที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วอย่างไร การเชื่อมโยงระหว่างทักษะพื้นฐาน เช่นการนับ กับแนวความคิดที่เรียนรู้ใหม่ในพีชคณิตอาจทำให้นักเรียนประหลาดใจบ้างแต่จะช่วยให้นักเรียนเห็นด้วยว่าแนวคิดที่เหมือนกันมากนำไปใช้ในคณิตศาสตร์มากมาย

กำลังสองและรากที่สอง : นักเรียนอาจสงสัยว่ากิจกรรมนี้จะเกี่ยวข้องกับอะไรกับสิ่งที่กำลังเรียนรู้ นักเรียนได้รู้วิธี คูณ หหาร และอื่นๆ มาแล้วแต่ยังไม่รู้วิธีสำหรับการหารากที่สองได้โดยตรง ครูอาจต้องเตรียมหาประวัติรากกำลังที่สองและการค้นพบจำนวนอตรรกยะ นักเรียนส่วนใหญ่พบว่าเป็นเรื่องแปลกที่ทศนิยมของจำนวนอตรรกยะเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ ไม่สิ้นสุด แต่เราสามารถแทนจำนวนเช่นนั้นได้ด้วยส่วนของเส้นตรงที่มีความยาวจำกัด การแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับเรื่องนี้จะทำให้นักเรียนเชื่อมโยงความแปลกและความสวยงามของคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นสิ่งที่กระตุ้นให้นักคณิตศาสตร์ติดตามค้นหาเป็นเวลาหลายพันปี

2. เปิดโอกาสให้เสนอความคิด เปิดโอกาสให้นักเรียนออกมาทำบางสิ่งบางอย่างด้วยวิธีการของนักเรียนเองก่อนการนำเข้าสู่ “วิธีในหนังสือ” เมื่อนักเรียนเกิดความรู้สึกถึงความยุ่งยากของตนเองหรือเงื่อนไขบังคับของปัญหา นักเรียนจะรู้สึกมีส่วนร่วมมากขึ้นและขึ้นขอวิธีการที่ง่ายกว่าหรือดีกว่าซึ่งนักเรียนหรือเพื่อนร่วมชั้นเรียนคนอื่นๆ นำเสนอ

การสะท้อนโดยไม่มีคำสั่งสะท้อน ลองดูว่านักเรียนสามารถออกมาทำเกี่ยวกับการสะท้อนด้วยความคิดของเขาเองโดยไม่ใช้คำสั่งสะท้อนได้หรือไม่ สมมติว่าเรามีจุดสองจุดและต้องการหาเส้นสะท้อนที่ใช้ในการสะท้อนจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง จะทำได้อย่างไร กระตุ้นให้นักเรียนทำการทดลอง นักเรียนอาจสร้างข้อคาดเดาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างจุดสองจุดและเส้นตรง และเกิดความรู้สึกว่าเส้นตรงอยู่ตรงกลางของจุดทั้งสอง

3. การขยายปัญหา กระตุ้นนักเรียนให้ขยายความเข้าใจของสถานการณ์ปัญหา โดยการสร้างกรอบใหม่หรือตรวจสอบข้อจำกัดต่าง ๆ ของสถานการณ์ ค้นหาวิธีอื่น ๆ จากการนำเสนอปัญหาเดิมหรือพิจารณาเปลี่ยนแปลงบางส่วนของคำถาม การแปลความ และการกำหนดปัญหาซ้ำ ๆ จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจแก่นของคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ปัญหานั้น ๆ ได้ดีกว่า

มดยักร้อยยู่หนใด กิจกรรมนี้มุ่งเน้นไปที่การเปลี่ยนจากหนึ่งมิติไปสองมิติ (พื้นที่เปลี่ยนแปลงอย่างไรเทียบกับความยาว) แต่หลักการที่คล้ายกันนำไปสู่สามมิติ นักเรียนสามารถพิจารณาว่าอะไรจะเกิดขึ้นกับปริมาตรเมื่อความยาวหรือพื้นที่เปลี่ยนแปลง นักเรียนอาจคาดเดาเกี่ยวกับสี่มิติ การทดลองคิดแบบนี้เป็นการแสดงอนุภาพของความคิดเชิงเปรียบเทียบในคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงความคิดเชิงสมมติฐานกับความรู้ที่เป็นรูปธรรม

4. การทำย้อนกลับ คณิตศาสตร์เต็มไปด้วยกระบวนการที่ย้อนกลับได้เช่น การบวกและการลบ การกระจายและการแยกตัวประกอบ หรือการหาอนุพันธ์และการหาปริพันธ์ สำหรับนักเรียนบางคนการรู้วิธีทำย้อนกลับบางสิ่งบางอย่างจะเป็นประโยชน์ในการอธิบาย วิธีทำย้อนกลับ หาสถานที่ให้นักเรียนฝึกทำปัญหาวิศวกรรมย้อนรอยหรือฝึกความคิดทางคณิตศาสตร์

การเลื่อนขนาน / การหมุนในระนาบพิกัด ในกิจกรรมเหล่านี้ นักเรียนเรียนรู้การใช้เวกเตอร์แปลงอ็อบเจกต์หนึ่งไปเป็นอีกอ็อบเจกต์หนึ่ง การแปลงแบบไหนที่จะทำให้อ็อบเจกต์ที่ได้กลับไปตำแหน่งเริ่มต้นของมัน การแปลงทั้งสองสัมพันธ์กันอย่างไร

5. การถามว่า “เกิดอะไรขึ้นถ้า” คำถามประเภทนี้สามารถช่วยนักเรียนให้สังเกตสมบัติที่แตกต่างกันของสถานการณ์ ช่วยให้นักเรียนเริ่มการสืบเสาะด้วยตนเอง รวมถึงการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ การพิจารณารูปร่างที่แตกต่าง และการประยุกต์ใช้การแปลง การถามว่า “เกิดอะไรขึ้นถ้า” เป็นคำถามที่นักคณิตศาสตร์ใช้บ่อยมากเมื่อเขาพยายามแก้ปัญหา

นิพจน์ที่สมมูลกัน : โจทย์ปัญหาทางเดินรอบแปลงดอกไม้ เปิดโอกาสให้นักเรียนถาม เกิดอะไรขึ้นถ้าแปลงดอกไม้ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส นิพจน์จะเปลี่ยนไปอย่างไรถ้าแปลงดอกไม้เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า คำถามนี้จะทำให้นักเรียนดำเนินการสืบเสาะโดยวิธีที่คล้ายกันด้วยนิพจน์ทางพีชคณิต และแสดงให้เห็นว่าการหาคำตอบของนักเรียนจากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสามารถขยายไปยังรูปร่างชนิดอื่นๆ ได้

การแยกตัวประกอบตรินาม ให้ให้นักเรียนแยกตัวประกอบตรินามซึ่งสัมประสิทธิ์ตัวหน้าเป็นจำนวนที่ยกกำลังสองเท่านั้น จะเกิดอะไรขึ้นถ้าสัมประสิทธิ์ตัวหน้าไม่เป็นจำนวนที่ยกกำลังสอง นักเรียนจะยกตัวอย่างนิพจน์ที่ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้หรือไม่ นักเรียนจะหาข้ออ้างว่าต้องมีเงื่อนไขที่ทำให้สามารถแยกตัวประกอบได้ รวมทั้งเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับวิธีการอื่น ๆ ที่จะใช้กับกรณีอื่นๆ

6. การถามคำถาม ส่วนใหญ่นักเรียนเรียนรู้ได้มากจากการตอบคำถามจากคำถามแบบต่าง ๆ การถามคำถามจะช่วยทำให้นักเรียนคิดแบบมีเหตุผลมากขึ้น และยังช่วยทำให้นักเรียนมีบทบาทในการตั้งคำถามด้วยตัวเอง

จุด “การเรียงแถว” ในระนาบ ทำไมมีคำถามมากมาย คำถามดูเหมือนคล้ายกันอย่างไรหรือไม่ คำถามคู่ไหนบ้างที่เหมือนกัน คำถามใดที่คิดว่าสามารถตัดทิ้งได้

การหมุนในระนาบพิกัด ทำไมคำถามทั้งหมดจึงใช้มุมที่เป็นพหุคูณของ 90 องศา เราไม่สามารถหมุนด้วยมุม 45 องศาใช่หรือไม่ ทำไมคนแต่งหนังสือจึงไม่ถามเกี่ยวกับการหมุนจริง ๆ

7. การอภิปราย การอภิปรายในชั้นเรียนจะทำให้นักเรียนมีโอกาสดำตร่องสิ่งต่าง ๆ สามารถแสดงความคิดเห็น และแลกเปลี่ยนมุมมองเกี่ยวกับสิ่งที่นักเรียนเข้าใจ การอภิปรายจึงเป็นวิธีที่ดีในการแบ่งปันความเข้าใจที่ลึกซึ้งและแลกเปลี่ยนคำถามในชั้นเรียน และยังนำไปสนับสนุนความเห็นที่แตกต่างกันและเปิดเผยความเข้าใจที่แตกต่างกัน

ฟังก์ชันเส้นรอบวง ในกิจกรรมนี้ ทำให้นักเรียนสร้างตัวแทนของ π ที่แตกต่างกันสามแบบ ใช้เวลาในการอภิปรายกับคำถามต่อไปนี้ : ตัวแทนแบบไหนที่ดีกว่า แบบไหนที่นักเรียนส่วนใหญ่จำได้ สองแบบไหนคล้ายกันมากที่สุด มีข้อบกพร่องอื่น ๆ ในคณิตศาสตร์ที่เป็นตัวแทนของ π อีกหรือไม่

ฟังก์ชันเรขาคณิต ในกิจกรรมนี้ ทำให้นักเรียนทำการสืบเสาะเป็นลำดับ ใช้เวลาในการอภิปรายเกี่ยวกับการสืบเสาะเหล่านี้ว่าอันไหนที่น่าสนใจที่สุดและทำไม การสืบเสาะเหล่านั้นน่าตื่นเต้นหรือไม่ เห็นได้ชัดหรือไม่ เข้าใจอย่างถ่องแท้หรือไม่

เป็นไปได้ที่เรามีกฤษฎีอื่นเข้ามาเสริมกลยุทธข้างต้น ด้วยการจัดกิจกรรมบางอย่างในชั้นเรียนที่สอดคล้องกับชีวิตประจำวัน เราอาจจะขยายมุมมองของนักเรียนโดยใช้การสืบเสาะซึ่งจะช่วยให้ นักเรียนเห็นความแตกต่างของกลยุทธกับแนวคิดที่เกี่ยวข้อง วิธีที่สามารถเข้าถึงกิจกรรมนี้ได้หลายแบบเนื่องจากนักเรียนมีความสามารถต่างกัน เช่น บางคนสามารถนึกภาพได้ดี บางคนต้องเห็นภาพรวมก่อนเขาจึงจะสามารถเริ่มต้นสร้างแต่ละชิ้นส่วน และบางคนที่ชอบทำตามวิธีที่มีอยู่แล้วนักเรียนเหล่านั้นต้องมีโอกาสที่จะได้ทำโจทย์ปัญหาเหมือนกัน ที่สำคัญที่สุดเราต้องยอมรับความสนใจและการมีส่วนร่วมของนักเรียนและช่วยสร้างการเชื่อมโยงตัวนักเรียนให้เข้ากับคณิตศาสตร์ ซึ่งในทางกลับกันจะช่วยเสริมแรงจูงใจของนักเรียนให้เข้มแข็งขึ้น

ถึงแม้ว่าบางคำถามในกิจกรรมเหล่านี้ต้องการคำตอบง่าย ๆ จากนักเรียน (บางที่เป็นจำนวนหรือสมการ) แต่หลายคำถามถามเพื่อนำไปสู่การเขียนตอบมากกว่า คำถามเหล่านี้พยายามที่จะนำนักเรียนไปสู่การแสดงความคิดและตั้งสมมติฐาน การให้เหตุผลที่ว่าทำไมจึงเกิดสิ่งนั้นแน่นอน การอธิบายถึงสิ่งที่สังเกตได้ตลอดจนข้อสรุป กล่าวโดยรวมว่ากิจกรรมทั้งหลายมีจุดมุ่งหมายเหมือนกันกับจุดประสงค์ของมาตรฐาน NTCM ในเรื่องของการสื่อสารและการให้เหตุผล นักเรียนบางคนอาจต่อต้านคำถามเช่นนั้น โดยเฉพาะถ้านักเรียนชินกับแบบฝึกหัดในหนังสือเรียนที่ใช้กันอยู่ คำถามเหล่านี้อาจสร้างความยุ่งยากให้แก่นักเรียนที่มีทักษะการสื่อสารด้วยการเขียนน้อยกว่า สุดท้าย คำถามเหล่านี้ต้องการเวลาและความเอาใจใส่เป็นพิเศษซึ่งเป็นสิ่งที่สำคัญที่สุดในชั้นเรียนคณิตศาสตร์

ในฐานะที่เป็นครูจะช่วยสนับสนุนให้นักเรียนสนใจในการเขียนอย่างรอบคอบได้อย่างไร เราจะหาประโยชน์จากคำถามเหล่านี้โดยไม่ต้องบังคับให้นักเรียนทุกคนใช้เวลาและพลังงานมากขึ้นในการเขียนแต่ละคำตอบได้อย่างไร ขึ้นอยู่กับความพิเศษของห้องเรียนและนักเรียน จะพบว่าสิ่งที่แนะนำต่อไปนี้มีประโยชน์มาก :

1. การตั้งคำถามด้วยคำว่าทำไม นักเรียนอาจถามว่าทำไมต้อง “เขียนตอบคำถามที่น่าเบื่อทั้งหมดนี้” ในเมื่อเขา “รู้คำตอบ” แล้ว ในทางกลับกันพวกเขาอาจต่อต้านการเขียนถ้าไม่รู้คำตอบเลย ไม่ว่าจะเป็นอย่างใด เราสามารถกระตุ้นนักเรียนให้เขียนอย่างไตร่ตรองได้โดยการให้เหตุผลที่ดีกับนักเรียนเพื่อให้เขาเขียนออกมา

นักคณิตศาสตร์สื่อสารกันผ่านการเขียนด้วยเหตุผลสองประการ : (1) เพื่อทำให้เกิดความชัดเจนและบางครั้งเขียนเพื่ออธิบายหรือเขียนข้อโต้แย้ง และ (2) เพื่อยืนยันความเป็นจริงแต่ละข้อพร้อมเหตุผล นักเรียนอาจเต็มใจเขียนอย่างไตร่ตรองมากขึ้นถ้าเขากำลังพยายามอธิบายหรือสรุปย่อให้เพื่อนเข้าใจ ในการอภิปรายถ้านักเรียนไม่เห็นด้วยทั้งหมดที่เดียวกับสิ่งที่อธิบายก็ยิ่งถือว่าเป็นการอภิปรายที่มีประโยชน์

นักคณิตศาสตร์ก็เหมือนกับนักเขียนอื่น ๆ ที่ เขียนเพื่อช่วยให้พวกเขาติดตามปัญหาที่ลึกลับโปร่งสำหรับนักเรียนที่อ้างว่าไม่รู้จะเริ่มตอนที่ไหนในการเขียนตอบ เราสามารถช่วยได้โดยการถามให้นักเรียนอธิบายว่าเขาทำอะไร สังเกตเห็นอะไร และไม่เข้าใจอะไร เหล่านี้เป็นการเริ่มกระบวนการให้เหตุผลของนักเรียนซึ่งอย่างน้อยที่สุดจะเพิ่มความตระหนักทางคณิตศาสตร์ของตัวนักเรียนเองและช่วยในการตอบคำถามได้