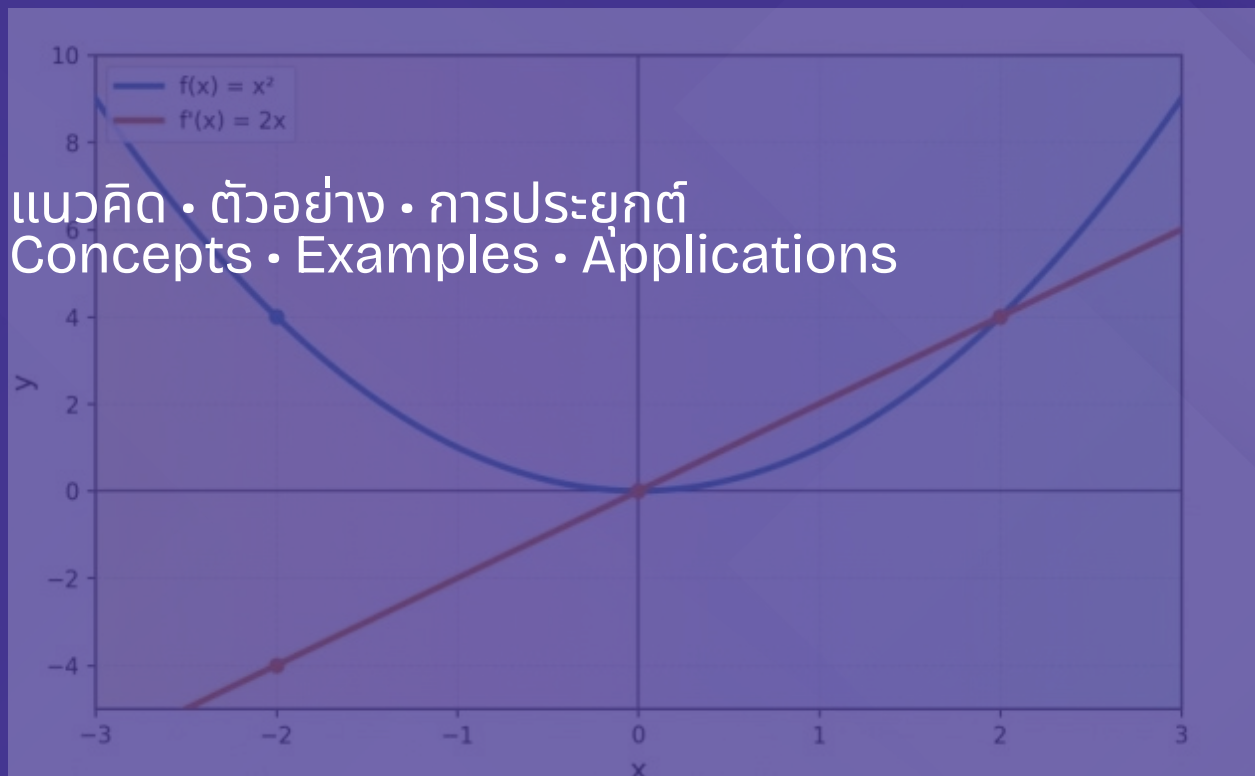


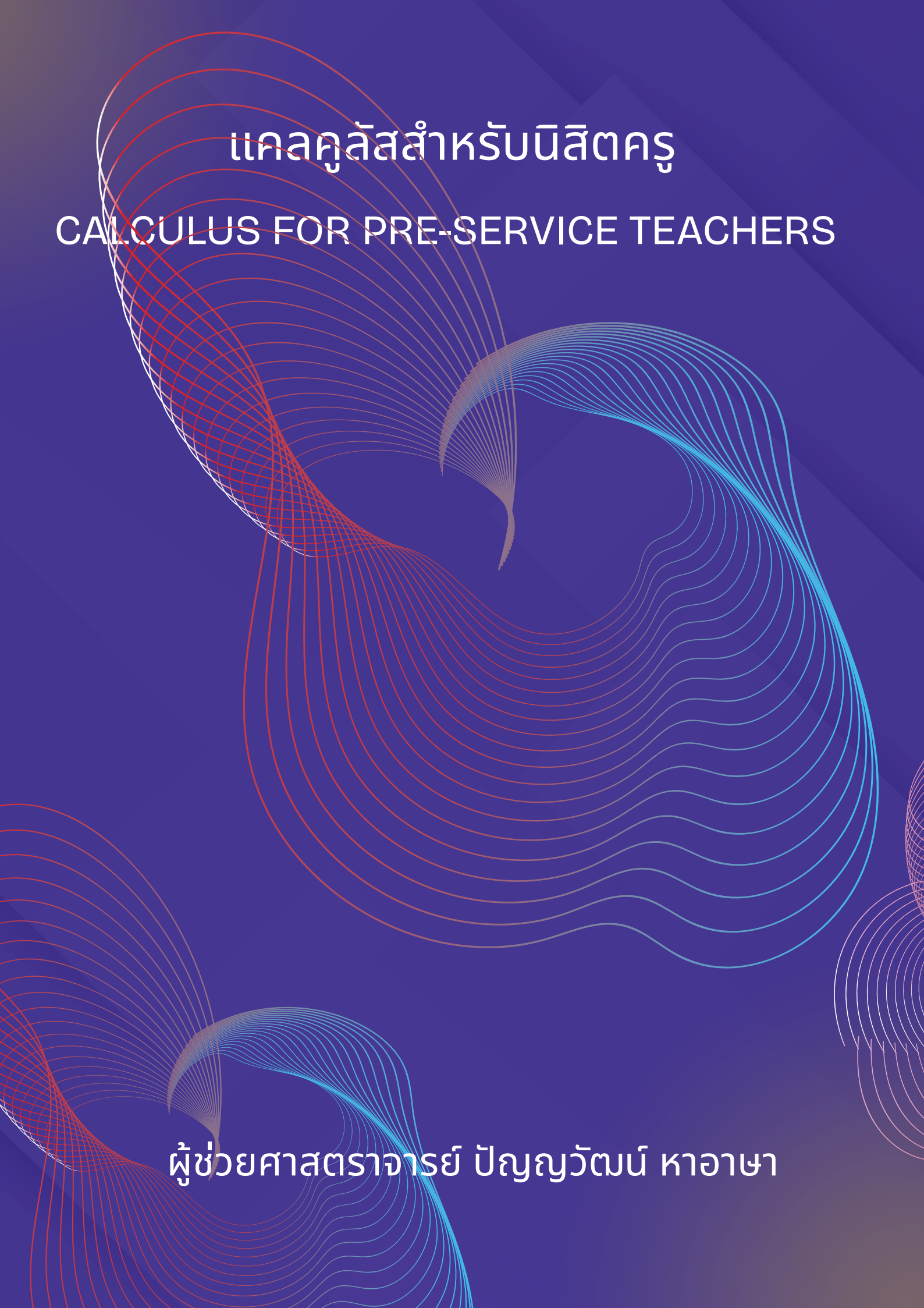
ตำราเรียนระดับอุดมศึกษา | ฉบับอีบุ๊ค

แคลคูลัสสำหรับนิสิตครู

CALCULUS FOR PRE-SERVICE TEACHERS



โดย
ผศ.ปัญญาวัฒน์ หาษา



แคลคูลัสสำหรับนิสิตครู

CALCULUS FOR PRE-SERVICE TEACHERS

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ปิญญวัฒน์ หาษา

แคลคูลัสสำหรับนิสิตครู

ผู้แต่ง ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ปัญญวัฒน์ หาษา
พิมพ์ครั้งแรก ตุลาคม พุทธศักราช 2569
(รูปแบบอิเล็กทรอนิกส์)
จัดทำโดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ปัญญวัฒน์ หาษา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เลขที่ 114 ซอยสุขุมวิท 23 เขตวัฒนา กรุงเทพฯ
10110

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

ปัญญวัฒน์ หาษา.
แคลคูลัสสำหรับนิสิตครู = Calculus for Pre-Service Teachers.-- พิษณุโลก : [ม.ป.พ.],
2569.
783 หน้า.

1. แคลคูลัส. I. ชื่อเรื่อง.

515
ISBN (e-book) 978-616-642-062-3

ราคา 289 บาท
ออกแบบปก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ปัญญวัฒน์ หาษา
สงวนลิขสิทธิ์ ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ (ฉบับเพิ่มเติม) พ.ศ.2565 ห้ามลอกเลียนแบบ ทำซ้ำ
ดัดแปลง แก้ไขไม่ว่าส่วนใดส่วนหนึ่งของหนังสือเล่มนี้ นอกจากจะได้รับอนุญาตจาก
ผู้จัดทำเท่านั้น

คำนำ

ตำราเรื่อง แคลคูลัสสำหรับนิสิตครู จัดทำขึ้นเพื่อใช้เป็นเอกสารประกอบการเรียนการสอนรายวิชา แคลคูลัสสำหรับนิสิตที่เตรียมตัวเป็นครูในอนาคต โดยมุ่งให้ผู้เรียนเข้าใจแคลคูลัสทั้งในด้านแนวคิด วิธีคำนวณ การแปลความหมาย และการนำไปใช้ในบริบททางคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และการสอน

เนื้อหาในตำราเล่มนี้ครอบคลุม 7 บท ได้แก่ ลิมิต อนุพันธ์ของฟังก์ชัน การประยุกต์ของอนุพันธ์ อินทิกรัลของฟังก์ชัน การประยุกต์ของอินทิกรัล ลำดับ อนุกรม และการประมาณค่าฟังก์ชัน รวมถึงสมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้นและแบบจำลองการเปลี่ยนแปลง การจัดลำดับเนื้อหามุ่งให้ผู้เรียนเห็นพัฒนาการของแนวคิดจากการเข้าใจ การเปลี่ยนแปลง การสะสม ไปสู่การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ตำราเล่มนี้ไม่ได้เน้นการจำสูตรเพียงอย่างเดียว แต่เน้นการทำความเข้าใจความหมายของสัญลักษณ์ กราฟ ตาราง สูตร และบริบทจริงควบคู่กันไป ตัวอย่างและคำอธิบายจึงออกแบบให้ผู้เรียนได้ฝึกอ่านสถานการณ์ แปลความหมายของตัวแปร พิจารณาเงื่อนไขของปัญหา ตรวจสอบหน่วย และอธิบายเหตุผลของขั้นตอนการคำนวณอย่างเป็นระบบ

เนื่องจากผู้เรียนในรายวิชานี้ประกอบด้วยนิสิตสาขาคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ ชีววิทยา เคมี และวิทยาศาสตร์ทั่วไป ตำราจึงพยายามเชื่อมโยงเนื้อหาแคลคูลัสกับตัวอย่างจากหลายบริบท เช่น การเคลื่อนที่ การเติบโตและการสลายตัว ความเข้มข้นของสาร งานและแรง ปริมาณสะสม ความน่าจะเป็น และแบบจำลองการเปลี่ยนแปลง เพื่อให้ผู้เรียนเห็นบทบาทของแคลคูลัสในศาสตร์ต่าง ๆ อย่างชัดเจน

นอกจากนี้ ตำราเล่มนี้ยังสอดแทรกมุมมองสำหรับนิสิตครูในหลายตอน โดยเน้นการตั้งคำถามนำ การวิเคราะห์ข้อผิดพลาดของผู้เรียน การเลือกใช้กราฟหรือตารางประกอบคำอธิบาย และการใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับการสอนในอนาคต ผู้เขียนหวังว่านิสิตจะไม่เพียงเรียนรู้วิธีหาคำตอบ แต่จะสามารถอธิบายที่มาและความหมายของคำตอบนั้นให้ผู้อื่นเข้าใจได้

ผู้เขียนหวังว่าตำราเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนรู้แคลคูลัสของนิสิต และเป็นพื้นฐานในการพัฒนาความสามารถด้านการคิดวิเคราะห์ การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียนต่อไป หากมีข้อเสนอแนะเพื่อปรับปรุงตำรา ผู้เขียนยินดีรับฟังด้วยความขอบคุณอย่างยิ่ง

ผศ.ปัญญาวัฒน์ หาอาษา

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

สารบัญ

รายการ	หน้า
บทที่ 1 ลิมิต (Limits)	1
1.1 ทำไมต้องเรียนลิมิต: ปัญหาการเข้าใกล้และการเปลี่ยนแปลง	1
1.2 ฟังก์ชันและกราฟที่จำเป็นต่อการศึกษาลิมิต (Functions and Graphs for the Study of Limits)	6
1.3 แนวคิดลิมิตจากตาราง และกราฟ (Limit Concepts from Tables and Graphs)	16
1.4 นิยามเชิงแนวคิดของลิมิตและสัญลักษณ์ $\lim$ (Conceptual Meaning of Limits and the Symbol $\lim$)	24
1.5 ลิมิตด้านซ้ายและลิมิตด้านขวา (Left-Hand Limits and Right-Hand Limits)	30
1.6 กฎของลิมิตและการคำนวณลิมิตพื้นฐาน (Limit Laws and Basic Limit Calculations)	35
1.7 ลิมิตของฟังก์ชันพีชคณิตและการจัดรูปพจน์ (Limits of Algebraic Functions and Algebraic Simplification)	42
1.8 ลิมิตสำคัญของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Important Limits of Trigonometric Functions)	51
1.9 ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์และเส้นกำกับของกราฟ (Limits Involving Infinity and Asymptotes of Graphs)	59
1.10 ความต่อเนื่องของฟังก์ชันและความหมายเชิงกราฟ (Continuity of Functions and Graphical Interpretation)	66
1.11 ทฤษฎีค่ากลางและการอธิบายความมีอยู่ของคำตอบ (Intermediate Value Theorem and Existence of Solutions)	73
1.12 ตัวอย่างเชิงวิทยาศาสตร์: ความเร็วเฉลี่ย ความเข้มข้น และการเจริญเติบโต (Scientific Examples: Average Velocity, Concentration, and Growth)	81
1.13 มุมมองสำหรับนิสิต: ข้อเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับ “เข้าใกล้” และ “เท่ากับ” (Perspective for Students: Misconceptions about “Approaching” and “Equaling”)	90
1.14 แบบฝึกหัดท้ายบท	98
บทที่ 2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (Derivatives of Functions)	106
2.1 ปัญหาเส้นสัมผัสและอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉพาะขณะ (Tangent Line Problem and Instantaneous Rate of Change)	106
2.2 นิยามอนุพันธ์ที่จุดหนึ่งจากลิมิตของอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย (Derivative at a Point as the Limit of Average Rate of Change)	113

รายการ	หน้า
2.3 อนุพันธ์เป็นฟังก์ชันและการอ่านความหมายจากกราฟ (Derivative as a Function and Graphical Interpretation)	121
2.4 ความสามารถหาอนุพันธ์ได้และความต่อเนื่อง (Differentiability and Continuity)	128
2.5 กฎการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพื้นฐาน (Differentiation Rules for Basic Functions)	135
2.6 กฎผลบวก ผลคูณ ผลหาร และค่าคงตัว (Sum, Product, Quotient, and Constant Multiple Rules)	143
2.7 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Derivatives of Trigonometric Functions)	152
2.8 กฎลูกโซ่และฟังก์ชันประกอบ (Chain Rule and Composite Functions)	161
2.9 อนุพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลังและลอการิทึม (Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions)	171
2.10 การหาอนุพันธ์โดยปริยาย (Implicit Differentiation)	181
2.11 อนุพันธ์อันดับสูงและความหมายทางฟิสิกส์ (Higher-Order Derivatives and Physical Meaning)	193
2.12 ดิฟเฟอเรนเชียลและการประมาณเชิงเส้น (Differentials and Linear Approximation)	202
2.13 มุมมองสำหรับนิสิต: การเชื่อมโยงความชัน กราฟ และหน่วยของปริมาณ	211
2.14 กิจกรรมท้ายบทและแบบฝึกหัด	219
บทที่ 3 การประยุกต์ของอนุพันธ์ (Applications of Derivatives)	229
3.1 ภาพรวมการใช้ข้อเท็จจริงความรู้เรื่องอนุพันธ์ในปัญหาจริง (Overview of Using Derivatives in Real-World Problems)	229
3.2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน (Maximum and Minimum Values of Functions)	238
3.3 ทฤษฎีบทค่ากลางสำหรับอนุพันธ์และผลที่ตามมา (Mean Value Theorem for Derivatives and Its Consequences)	247
3.4 ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด และการทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (Increasing and Decreasing Functions and the First Derivative Test)	258
3.5 ความเว้า จุดเปลี่ยนเว้า และการทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับสอง (Concavity, Inflection Points, and the Second Derivative Test)	269
3.6 การร่างกราฟของฟังก์ชันโดยใช้อนุพันธ์ (Curve Sketching Using Derivatives)	278
3.7 ปัญหาเหมาะสมที่สุดเชิงประยุกต์ (Applied Optimization Problems)	287
3.8 อัตราสัมพันธ์และการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่เชื่อมโยงกัน (Related Rates and Changes in Connected Quantities)	298
3.9 กฎของโลปีตาลและรูปแบบไม่กำหนด (L'Hôpital's Rule and Indeterminate Forms)	309

รายการ	หน้า
3.10 วิธีนิวตันสำหรับประมาณคำตอบของสมการ (Newton's Method for Approximating Solutions of Equations)	317
3.11 การสร้างแบบจำลองจากข้อมูลและการตีความผลลัพธ์ (Modeling from Data and Interpreting Results)	326
3.12 ตัวอย่างเชิงฟิสิกส์ ชีววิทยา เคมี และวิทยาศาสตร์ทั่วไป (Examples in Physics, Biology, Chemistry, and General Science)	337
3.13 มุมมองสำหรับนิสิต: การเลือกใช้เครื่องมืออนุพันธ์และข้อเข้าใจคลาดเคลื่อน (Perspective for Students: Choosing Derivative Tools and Addressing Misconceptions)	345
3.14 กิจกรรมท้ายบทและแบบฝึกหัด	355
บทที่ 4 อินทิกรัลของฟังก์ชัน (Integrals of Functions)	365
4.1 ปัญหาพื้นที่และแนวคิดการสะสม (Area Problems and the Concept of Accumulation)	365
4.2 ผลรวมย่อยและสัญกรณ์ซิกมา (Partial Sums and Sigma Notation)	373
4.3 อินทิกรัลจำกัดเขตในฐานะลิมิตของผลรวม (Definite Integrals as Limits of Riemann Sums)	383
4.4 สมบัติพื้นฐานของอินทิกรัลจำกัดเขต (Basic Properties of Definite Integrals)	393
4.5 ทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส (The Fundamental Theorem of Calculus)	402
4.6 อนุพันธ์และอินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Antiderivatives and Indefinite Integrals)	412
4.7 การอินทิเกรตโดยการแทนค่า (Integration by Substitution)	422
4.8 สูตรอินทิกรัลพื้นฐานที่ควรรู้ (Basic Integration Formulas to Know)	431
4.9 การอินทิเกรตบางส่วนในกรณีพื้นฐาน (Integration by Parts in Basic Cases)	441
4.10 อินทิกรัลของฟังก์ชันที่พบบ่อยในวิทยาศาสตร์ (Integrals of Functions Commonly Found in Science)	451
4.11 การประมาณค่าอินทิกรัลด้วยตาราง กราฟ และเทคโนโลยี (Approximating Integrals Using Tables, Graphs, and Technology)	462
4.12 มุมมองสำหรับนิสิตครู: ความสัมพันธ์ระหว่าง “พื้นที่” กับ “การสะสม” (Perspective for Pre-Service Teachers: The Relationship Between Area and Accumulation)	472
4.13 กิจกรรมท้ายบทและแบบฝึกหัด	481
บทที่ 5 การประยุกต์ของอินทิกรัล (Applications of Integrals)	489
5.1 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้งและการตั้งขอบเขตของอินทิกรัล	489
5.2 ปริมาตรของทรงตันด้วยวิธีหน้าตัด (Volumes of Solids by the Slicing Method)	499

รายการ	หน้า
5.3 ปริมาตรของทรงตันด้วยวิธีเปลือกทรงกระบอก (Volumes of Solids by the Method of Cylindrical Shells)	510
5.4 ความยาวเส้นโค้ง (Arc Length)	520
5.5 พื้นที่ผิวของทรงหมุน (Surface Area of Solids of Revolution)	529
5.6 งานและแรงแปรผัน (Work and Variable Forces)	539
5.7 โมเมนต์ จุดศูนย์กลางมวล และเซนทรอยด์ (Moments, Centers of Mass, and Centroids)	550
5.8 การเปลี่ยนแปลงสุทธิและปริมาณสะสม (Net Change and Accumulated Quantity)	561
5.9 โมเมนต์และจุดศูนย์กลางมวลในกรณีพื้นฐาน (Moments and Centers of Mass in Basic Cases)	570
5.10 การประยุกต์กับความน่าจะเป็นและการแจกแจงต่อเนื่องเบื้องต้น (Applications to Probability and Basic Continuous Distributions)	582
5.11 กรณีศึกษาจากฟิสิกส์ ชีววิทยา เคมี และวิทยาศาสตร์สิ่งแวดล้อม (Case Studies from Physics, Biology, Chemistry, and Environmental Science)	592
5.12 มุมมองสำหรับนิสิตครู: การสร้างสถานการณ์ปัญหาและเกณฑ์ประเมินการอธิบาย (Perspective for Pre-Service Teachers: Creating Problem Situations and Rubrics for Explanation)	601
5.13 กิจกรรมท้ายบท แบบฝึกหัด และโครงงานย่อย	611
บทที่ 6 ลำดับ อนุกรม และการประมาณค่าฟังก์ชัน (Sequences, Series, and Function Approximation)	621
6.1 ลำดับและแนวคิดการลู่เข้า (Sequences and the Concept of Convergence)	621
6.2 อนุกรมและผลบวกอนันต์ (Series and Infinite Sums)	630
6.3 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมในกรณีพื้นฐาน (Basic Tests for Convergence of Series)	640
6.4 อนุกรมกำลังและช่วงการลู่เข้า (Power Series and Interval of Convergence)	650
6.5 พหุนามเทย์เลอร์และการประมาณค่าฟังก์ชัน (Taylor Polynomials and Function Approximation)	660
6.6 กิจกรรมท้ายบท แบบฝึกหัด และโครงงานย่อย	669
บทที่ 7 สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้นและแบบจำลองการเปลี่ยนแปลง (Introduction to Differential Equations and Models of Change)	681

รายการ	หน้า
7.1 สมการเชิงอนุพันธ์และความหมายของแบบจำลองการเปลี่ยนแปลง (Differential Equations and the Meaning of Models of Change)	681
7.2 สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้ (Separable Differential Equations)	692
7.3 แบบจำลองการเติบโต การสลายตัว และการเปลี่ยนแปลงเชิงวิทยาศาสตร์ (Models of Growth, Decay, and Scientific Change)	702
7.4 สนามทิศทาง จุดสมดุล และการวิเคราะห์เชิงคุณภาพ (Slope Fields, Equilibrium Points, and Qualitative Analysis)	711
7.5 กรณีศึกษาการสร้างแบบจำลองและการตีความผลลัพธ์ (Case Studies in Modeling and Interpretation)	721
7.6 กิจกรรมท้ายบท แบบฝึกหัด และโครงงานย่อย	733
ส่วนท้ายเล่ม	
ภาคผนวก	744
ภาคผนวก ก พิชคณิตและสมการที่จำเป็นต่อแคลคูลัส	744
ก.1 บทบาทของพิชคณิตในการเรียนแคลคูลัส	745
ก.2 จำนวนจริง ช่วง และค่าสัมบูรณ์	746
ก.3 เลขยกกำลัง ราก และการจัดรูปนิพจน์	747
ก.4 การแยกตัวประกอบ เศษส่วนพิชคณิต และโดเมน	748
ก.5 สมการและอสมการที่พบบ่อยในแคลคูลัส	749
ก.6 ระบบสมการและการตีความหน่วยในบริบท	751
ก.7 ข้อเข้าใจคลาดเคลื่อนและมุมมองสำหรับนิสิตครู	752
ภาคผนวก ข ตรีโกณมิติและฟังก์ชันพื้นฐานที่ใช้อยู่	754
ข.1 ฟังก์ชันพื้นฐานและบทบาทในแคลคูลัส	754
ข.2 มุม เรเดียน และวงกลมหนึ่งหน่วย	756
ข.3 อัตลักษณ์ตรีโกณมิติและการจัดรูปนิพจน์	758
ข.4 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	759
ข.5 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ลอการิทึม และฟังก์ชันผกผัน	760
ข.6 การเชื่อมโยงกับลิมิต อนุพันธ์ อินทิกรัล และแบบจำลอง	761
ข.7 ข้อเข้าใจคลาดเคลื่อนที่พบบ่อยและคำถามเพื่อการสอน	763
ภาคผนวก ค ตารางสูตรอนุพันธ์และอินทิกรัลพื้นฐาน	764
ค.1 ข้อตกลงและสัญลักษณ์ที่ใช้ในตารางสูตร	764
ค.2 กฎพื้นฐานของอนุพันธ์	765

รายการ	หน้า
ค.3 สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันพื้นฐาน	767
ค.4 สูตรอินทิกรัลพื้นฐาน	768
ค.5 การแทนค่าและรูปแบบที่ควรสังเกต	771
ค.6 สูตรที่มักใช้กับบทต่าง ๆ ในเล่ม	771
ค.7 ข้อผิดพลาดที่พบบ่อยและวิธีตรวจสอบ	772
บรรณานุกรม	775
ดัชนีคำสำคัญ (Index)	778

บทที่ 1 ลิมิต (Limits)

1.1 ทำไมต้องเรียนลิมิต: ปัญหาการเข้าใกล้และการเปลี่ยนแปลง

ลิมิตเป็นแนวคิดพื้นฐานที่ช่วยอธิบายพฤติกรรมของปริมาณหนึ่งเมื่อเข้าใกล้ค่าที่กำหนด แนวคิดนี้เกิดขึ้นจากปัญหาจริง เช่น การเปลี่ยนแปลงของตำแหน่ง ความเร็ว พื้นที่ และอัตราการเติบโต การทำความเข้าใจลิมิตจึงเป็นจุดเริ่มต้นสำคัญก่อนศึกษานิยามและการคำนวณในแคลคูลัสอย่างเป็นระบบ.

แนวคิดนำ: แคลคูลัสเริ่มจากคำถามเรื่อง “เข้าใกล้”

แคลคูลัสไม่ได้เริ่มจากสูตรจำนวนมากแต่เริ่มจากคำถามพื้นฐานที่พบได้ในชีวิตจริงและวิทยาศาสตร์ เช่น วัตถุเคลื่อนที่เร็วเท่าใดในขณะใดขณะหนึ่ง สารเคมีมีความเข้มข้นเปลี่ยนแปลงเร็วเพียงใดในช่วงเวลาสั้นมาก หรือประชากรของสิ่งมีชีวิตกำลังเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด ณ เวลาหนึ่ง คำถามเหล่านี้มีลักษณะร่วมกัน คือ เราต้องการเข้าใจพฤติกรรมของปริมาณหนึ่งเมื่ออีกปริมาณหนึ่งเข้าใกล้ค่าที่สนใจมากขึ้นเรื่อย ๆ

ในพีชคณิตพื้นฐาน เรามักแทนค่า x ลงในสูตรโดยตรง แล้วคำนวณค่า y ออกมา แต่ในหลายสถานการณ์ การแทนค่าโดยตรงอาจทำไม่ได้ หรือยังไม่ตอบคำถามที่ต้องการ ตัวอย่างเช่น ถ้าต้องการทราบความเร็วของรถ “ในขณะเวลา 5 วินาทีพอดี” การใช้ระยะทางในช่วงเวลา 4 ถึง 6 วินาทีให้เพียงความเร็วเฉลี่ยในช่วงนั้น ไม่ใช่ความเร็ว ณ ขณะเดียว การจะเข้าใกล้ความเร็วขณะเดียวจึงต้องพิจารณาช่วงเวลาที่ยาวลงเรื่อย ๆ แนวคิดของลิมิตจึงเป็นภาษาทางคณิตศาสตร์ที่ช่วยอธิบายสิ่งที่เกิดขึ้นเมื่อค่าของตัวแปรเข้าใกล้ค่าหนึ่ง แม้ในบางครั้งค่าที่จุดนั้นจะไม่มีนิยาม หรือไม่สามารถสังเกตได้โดยตรง ลิมิตทำให้เราสามารถพูดถึงแนวโน้มได้อย่างเป็นระบบ ไม่ใช่เพียงการเดาจากตัวเลขใกล้เคียง

สองปัญหาหลักที่ทำให้ต้องเรียนลิมิต

เหตุผลสำคัญที่ทำให้ลิมิตเป็นหัวใจของแคลคูลัสมีอย่างน้อยสองประการ ประการแรก ลิมิตช่วยจัดการกับปัญหาการเข้าใกล้ค่าหนึ่ง เช่น x เข้าใกล้ 2 หรือ t เข้าใกล้ 0 ประการที่สอง ลิมิตช่วยจัดการกับปัญหาการเปลี่ยนแปลง ณ ขณะหนึ่ง ซึ่งไม่สามารถตอบได้โดยใช้การเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยในช่วงกว้าง ๆ เพียงอย่างเดียว

ในภาษาคณิตศาสตร์ เรามักเขียนว่า x เข้าใกล้ a เพื่อสื่อว่า x มีค่าใกล้ a มากขึ้นเรื่อย ๆ แต่ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ a การพิจารณาเช่นนี้ทำให้เราเห็นพฤติกรรมรอบ ๆ จุด a ทั้งจากด้านซ้ายและด้านขวา หากค่าที่ได้จากสองด้านสอดคล้องกัน เราอาจกล่าวได้ว่าฟังก์ชันมีค่าลิมิตที่จุดนั้น

ตัวอย่างที่ 1.1.1 การหาอัตราการเร็วขณะเดียวจากความเร็วเฉลี่ย

ให้ระยะทางของวัตถุที่ตกลงมาในแนวดิ่งประมาณได้ด้วย $s(t) = 4.9t^2$ เมตร เมื่อ t เป็นเวลาในหน่วยวินาที จึงใช้แนวคิดการเข้าใกล้เพื่อหาอัตราการเร็วของวัตถุที่เวลา $t = 2$ วินาที

วิธีทำ ความเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วงเวลาจาก $t = 2$ ถึง $t = 2 + h$ คือ

$$\text{อัตราเร็วเฉลี่ย} = \frac{s(2+h) - s(2)}{h}$$

แทนค่า $s(t) = 4.9t^2$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{s(2+h) - s(2)}{h} &= \frac{4.9(2+h)^2 - 4.9(2)^2}{h} \\ &= \frac{4.9(4 + 4h + h^2) - 19.6}{h} \\ &= \frac{19.6 + 19.6h + 4.9h^2 - 19.6}{h} \\ &= 19.6 + 4.9h \end{aligned}$$

เมื่อ h มีค่าน้อยลงเรื่อย ๆ ค่า $19.6 + 4.9h$ จะเข้าใกล้ 19.6 ดังนั้นความเร็วขณะเดียวที่เวลา

$t = 2$ วินาทีควรมีค่าประมาณ 19.6 เมตรต่อวินาที

ตอบ ความเร็วของวัตถุที่เวลา 2 วินาทีมีค่าประมาณ 19.6 เมตรต่อวินาที

ข้อสังเกต การคำนวณนี้ไม่ใช้การแทนค่า $h = 0$ ตั้งแต่ต้น เพราะถ้า $h = 0$ จะเกิดการหารด้วยศูนย์ แต่เราใช้แนวคิดว่า h เข้าใกล้ 0 เพื่อดูค่าที่อัตราเร็วเฉลี่ยเข้าใกล้ ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า ความเร็วขณะเดียวไม่ได้มาจากการวัดระยะทางในช่วงเวลาหนึ่งที่ยาวพอสมควรเท่านั้น แต่เกิดจากการพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยในช่วงเวลาที่สั้นลงเรื่อย ๆ กระบวนการนี้เป็นจุดเริ่มต้นของแนวคิดอนุพันธ์ ซึ่งจะศึกษาอย่างเป็นระบบในบทถัดไป

ค่าที่จุดหนึ่งกับค่าที่เข้าใกล้ไม่จำเป็นต้องเหมือนกัน

นิสิตจำนวนมากมักเข้าใจว่า เมื่อต้องการหาขีดจำกัดของฟังก์ชันที่ x เข้าใกล้ a ให้แทนค่า $x = a$ ลงในฟังก์ชันได้ทันที ความคิดนี้ใช้ได้บางกรณี แต่ไม่ใช่ทั้งหมด เพราะขีดจำกัดสนใจพฤติกรรมของฟังก์ชันเมื่อ x อยู่ใกล้ a ไม่ใช่จำเป็นต้องสนใจค่า ณ $x = a$ โดยตรง

ดังนั้น ในการเรียนขีดจำกัด เราจะต้องฝึกรูปร่างของฟังก์ชันรอบ ๆ จุดที่สนใจ การแทนค่าตรง ๆ เป็นเพียงเครื่องมือหนึ่งเท่านั้น ไม่ใช่เนื้อหาของขีดจำกัดทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 1.1.2 ฟังก์ชันไม่มีค่าที่จุดหนึ่ง แต่มีค่าที่เข้าใกล้

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ เมื่อ $x \neq 1$ จงคาดการณ์ค่าที่ $f(x)$ เข้าใกล้เมื่อ x เข้าใกล้ 1

วิธีทำ ถ้าแทน $x=1$ ลงในสูตรเดิม จะได้ตัวส่วนเป็น 0 จึงไม่สามารถหาค่า $f(1)$ จากสูตรนี้ได้โดยตรง แต่เรายังสามารถพิจารณาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x อยู่ใกล้ 1 ได้

แยกตัวประกอบของตัวเศษได้ว่า

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

ดังนั้น เมื่อ $x \neq 1$ จะได้

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$$

เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ค่า $x + 1$ จะเข้าใกล้ 2

ตอบ ค่าที่ $f(x)$ เข้าใกล้เมื่อ x เข้าใกล้ 1 คือ 2

ข้อสังเกต แม้ $f(1)$ จะไม่มีนิยามจากสูตรเดิม แต่ลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้ 1 ยังคงมีความหมายได้ เพราะเราพิจารณาค่าของฟังก์ชันใกล้ 1 ไม่ใช่ค่าที่ 1 โดยตรง

สถานการณ์ในตัวอย่างนี้เป็นภาพสำคัญของลิมิต ฟังก์ชันอาจมี “ช่องว่าง” ที่จุดหนึ่ง แต่ค่ารอบ ๆ จุดนั้นอาจเข้าใกล้จำนวนที่แน่นอน การเรียนลิมิตจึงช่วยให้เราพูดถึงความต่อเนื่อง ความไม่ต่อเนื่อง และการแก้ปัญหาที่มีรูปแบบ $\frac{0}{0}$ ได้อย่างมีหลักการ

ลิมิตกับความชันของเส้นสัมผัส

ในเรขาคณิตวิเคราะห์ เรารู้จักความชันของเส้นตรงจากสูตรการเปลี่ยนแปลงของ y หารด้วยการเปลี่ยนแปลงของ x แต่เส้นโค้งไม่มีความชันเดียวตลอดทั้งกราฟ หากต้องการรู้ความชันของเส้นโค้งที่จุดหนึ่ง เราต้องใช้แนวคิดของเส้นตัดที่มีสองจุด แล้วให้จุดที่สองเลื่อนเข้าใกล้จุดแรกมากขึ้นเรื่อย ๆ

เมื่อจุดที่สองเข้าใกล้จุดแรก เส้นตัดจะเข้าใกล้เส้นสัมผัส ความชันของเส้นตัดจึงเข้าใกล้ความชันของเส้นสัมผัส แนวคิดนี้เป็นอีกเหตุผลหนึ่งที่ทำให้ลิมิตจำเป็นต่อการสร้างอนุพันธ์

ตัวอย่างที่ 1.1.3 การหาแนวโน้มของความชันเส้นตัด

ให้ $y = x^2$ จงใช้ความชันของเส้นตัดเพื่อคาดการณ์ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $x = 1$

วิธีทำ ให้จุดแรกอยู่ที่ $x = 1$ และให้จุดที่สองอยู่ที่ $x = 1 + h$ โดยที่ $h \neq 0$

ความชันของเส้นตัด คือ

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} &= \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\ &= \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\ &= 2 + h\end{aligned}$$

เมื่อ h เข้าใกล้ 0 ค่า $2+h$ จะเข้าใกล้ 2

ตอบ ความชันของเส้นสัมผัสของกราฟ $y = x^2$ ที่ $x = 1$ ควรมีค่าเท่ากับ 2

ข้อสังเกต คำว่า “ควรมีค่า” ในที่นี้สะท้อนว่าผู้เรียนยังอยู่ในขั้นสร้างมโนติก่อนเข้าสู่นิยามอนุพันธ์อย่างเป็นทางการ

ลิมิตกับข้อมูลเชิงทดลอง

ในบางสถานการณ์ทางวิทยาศาสตร์ เราไม่มีสูตรของฟังก์ชันอย่างชัดเจน แต่มีข้อมูลจากการทดลองเป็นตาราง เช่น เวลาและอุณหภูมิ เวลาและความเข้มข้น หรือเวลาและจำนวนประชากร การใช้ลิมิตในระดับมโนติกช่วยให้เราคาดการณ์แนวโน้มของปริมาณเหล่านี้ได้จากค่าที่เข้าใกล้จุดสนใจ

สำหรับนิสิตที่มาจากสาขาฟิสิกส์ ชีววิทยา เคมี และวิทยาศาสตร์ทั่วไป การเชื่อมโยงลิมิตกับข้อมูลเชิงทดลองมีความสำคัญมาก เพราะช่วยให้เห็นว่าแคลคูลัสไม่ใช่เพียงการจัดรูปสัญลักษณ์ แต่เป็นเครื่องมือในการอธิบายปรากฏการณ์จริง

ตัวอย่างที่ 1.1.4 การคาดการณ์อัตราการเปลี่ยนแปลงจากตารางข้อมูล

ตารางต่อไปนี้แสดงอุณหภูมิของของเหลวชนิดหนึ่งหลังนำออกจากแหล่งความร้อน โดย t แทนเวลาเป็นนาที่ และ T แทนอุณหภูมิเป็นองศาเซลเซียส

t	4.8	4.9	5.0	5.1	5.2
$T(t)$	72.4	71.2	70.0	68.9	67.8

จงใช้ข้อมูลในตารางเพื่อคาดการณ์ว่าอุณหภูมิของของเหลวกำลังเปลี่ยนแปลงเร็วประมาณเท่าใดที่เวลา $t = 5$ นาที่

วิธีทำ พิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยจากด้านซ้ายของ $t = 5$

$$\frac{T(5.0) - T(4.9)}{5.0 - 4.9} = \frac{70.0 - 71.2}{0.1} = -12.0$$

พิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยจากด้านขวาของ $t = 5$

$$\frac{T(5.1) - T(5.0)}{5.1 - 5.0} = \frac{68.9 - 70.0}{0.1} = -11.0$$

สองค่าที่ได้อยู่ใกล้กัน และเป็นค่าลบทั้งคู่ จึงคาดได้ว่าอนุพันธ์ที่เวลา 5

นาทิลดลงด้วยอัตราประมาณ 11 ถึง 12 องศาเซลเซียสต่อนาทีก่อน

ตอบ ที่เวลา 5 นาทีก่อนของของเหลวลดลงประมาณ 11 ถึง 12 องศาเซลเซียสต่อนาทีก่อน

ข้อสังเกต เมื่อตารางข้อมูลมีช่วงเวลาที่ละเอียดขึ้น การคาดการณ์อัตราการเปลี่ยนแปลง ณ ขณะหนึ่งจะน่าเชื่อถือขึ้น นี่คือแนวคิดเกี่ยวกับการให้ช่วงเวลาเข้าใกล้ศูนย์

เมื่อนิสิตจะนำความรู้เรื่องลิมิตไปสอนในอนาคต ควรตระหนักว่าผู้เรียนมักติดกับการคำนวณก่อนเข้าใจความหมาย ครูจึงควรเริ่มจากสถานการณ์ที่จับต้องได้ เช่น การเคลื่อนที่ การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ หรือการเจริญเติบโต แล้วค่อยเชื่อมโยงไปสู่ตาราง กราฟ และสัญลักษณ์

คำสำคัญที่ควรเน้นคือ “เข้าใกล้” ไม่ใช่ “เท่ากับ” เมื่อ x เข้าใกล้ a เราไม่ได้บังคับให้ x เท่ากับ a เสมอไป แต่สนใจว่าค่าของฟังก์ชันมีแนวโน้มไปทางใด ข้อความนี้ช่วยป้องกันความเข้าใจคลาดเคลื่อนที่พบบ่อย เช่น คิดว่าลิมิตมีอยู่ที่ต่อเมื่อฟังก์ชันนิยามที่จุดนั้นเท่านั้น

อีกประเด็นหนึ่งคือ การใช้หลายรูปแบบแทนความคิดเดียวกัน ผู้เรียนควรเห็นลิมิตจากตาราง จากกราฟ จากคำอธิบายด้วยภาษา และจากนิพจน์พีชคณิต การสลับไปมาระหว่างรูปแบบเหล่านี้ช่วยให้ผู้เรียนสร้างความเข้าใจที่ยืดหยุ่นและลึกกว่าการจำสูตร

กิจกรรมชวนคิดสำหรับชั้นเรียน

ผู้สอนอาจเริ่มกิจกรรมด้วยคำถามง่าย ๆ ว่า “ถ้าเรารู้ตำแหน่งของรถทุก ๆ 1 วินาที เราจะรู้ความเร็วจริงของรถที่เวลา 10 วินาทีได้หรือไม่” จากนั้นให้ผู้เรียนอภิปรายเป็นกลุ่มว่าควรใช้ข้อมูลกี่เพียงใดจึงจะคาดการณ์ความเร็วได้ดีขึ้น กิจกรรมนี้ช่วยให้ผู้เรียนเห็นความจำเป็นของการลดช่วงเวลาให้สั้นลง

อีกกิจกรรมหนึ่งคือ ให้ผู้เรียนพิจารณาฟังก์ชันที่มีรูบนกราฟ เช่น $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ และให้เติมค่าจากตารางเมื่อ x เข้าใกล้ 1 จากซ้ายและขวา แล้วอภิปรายว่า ถึงแม้กราฟจะไม่มีจุดที่ $x = 1$ แต่ค่ารอบ ๆ จุดนั้นกำลังเข้าใกล้อะไร กิจกรรมนี้เชื่อมโยงลิมิตกับความต่อเนื่องได้ดี

ลิมิตเป็นแนวคิดพื้นฐานที่ทำให้แคลคูลัสสามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงและการเข้าใกล้ได้อย่างเป็นระบบ การเรียนลิมิตไม่ได้มีเป้าหมายเพียงเพื่อหาค่าของนิพจน์ แต่เพื่อสร้างภาษาสำหรับอธิบาย

พฤติกรรมของฟังก์ชันรอบจุดที่สนใจ แนวคิดนี้นำไปสู่อนุพันธ์เมื่อเราศึกษาการเปลี่ยนแปลง ณ หนึ่ง และนำไปสู่อินทิกรัลเมื่อเราศึกษาการสะสมของปริมาณจากส่วนย่อยจำนวนมาก

สำหรับนิสิต ความเข้าใจลิมิตควรเชื่อมโยงกับการอธิบาย การตั้งคำถาม และการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ เพราะผู้เรียนในอนาคตไม่ได้ต้องการเพียงขั้นตอนการคำนวณ แต่ต้องการเห็นว่าเหตุใดแนวคิดนี้จึงจำเป็นต่อการเข้าใจโลกที่มีการเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอ

1.2 ฟังก์ชันและกราฟที่จำเป็นต่อการศึกษาลิมิต (Functions and Graphs for the Study of Limits)

หัวข้อนี้ทบทวนฟังก์ชันและกราฟในฐานะภาษาพื้นฐานของแคลคูลัส เนื้อหาจะเน้นการอ่านค่า การกำหนดโดเมน การตีความกราฟ และการมองพฤติกรรมของฟังก์ชันใกล้จุดที่สนใจ

ความหมายของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันเป็นกฎที่จับคู่อินพุตแต่ละค่ากับเอาต์พุตเพียงค่าเดียว ถ้าใช้สัญลักษณ์ $f(x)$ แล้ว x คืออินพุต และ $f(x)$ คือเอาต์พุตที่ได้จากกฎของฟังก์ชัน f ความคิดนี้สำคัญมาก เพราะลิมิตของฟังก์ชันจะกล่าวถึงพฤติกรรมของเอาต์พุต $f(x)$ เมื่ออินพุต x เข้าใกล้ค่าหนึ่ง

โดเมนของฟังก์ชันคือเซตของค่าที่นำไปแทนเป็นอินพุตได้ ส่วนเรนจ์คือเซตของค่าที่เกิดเป็นเอาต์พุตได้ การระบุโดเมนอย่างรอบคอบทำให้เรารู้ว่าฟังก์ชันมีความหมายในบริเวณใดของแกน x และไม่ควรนำกราฟไปตีความเกินขอบเขตใด

ฟังก์ชันหนึ่งอาจแสดงได้หลายรูปแบบ เช่น สูตร ตาราง กราฟ หรือคำอธิบายด้วยภาษา การเรียนลิมิตต้องใช้การแสดงผลหลายรูปแบบร่วมกัน เพราะบางครั้งสูตรอาจคำนวณยาก แต่กราฟหรือค่าจากตารางช่วยให้เห็นแนวโน้มได้ชัดเจน

ตัวอย่างที่ 1.2.1 การอ่านค่าอินพุตและเอาต์พุตของฟังก์ชัน

กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = \sqrt{x+5}$, $h(x) = \frac{|x-3|}{x+1}$ และ $p(x) = \sin x$ จงหา

$$f(-1), g(4), h(2) \text{ และ } p\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

วิธีทำ แทนค่าอินพุตที่กำหนดลงในสูตรของแต่ละฟังก์ชัน

$$f(-1) = 2(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 2 + 3 + 1 = 6$$

$$g(4) = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$$

$$h(2) = \frac{|2-3|}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$p\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\text{ตอบ } f(-1) = 6, \quad g(4) = 3, \quad h(2) = \frac{1}{3} \quad \text{และ} \quad p\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

ข้อสังเกต ฟังก์ชันแต่ละชนิดมีกฎการคำนวณและเงื่อนไขของโดเมนแตกต่างกัน ก่อนแทนค่าอินพุตจึงควรตรวจสอบว่าค่าดังกล่าวอยู่ในโดเมนของฟังก์ชันหรือไม่ จากนั้นจึงดำเนินการตามลำดับของการคำนวณอย่างถูกต้อง โดยเฉพาะฟังก์ชันที่มีตัวส่วน รากที่สอง ค่าสัมบูรณ์ หรือตรีโกณมิติ ซึ่งต้องพิจารณาสมบัติเฉพาะของแต่ละฟังก์ชันร่วมด้วย

โดเมน: ขอบเขตที่ฟังก์ชันมีความหมาย

โดเมนของฟังก์ชันคือเซตของค่าอินพุตทั้งหมดที่สามารถนำไปแทนในสูตรของฟังก์ชันแล้วทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความหมายในระบบจำนวนจริง การกำหนดโดเมนจึงต้องพิจารณาข้อจำกัดที่เกิดจากรูปแบบของสูตร เช่น ตัวส่วนของเศษส่วนต้องไม่เป็นศูนย์ ปริมาณภายในรากที่สองต้องมีค่าไม่ติดลบ และปริมาณภายในลอการิทึมต้องมีค่ามากกว่าศูนย์ สำหรับฟังก์ชันที่ประกอบด้วยเงื่อนไขหลายชนิด ต้องตรวจสอบข้อจำกัดทั้งหมดร่วมกัน ค่าที่ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขจะไม่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน การพิจารณาโดเมนอย่างรอบคอบช่วยให้ทราบว่าฟังก์ชันสามารถคำนวณได้ที่ค่าใด และเป็นพื้นฐานสำคัญในการวิเคราะห์กราฟ ลิมิต ความต่อเนื่อง และสมบัติอื่นของฟังก์ชันต่อไป

ตารางที่ 1.2.1 สรุปข้อควรระวังเบื้องต้นเมื่อต้องหาโดเมนจากสูตร

รูปแบบของฟังก์ชัน	ข้อจำกัดของโดเมน	ตัวอย่าง
พหุนาม	รับค่าจริงได้ทุกค่า	$x^2 - 3x + 2$
เศษส่วน	ตัวส่วนต้องไม่เป็นศูนย์	$\frac{x+1}{x-2}$
รากที่สอง	ปริมาณใต้รากต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 0	$\sqrt{5-x}$
ลอการิทึม	ปริมาณในลอการิทึมต้องมากกว่า 0	$\ln(x+4)$
บริบทจริง	โดเมนต้องสอดคล้องกับความหมายจริง	เวลา t มักต้องมี $t \geq 0$

ตัวอย่างที่ 1.2.2 การหาโดเมนของฟังก์ชันหลายรูปแบบ

จงหาโดเมนของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$(ก) f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$$

$$(ข) g(x) = \sqrt{5-2x}$$

$$(ค) h(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x+3}$$

$$(ง) q(x) = \ln(x+4)$$

วิธีทำ พิจารณาข้อจำกัดของแต่ละสูตรแยกกัน

(ก) ตัวส่วนของ $f(x)$ ต้องไม่เป็นศูนย์

$$x^2 - 4 \neq 0$$

$$(x-2)(x+2) \neq 0$$

ดังนั้น $x \neq 2$ และ $x \neq -2$

(ข) ปริมาณใต้รากของ $g(x)$ ต้องไม่ติดลบ

$$5-2x \geq 0, \quad x \leq \frac{5}{2}$$

(ค) ปริมาณใต้รากของ $h(x)$ ต้องไม่ติดลบ และตัวส่วนต้องไม่เป็นศูนย์

$$x-1 \geq 0 \quad \text{ได้} \quad x \geq 1$$

$$x+3 \neq 0 \quad \text{ได้} \quad x \neq -3$$

เมื่อรวมเงื่อนไขทั้งสอง จะเหลือเพียง $x \geq 1$ เพราะค่าที่มากกว่าหรือเท่ากับ 1 ไม่มีทางเท่ากับ -3

(ง) ปริมาณในลอการิทึมต้องมากกว่า 0

$$x+4 > 0, \quad x > -4$$

ตอบ โดเมนของ f คือจำนวนจริงทุกจำนวนยกเว้น -2 และ 2, โดเมนของ g คือ $x \leq 5/2$,

โดเมนของ h คือ $x \geq 1$ และโดเมนของ q คือ $x > -4$

ข้อสังเกต การหาโดเมนควรทำก่อนวาดกราฟเสมอ เพราะโดเมนบอกว่ากราฟมีสิทธิ์ปรากฏที่ค่า x ไດบ้าง

กราฟของฟังก์ชันและการทดสอบเส้นตั้ง

กราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ คือเซตของจุดทั้งหมดในรูป $(x, f(x))$ บนระนาบพิกัด จุดแต่ละจุดบนกราฟจึงบอกความสัมพันธ์ระหว่างอินพุต x กับเอาต์พุต $f(x)$ ความสัมพันธ์หนึ่งจะเป็นฟังก์ชันของ

x ก็ต่อเมื่อค่า x หนึ่งค่าให้ค่า y ได้เพียงค่าเดียว บนกราฟ เราตรวจสอบได้ด้วยการทดสอบเส้นตั้ง ถ้าเส้นตั้งเส้นใดตัดกราฟมากกว่าหนึ่งจุด กราฟนั้นไม่แทนฟังก์ชันของ x

ตัวอย่างที่ 1.2.3 การตรวจสอบว่าความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันหรือไม่

พิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้ จงระบุว่าเป็นฟังก์ชันของ x หรือไม่

(ก) $A = \{(-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$

(ข) $B = \{(-1,2), (0,1), (-1,3), (2,5)\}$

(ค) $x^2 + y^2 = 4$

(ง) $y = \sqrt{4-x^2}, -2 \leq x \leq 2$

วิธีทำ ความสัมพันธ์จะเป็นฟังก์ชันเมื่อค่า x ซ้ำกันไม่ได้ให้ค่า y ต่างกัน

(ก) ใน A ค่า x แต่ละค่าเกิดเพียงครั้งเดียว จึงเป็นฟังก์ชัน

(ข) ใน B ค่า $x = -1$ ให้ y ได้ทั้ง 2 และ 3 จึงไม่เป็นฟังก์ชัน

(ค) สมการ $x^2 + y^2 = 4$ เป็นวงกลม เมื่อ $x = 0$ จะได้ $y = 2$ หรือ $y = -2$

จึงไม่เป็นฟังก์ชันของ x บนทั้งวงกลม

(ง) สมการ $y = \sqrt{4-x^2}$ เลือกเฉพาะค่า y ที่ไม่ติดลบ ดังนั้น x แต่ละค่าระหว่าง -2 ถึง 2 ให้ y เพียงค่าเดียว จึงเป็นฟังก์ชัน

ตอบ (ก) เป็นฟังก์ชัน, (ข) ไม่เป็นฟังก์ชัน, (ค) ไม่เป็นฟังก์ชัน และ (ง) เป็นฟังก์ชัน

ข้อสังเกต วงกลมทั้งรูปไม่เป็นฟังก์ชันของ x แต่ครึ่งวงกลมด้านบนเป็นฟังก์ชันของ x ได้

ฟังก์ชันพื้นฐานที่พบบ่อยในแคลคูลัส

ก่อนเข้าสู่ลิมิตอย่างเป็นทางการ นิสิตควรรู้จักรูปร่างของกราฟพื้นฐานบางชนิด การเห็นรูปทรงของกราฟช่วยให้คาดการณ์ค่าที่ฟังก์ชันเข้าใกล้ได้เร็วขึ้น และช่วยตรวจสอบคำตอบจากการคำนวณได้

ชนิดของฟังก์ชัน	รูปแบบทั่วไป	ลักษณะกราฟหรือข้อควรจำ
ฟังก์ชันคงตัว	$f(x) = c$	กราฟเป็นเส้นตรงแนวนอน
ฟังก์ชันเชิงเส้น	$f(x) = mx + b$	กราฟเป็นเส้นตรง ความชันเท่ากับ m
ฟังก์ชันกำลังสอง	$f(x) = ax^2 + bx + c$	กราฟเป็นพาราโบลา
ฟังก์ชันพหุนาม	$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$	กราฟต่อเนื่องและไม่มีรูหรือเส้นกำกับตั้ง

ฟังก์ชันตรรกยะ	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	ต้องระวังค่าที่ทำให้ $Q(x) = 0$
ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์	$f(x) = x $	กราฟเป็นรูปตัว V
ฟังก์ชันรากที่สอง	$f(x) = \sqrt{x}$	โดเมนพื้นฐานคือ $x \geq 0$
ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	$\sin x, \cos x, \tan x$	มีลักษณะคาบ และใช้เรเดียนในแคลคูลัส
ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	$f(x) = a^x, a > 0$	มักใช้จำลองการเพิ่มหรือลดแบบทวีคูณ
ฟังก์ชันลอการิทึม	$f(x) = \ln x$	โดเมนพื้นฐานคือ $x > 0$

การแปลงกราฟของฟังก์ชัน

กราฟจำนวนมากสร้างได้จากกราฟพื้นฐานโดยการเลื่อน การยืด การหด หรือการสะท้อน การเข้าใจการแปลงกราฟทำให้เราวาดภาพคร่าว ๆ ได้โดยไม่ต้องคำนวณจุดจำนวนมาก

ถ้า $g(x) = f(x) + k$ กราฟเลื่อนขึ้น k หน่วย เมื่อ $k > 0$ และเลื่อนลง $|k|$ หน่วย เมื่อ $k < 0$

ถ้า $g(x) = f(x - h)$ กราฟเลื่อนไปทางขวา h หน่วย เมื่อ $h > 0$

ถ้า $g(x) = -f(x)$ กราฟสะท้อนข้ามแกน x

ถ้า $g(x) = cf(x)$ กราฟยืดหรือหดในแนวดิ่งตามขนาดของ c

ตัวอย่างที่ 1.2.4 การอธิบายกราฟจากการแปลงฟังก์ชันพื้นฐาน

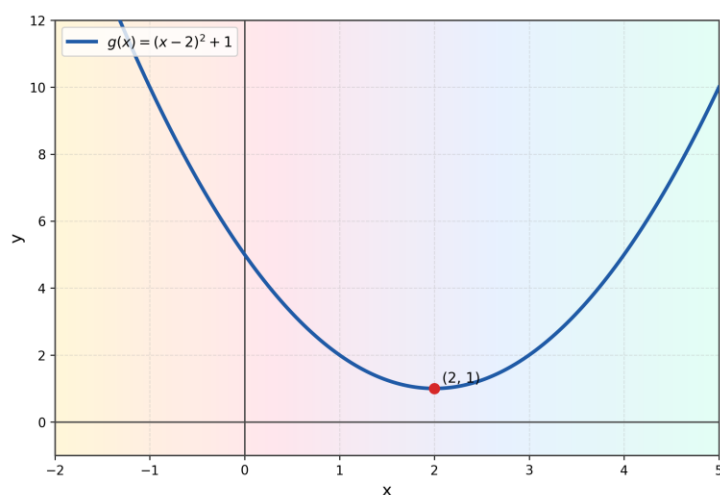
จงอธิบายกราฟของ $g(x) = (x - 2)^2 + 1$ โดยเปรียบเทียบกับกราฟพื้นฐาน $y = x^2$

วิธีทำ กราฟ $y = x^2$ เป็นพาราโบลาหงาย มีจุดยอดที่ $(0, 0)$ เมื่อเปลี่ยนเป็น $(x - 2)^2$ กราฟเลื่อนไปทางขวา 2 หน่วย และเมื่อบวก 1 กราฟเลื่อนขึ้น 1 หน่วย

ดังนั้น จุดยอดของกราฟ คือ $(2, 1)$

กราฟยังคงเป็นพาราโบลาหงาย เพราะสัมประสิทธิ์ของพจน์กำลังสองเป็นบวก

ตอบ กราฟของ $g(x)$ ได้จากกราฟ $y = x^2$ โดยเลื่อนไปทางขวา 2 หน่วย และเลื่อนขึ้น 1 หน่วย

รูปที่ 1.2.1 กราฟของ $g(x) = (x-2)^2 + 1$

ข้อสังเกต การแปลงกราฟช่วยให้มองพฤติกรรมใกล้จุดต่าง ๆ ได้เร็วขึ้น โดยเฉพาะเมื่อใช้กราฟประกอบ การหาลิมิต

ฟังก์ชันกำหนดเป็นช่วง

ฟังก์ชันบางชนิดไม่ได้ใช้สูตรเดียวกับทุกค่า x แต่ใช้สูตรต่างกันในช่วงต่าง ๆ ฟังก์ชันเช่นนี้ เรียกว่า ฟังก์ชันกำหนดเป็นช่วง ฟังก์ชันประเภทนี้สำคัญมากในการเรียนลิมิต เพราะบริเวณรอยต่อของช่วงมักทำให้เกิดคำถามว่า ค่าจากด้านซ้ายและด้านขวาเข้าใกล้ค่าเดียวกันหรือไม่

ตัวอย่างที่ 1.2.5 การอ่านค่าฟังก์ชันกำหนดเป็นช่วงและพฤติกรรมใกล้รอยต่อ
กำหนดฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} x+1; & x < 1 \\ 3; & x = 1 \\ 2x; & x > 1 \end{cases}$$

จงหา $f(0)$, $f(1)$, $f(1.5)$ และอธิบายพฤติกรรมของกราฟเมื่อ x เข้าใกล้ 1

วิธีทำ เลือกสูตรตามเงื่อนไขของค่า x

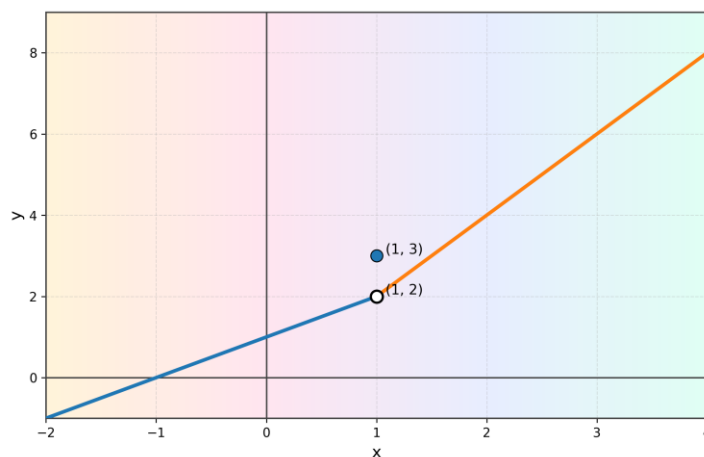
เมื่อ $x=0$ ซึ่งน้อยกว่า 1 ใช้สูตร $f(x)=x+1$ จึงได้ $f(0)=1$

เมื่อ $x=1$ ใช้สูตร $f(x)=3$ จึงได้ $f(1)=3$

เมื่อ $x=1.5$ ซึ่งมากกว่า 1 ใช้สูตร $f(x)=2x$ จึงได้ $f(1.5)=3$

ถ้า x เข้าใกล้ 1 จากด้านซ้าย ค่า $f(x)=x+1$ จะเข้าใกล้ 2 ถ้า x เข้าใกล้ 1 จากด้านขวา ค่า $f(x)=2x$ จะเข้าใกล้ 2 เช่นกัน แต่ค่าของฟังก์ชันที่ $x=1$ คือ 3

ตอบ $f(0)=1$, $f(1)=3$ และ $f(1.5)=3$ ส่วนค่าที่กราฟเข้าใกล้เมื่อ x เข้าใกล้ 1 คือ 2



รูปที่ 1.2.2 กราฟของฟังก์ชันกำหนดเป็นช่วงในตัวอย่างที่ 1.2.5

ข้อสังเกต ค่าของฟังก์ชันที่จุดรอยต่ออาจต่างจากค่าที่กราฟเข้าใกล้รอบ ๆ จุดนั้นได้

กราฟที่มีรู เส้นกำกับตั้ง และจุดกระโดด

ในการศึกษาลิมิต เราจะพบกราฟที่มีลักษณะพิเศษหลายแบบ เช่น กราฟมีรู กราฟกระโดด หรือ กราฟพุ่งขึ้นลงใกล้เส้นกำกับตั้ง ลักษณะเหล่านี้ทำให้การแทนค่าโดยตรงไม่เพียงพอ นิสิตจึงต้องฝึกอ่าน กราฟรอบจุดที่สนใจ กราฟมีรูเกิดขึ้นเมื่อฟังก์ชันไม่มีค่าที่จุดหนึ่ง หรือถูกกำหนดค่าไว้ต่างจากแนวโน้มของ กราฟ เส้นกำกับตั้งมักเกิดในฟังก์ชันตรรกยะเมื่อค่า x ทำให้ตัวส่วนเข้าใกล้ศูนย์ ส่วนจุดกระโดดเกิดเมื่อค่า ที่กราฟเข้าใกล้จากซ้ายและขวาไม่เท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1.2.6 การอ่านกราฟของฟังก์ชันตรรกยะที่มีเส้นกำกับตั้ง

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x-2}$ จงหาโดเมน และอธิบายพฤติกรรมของกราฟเมื่อ x เข้าใกล้ 2

จากด้านซ้ายและด้านขวา

วิธีทำ ฟังก์ชันนี้มีตัวส่วน $x-2$ ดังนั้นต้องมี $x-2 \neq 0$ หรือ $x \neq 2$

โดเมนคือจำนวนจริงทุกจำนวนยกเว้น 2

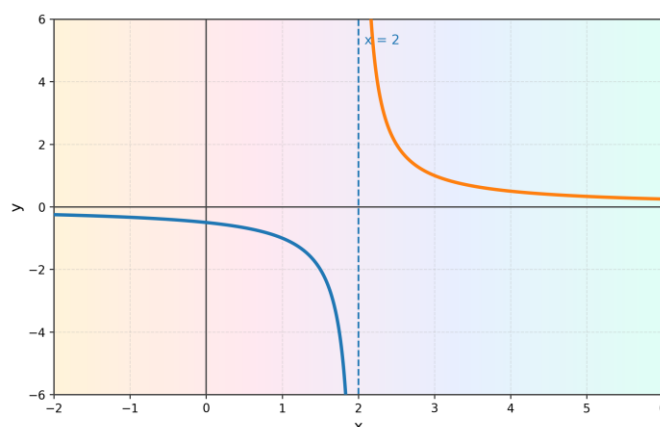
เมื่อ x เข้าใกล้ 2 จากด้านขวา ตัวส่วน $x-2$ เป็นจำนวนบวกที่มีค่าน้อยมาก ดังนั้น $\frac{1}{x-2}$

จะมีค่าบวกมากขึ้นเรื่อย ๆ

เมื่อ x เข้าใกล้ 2 จากด้านซ้าย ตัวส่วน $x-2$ เป็นจำนวนลบที่มีค่าน้อยมากในเชิงขนาด ดังนั้น

$\frac{1}{x-2}$ จะมีค่าลบมากขึ้นในเชิงขนาด

ตอบ โดเมนคือ $x \neq 2$ กราฟพุ่งขึ้นทางด้านขวาของ $x=2$ และพุ่งลงทางด้านซ้ายของ $x=2$



รูปที่ 1.2.3 กราฟของ $f(x) = \frac{1}{x-2}$ และเส้นกำกับตั้ง $x=2$

ข้อสังเกต พฤติกรรมนี้ไม่ได้ให้ค่าลิมิตเป็นจำนวนจริงที่ $x=2$ แต่เป็นกรณีสำคัญที่นำไปสู่ลิมิตอนันต์ในหัวข้อถัดไป

ตัวอย่างที่ 1.2.7 การใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติแทนสถานการณ์เชิงวิทยาศาสตร์

อุณหภูมิของห้องทดลองในช่วงเวลา 0 ถึง 24 ชั่วโมงประมาณได้ด้วย $T(t) = 25 + 8\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ เมื่อ t เป็นเวลาเป็นชั่วโมง จงระบุโดเมนที่มีความหมายจริง หา $T(0)$, $T(6)$, $T(18)$ และอธิบายลักษณะกราฟ

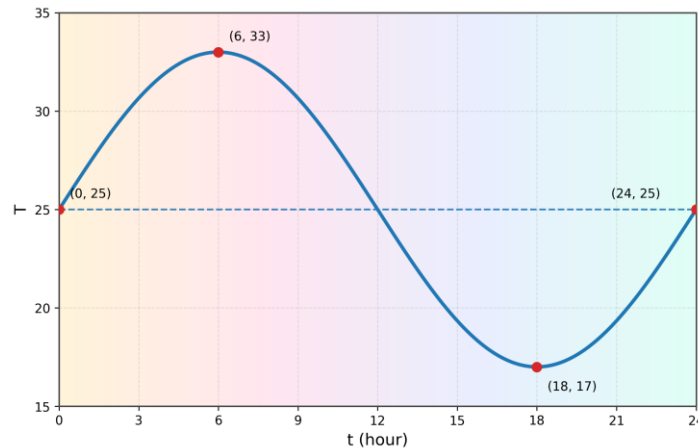
วิธีทำ จากโจทย์พิจารณาเวลาในช่วงหนึ่งวัน ดังนั้นโดเมนที่มีความหมายจริงคือ $0 \leq t \leq 24$

$$T(0) = 25 + 8\sin 0 = 25$$

$$T(6) = 25 + 8\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 25 + 8 = 33$$

$$T(18) = 25 + 8\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 25 - 8 = 17$$

กราฟมีลักษณะเป็นคลื่น ค่าเฉลี่ยอยู่ที่ 25 ค่าสูงสุดในช่วงนี้คือ 33 และค่าต่ำสุดคือ 17
 ตอบ โดเมนคือ $0 \leq t \leq 24$, $T(0) = 25$, $T(6) = 33$ และ $T(18) = 17$



รูปที่ 1.2.4 กราฟอุณหภูมิ $T(t)$ ในช่วง 0 ถึง 24 ชั่วโมง

ข้อสังเกต ฟังก์ชันตรีโกณมิติมักใช้แทนปรากฏการณ์ที่มีการเปลี่ยนแปลงเป็นคาบ เช่น อุณหภูมิ คลื่นเสียง และการสั่น

ตัวอย่างที่ 1.2.8 การแยกค่า $f(a)$ ออกจากแนวโน้มของกราฟ

กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ 1 & ; x = 2 \end{cases}$ จงอธิบายกราฟของฟังก์ชัน และเปรียบเทียบค่า $f(2)$ กับค่า

ที่กราฟเข้าใกล้เมื่อ x เข้าใกล้ 2

วิธีทำ เมื่อ $x \neq 2$ แยกตัวประกอบได้ว่า

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

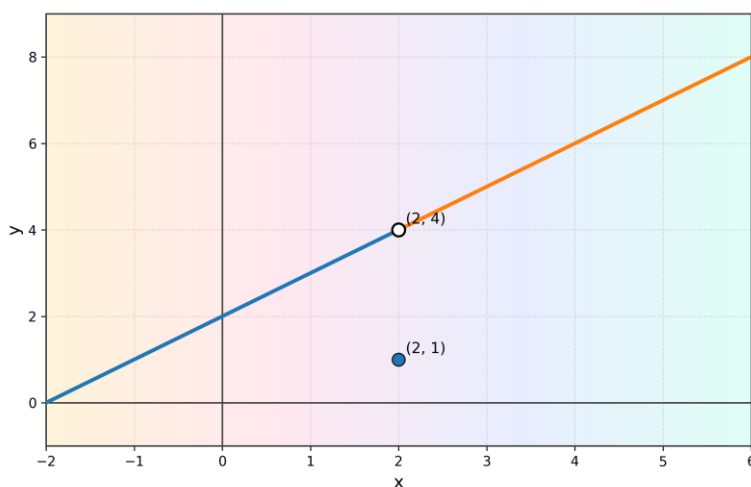
$$\text{ดังนั้น } \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2 \text{ เมื่อ } x \neq 2$$

กราฟส่วนใหญ่จึงอยู่บนเส้นตรง $y = x + 2$ แต่ที่ $x = 2$ สูตรเศษส่วนเดิมไม่มีนิยาม

และโจทย์กำหนดค่า $f(2) = 1$ เพิ่มเข้ามา

ถ้า x เข้าใกล้ 2 ค่า $x + 2$ จะเข้าใกล้ 4 แต่ค่าที่จุด $x = 2$ คือ 1

ตอบ $f(2) = 1$ แต่ค่าที่กราฟเข้าใกล้เมื่อ x เข้าใกล้ 2 คือ 4



รูปที่ 1.2.5 กราฟที่มีรูที่ $(2, 4)$ และมีจุดจริงที่ $(2, 1)$

ข้อสังเกต ตัวอย่างนี้เป็นเหตุผลสำคัญที่ต้องแยกคำว่า “ค่าของฟังก์ชันที่จุดหนึ่ง” ออกจาก “ค่าที่ฟังก์ชันเข้าใกล้”

กราฟช่วยลดความเข้าใจคลาดเคลื่อนเรื่องลิมิต

ความเข้าใจคลาดเคลื่อนที่พบบ่อยคือการคิดว่าลิมิตต้องเท่ากับค่าของฟังก์ชันที่จุดนั้นเสมอ กราฟช่วยให้เห็นว่าไม่จริงเสมอไป เพราะกราฟอาจมีรู มีจุดกระโดด หรือมีการกำหนดค่าพิเศษที่จุดหนึ่ง เมื่ออธิบายแนวคิดนี้ ควรให้ห็นิตเปรียบเทียบสามสิ่งพร้อมกัน ได้แก่ ค่า $f(a)$ ค่า $f(x)$ เมื่อ x อยู่ใกล้ a จากด้านซ้าย และค่า $f(x)$ เมื่อ x อยู่ใกล้ a จากด้านขวา การเปรียบเทียบสามสิ่งนี้เป็นสะพานสำคัญไปสู่ลิมิตด้านซ้าย ลิมิตด้านขวา และความต่อเนื่อง

ฟังก์ชันเป็นกฎที่ให้อินพุตแต่ละค่ามีเอาต์พุตเพียงค่าเดียว โดเมนบอกว่าฟังก์ชันรับค่า x ได้ได้บ้าง ส่วนเรนจ์บอกว่าฟังก์ชันให้ค่า y ได้ได้บ้าง กราฟของฟังก์ชันช่วยให้เห็นพฤติกรรมของ $f(x)$ เมื่อ x เปลี่ยนแปลง การทดสอบเส้นตั้งใช้ตรวจว่ากราฟแทนฟังก์ชันของ x หรือไม่ ฟังก์ชันกำหนดเป็นช่วง ฟังก์ชันตรรกยะ และกราฟที่มีรูเป็นพื้นฐานสำคัญของการเรียนลิมิต ในการเรียนลิมิต ต้องแยกค่า $f(a)$ ออกจากแนวโน้มของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a

คำถามชวนคิด

- เหตุใดการแทนค่า $x=a$ โดยตรงจึงไม่เพียงพอสำหรับการศึกษาลิมิตทุกกรณี
- กราฟที่มีรู ช่วยอธิบายความแตกต่างระหว่าง $f(a)$ กับค่าที่ $f(x)$ เข้าใกล้อย่างไร
- ถ้าค่าจากด้านซ้ายและด้านขวาของกราฟใกล้จุดหนึ่งไม่เท่ากันควรสรุปเกี่ยวกับลิมิตที่จุดนั้นอย่างไร

1.3 แนวคิดลิมิตจากตาราง และกราฟ (Limit Concepts from Tables and Graphs)

ลิมิตเป็นแนวคิดที่อธิบายพฤติกรรมของฟังก์ชันเมื่อค่าของตัวแปรเข้าใกล้ค่าหนึ่ง ไม่ใช่แนวคิดที่พิจารณาเฉพาะค่าของฟังก์ชัน ณ จุดนั้นเท่านั้น ในช่วงแรกของการเรียนลิมิต การมองผ่านตารางค่า กราฟ และคำอธิบายด้วยภาษา จะช่วยให้นิสิตเห็นความหมายของคำว่า “เข้าใกล้” ได้ชัดเจนขึ้น ก่อนจะเข้าสู่กฎการคำนวณและนิยามเชิงแนวคิดในหัวข้อถัดไป

ในหัวข้อนี้จะเน้นการอ่านแนวโน้มของค่า $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้จำนวน a จากด้านซ้ายและด้านขวา ถ้าค่าของ $f(x)$ จากทั้งสองด้านเข้าใกล้จำนวนเดียวกัน เรากล่าวอย่างไม่เป็นทางการว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a เท่ากับจำนวนนั้น

1.3.1 การเข้าใกล้จากตารางค่า

ตารางค่าเป็นเครื่องมือพื้นฐานที่ช่วยให้เห็นแนวโน้มของฟังก์ชันอย่างเป็นลำดับ การเลือกค่า x ควรเลือกทั้งค่าน้อยกว่า a และค่าที่มากกว่า a พร้อมทั้งเลือกค่าเหล่านั้นให้เข้าใกล้ a มากขึ้นเรื่อย ๆ

เขียนได้ในรูป $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

ข้อความนี้อ่านว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a เท่ากับ L หมายความว่า เมื่อ x มีค่าใกล้ a มากพอ ค่า $f(x)$ จะมีค่าใกล้ L มากตามไปด้วย

ตัวอย่างที่ 1.3.1 การประมาณลิมิตจากตารางค่าของฟังก์ชันพหุนามหารด้วยพหุนาม

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x \neq 2$ จงใช้ตารางค่าเพื่อประมาณ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

วิธีทำ เลือกค่า x ที่เข้าใกล้ 2 จากด้านซ้ายและด้านขวา แล้วคำนวณค่า $f(x)$ ดังตารางต่อไปนี้

x	$f(x)$
1.9	3.9
1.99	3.99

1.999	3.999
2.001	4.001
2.01	4.01
2.1	4.1

จากตาราง เมื่อ x เข้าใกล้ 2 จากด้านซ้าย ค่า $f(x)$ เข้าใกล้ 4 และเมื่อ x เข้าใกล้ 2 จากด้านขวา ค่า $f(x)$ ก็เข้าใกล้ 4 เช่นกัน ดังนั้นจึงประมาณได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

ข้อสังเกตสำคัญคือ ฟังก์ชันนี้ไม่ได้กำหนดค่าที่ $x = 2$ เพราะตัวส่วนเป็นศูนย์ แต่ลิมิตยังสามารถมีอยู่ได้ เนื่องจากลิมิตพิจารณาค่าของฟังก์ชันใกล้จุดนั้น ไม่ได้พิจารณาค่าที่จุดนั้นโดยตรง

ตัวอย่างที่ 1.3.2 การประมาณลิมิตของฟังก์ชันที่มีรากที่สอง

พิจารณาฟังก์ชัน $g(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$, $x \neq 0$ จงใช้ตารางค่าเพื่อประมาณ $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

วิธีทำ เลือกค่า x ที่เข้าใกล้ 0 ทั้งจากด้านซ้ายและด้านขวา

x	$g(x)$
-0.1	0.251582
-0.01	0.250156
-0.001	0.250016
0.001	0.249984
0.01	0.249844
0.1	0.248457

ค่า $g(x)$ จากทั้งสองด้านเข้าใกล้ประมาณ 0.25 หรือ $\frac{1}{4}$ ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \frac{1}{4}$$

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า ตารางค่าช่วยให้คาดเดาลิมิตได้ แม้แทนค่า $x = 0$ ลงในสูตรเดิมโดยตรงไม่ได้

ตัวอย่างที่ 1.3.3 การประมาณลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

พิจารณาฟังก์ชัน $h(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$ จงใช้ตารางค่าเพื่อประมาณ $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ โดยให้ x มีหน่วยเป็นเรเดียน

วิธีทำ เพื่อประมาณค่าลิมิตของฟังก์ชันนี้ เราจะเลือกค่า x ที่อยู่ใกล้ 0 ทั้งจากด้านซ้ายและด้านขวา แล้ว

คำนวณค่า $\frac{\sin x}{x}$ ในแต่ละกรณี โดยต้องใช้หน่วยเรเดียน เพราะเป็นหน่วยมาตรฐานของฟังก์ชัน

ตรีโกณมิติในแคลคูลัส หากค่าที่ได้จากสองด้านเข้าใกล้จำนวนเดียวกันมากขึ้นเรื่อย ๆ จำนวน

ดังกล่าวจะช่วยให้คาดการณ์ค่าของลิมิตได้อย่างสมเหตุสมผล

x	$\frac{\sin x}{x}$
-0.1	0.998334
-0.01	0.999983
-0.001	1
0.001	1
0.01	0.999983
0.1	0.998334

จากตาราง ค่า $\frac{\sin x}{x}$ เข้าใกล้ 1 เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทั้งจากด้านซ้ายและด้านขวา จึงประมาณได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ในแคลคูลัส ลิมิตนี้เป็นลิมิตสำคัญมาก เพราะใช้เป็นพื้นฐานของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตัวอย่างที่ 1.3.4 ตารางค่าที่แสดงว่าลิมิตสองด้านไม่มีอยู่

พิจารณาฟังก์ชัน $p(x) = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$ จงพิจารณาว่า $\lim_{x \rightarrow 0} p(x)$ มีอยู่หรือไม่

วิธีทำ พิจารณาว่า x ที่เข้าใกล้ 0 จากด้านซ้ายและด้านขวา เพื่อดูว่า $\frac{|x|}{x}$ มีแนวโน้มเข้าใกล้ค่าเดียวกันหรือไม่

x	$p(x)$
-0.1	-1
-0.01	-1
-0.001	-1
0.001	1
0.01	1
0.1	1

เมื่อ x เข้าใกล้ 0 จากด้านซ้าย ค่า $p(x)$ เท่ากับ -1 ตลอด แต่เมื่อ x เข้าใกล้ 0 จากด้านขวา ค่า $p(x)$ เท่ากับ 1 ตลอด ดังนั้นค่าที่เข้าใกล้จากสองด้านไม่เท่ากัน

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \text{ ไม่มีอยู่}$$

ตัวอย่างนี้ช่วยย้ำว่าการมีลิมิตสองด้านต้องอาศัยการเข้าใกล้จากด้านซ้ายและด้านขวาไปยังจำนวนเดียวกัน

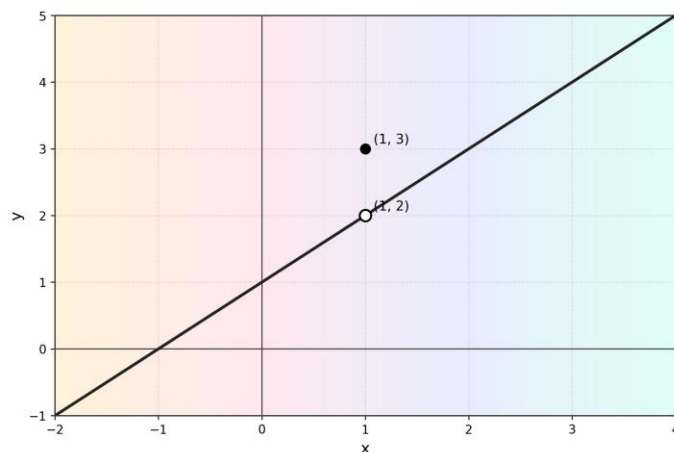
1.3.2 การอ่านลิมิตจากกราฟ

กราฟช่วยให้มองเห็นพฤติกรรมของฟังก์ชันรอบจุดที่สนใจได้อย่างรวดเร็ว เมื่อต้องอ่านลิมิตจากกราฟ ให้พิจารณาว่าเส้นกราฟเข้าใกล้ความสูงใดเมื่อ x เข้าใกล้ a จากซ้ายและขวา ไม่ควรพิจารณาเฉพาะจุดที่บิหรือจุดโปร่งที่ $x=a$ เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 1.3.5 การอ่านลิมิตจากกราฟที่มีรู

กราฟใน 1.3.1 แสดงฟังก์ชันที่มีเส้นกราฟเป็นเส้นตรง $y = x + 1$ ยกเว้นที่ $x = 1$ กราฟมีรูที่จุด $(1, 2)$ แต่มีจุดที่บิที่ $(1, 3)$ จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 1} q(x)$ และ $q(1)$

วิธีทำ



รูปที่ 1.3.1 กราฟที่มีรูที่ $x=1$ และมีค่าฟังก์ชันจริงเป็นจุดทึบ

จากกราฟ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 จากด้านซ้าย เส้นกราฟเข้าใกล้ความสูง 2 และเมื่อ x เข้าใกล้ 1 จากด้านขวา เส้นกราฟก็เข้าใกล้ความสูง 2 เช่นกัน ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow 1} q(x) = 2$$

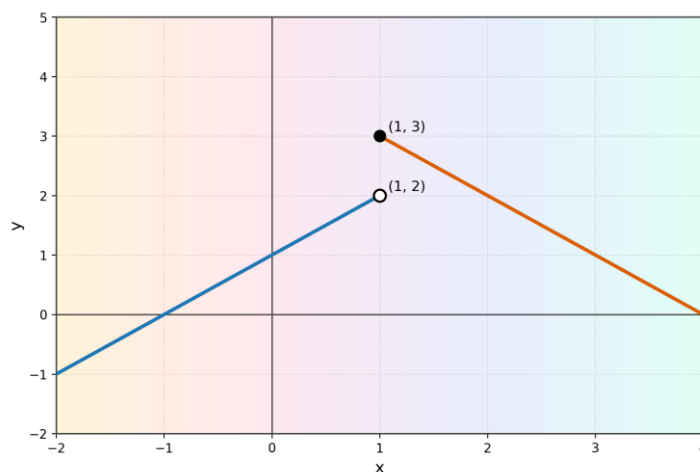
อย่างไรก็ตาม จุดทึบที่ $x=1$ อยู่ในระดับ $y=3$ จึงได้ว่า $q(1)=3$ ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า ลิมิตของฟังก์ชันที่จุดหนึ่งอาจไม่เท่ากับค่าฟังก์ชันที่จุดนั้น

ตัวอย่างที่ 1.3.6 การอ่านลิมิตจากกราฟที่มีการกระโดด

กราฟใน 1.3.2 แสดงฟังก์ชันที่พฤติกรรมด้านซ้ายและด้านขวาของ $x=1$ ไม่ต่อกัน จงพิจารณาว่า

$\lim_{x \rightarrow 1} r(x)$ มีอยู่หรือไม่

วิธีทำ



รูปที่ 1.3.2 กราฟที่มีการกระโดดบริเวณ $x=1$

จากกราฟ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 จากด้านซ้าย เส้นกราฟเข้าใกล้ระดับ $y=2$ แต่เมื่อ x เข้าใกล้ 1 จากด้านขวา เส้นกราฟเข้าใกล้ระดับ $y=3$ ค่าที่เข้าใกล้จากสองด้านไม่เท่ากัน จึงสรุปได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 1} r(x) \text{ ไม่มีอยู่}$$

การมีจุดที่ $x=1$ ไม่สามารถบังคับให้ลิมิตมีอยู่ได้ เพราะลิมิตขึ้นอยู่กับพฤติกรรมรอบจุด ไม่ใช่เฉพาะค่าของฟังก์ชัน ณ จุดนั้น

1.3.3 การอธิบายลิมิตด้วยภาษา

ในการเรียนแคลคูลัส การคำนวณเพียงอย่างเดียวไม่เพียงพอ นิสิตควรสามารถอธิบายความหมายของลิมิตด้วยภาษาของตนเองได้ เช่น “เมื่อเวลาเข้าใกล้ 2 วินาที ความเร็วเฉลี่ยเข้าใกล้ 6 เมตรต่อวินาที” หรือ “เมื่อปริมาณสารเข้าใกล้ค่านี้ อัตราการเปลี่ยนแปลงมีแนวโน้มเข้าใกล้จำนวนนั้น” การอธิบายด้วยภาษาช่วยให้เห็นความหมายของสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

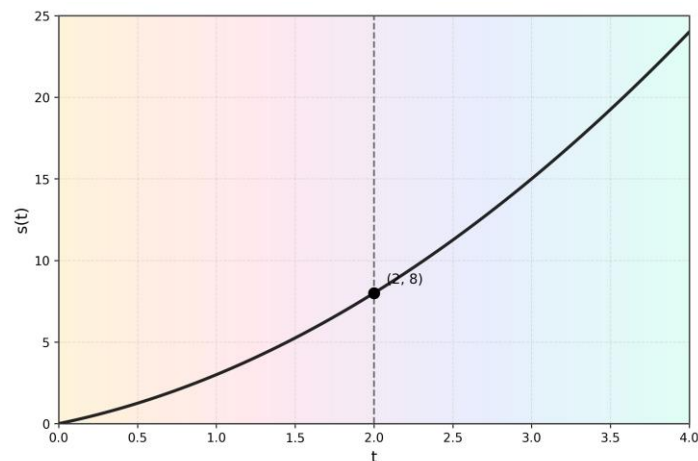
ตัวอย่างที่ 1.3.7 การอธิบายลิมิตจากสถานการณ์ความเร็ว

วัตถุเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง โดยตำแหน่งหลังจากเวลา t วินาที คือ $s(t) = t^2 + 2t$ เมื่อ $s(t)$ มีหน่วยเป็นเมตร จงใช้แนวคิดลิมิตเพื่ออธิบายความเร็วขณะเวลา $t = 2$ วินาที

วิธีทำ ความเร็วเฉลี่ยระหว่างเวลา 2 กับเวลา b คำนวณจาก $\frac{s(b) - s(2)}{b - 2}$

เลือกค่า b ที่เข้าใกล้ 2 จากด้านซ้ายและด้านขวา

b	$\frac{s(b) - s(2)}{b - 2}$
1.9	5.9
1.99	5.99
1.999	5.999
2.001	6.001
2.01	6.01
2.1	6.1



รูปที่ 1.3.3 กราฟตำแหน่ง $s(t) = t^2 + 2t$ และตำแหน่งที่ $t = 2$

จากตาราง ความเร็วเฉลี่ยเข้าใกล้ 6 เมื่อ b เข้าใกล้ 2 ทั้งจากด้านซ้ายและด้านขวา ดังนั้นความเร็วขณะเวลา $t = 2$ วินาที คือ 6 เมตรต่อวินาที อธิบายด้วยภาษาได้ว่า เมื่อช่วงเวลาที่ใช้วัดความเร็วเฉลี่ยหดสั้นลงจนเข้าใกล้เวลา 2 วินาที ความเร็วเฉลี่ยมีแนวโน้มเข้าใกล้ 6 เมตรต่อวินาที

ตัวอย่างที่ 1.3.8 การอธิบายลิมิตจากสถานการณ์ความเข้มข้นของสาร

ในแบบจำลองอย่างง่าย ความเข้มข้นของสารชนิดหนึ่งในสารละลายหลังจากเวลา t นาที กำหนดโดย $A(t) = 5(1 - e^{-0.6t})$ เมื่อ $A(t)$ มีหน่วยเป็นมิลลิกรัมต่อลิตร จงใช้ตารางค่าเพื่ออธิบายค่าที่ $A(t)$ เข้าใกล้เมื่อ t เข้าใกล้ 2

วิธีทำ

t	$A(t)$
1.9	3.400905
1.99	3.484966
1.999	3.493125
2.001	3.494932
2.01	3.503038
2.1	3.58173

จากตาราง ค่า $A(t)$ เข้าใกล้ประมาณ 3.4940 เมื่อ t เข้าใกล้ 2 ทั้งสองด้าน จึงเขียนได้ว่า

$$\lim_{t \rightarrow 2} A(t) \approx 3.4940$$

อธิบายด้วยภาษาได้ว่า เมื่อเวลาเข้าใกล้ 2 นาที ความเข้มข้นของสารมีแนวโน้มเข้าใกล้ประมาณ

3.4940 มิลลิกรัมต่อลิตร

1.3.4 ข้อควรระวังเมื่อใช้ตารางและกราฟ

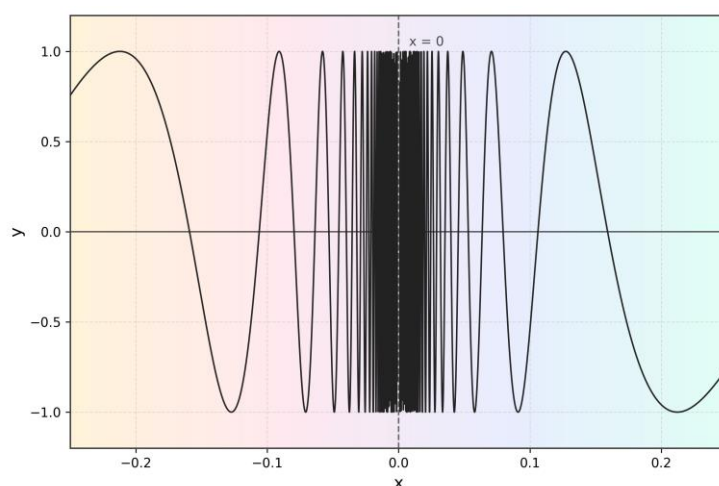
ตารางและกราฟช่วยสร้างความเข้าใจได้ดี แต่ทั้งสองอย่างอาจทำให้เข้าใจผิดได้ ถ้าเลือกค่า x ไม่ละเอียดพอ หรือมองกราฟในช่วงที่แคบไม่พอ ดังนั้นตารางและกราฟควรใช้เพื่อคาดเดาแนวโน้มเบื้องต้น แล้วจึงตรวจสอบด้วยเหตุผลทางคณิตศาสตร์เมื่อจำเป็น

ตัวอย่างที่ 1.3.9 ตารางค่าที่เตือนว่าไม่ควรรีบสรุปผล

พิจารณาฟังก์ชัน $F(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ จงอธิบายว่า $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$ มีอยู่หรือไม่

วิธีทำ ถ้าเลือกค่า x บางชุด อาจเห็นค่า $F(x)$ เป็น 1 ตลอด แต่ถ้าเลือกค่า x อีกชุดหนึ่ง ซึ่งยังเข้าใกล้ 0 เช่นกัน อาจเห็นค่า $F(x)$ เป็น -1 ตลอด ดังตารางต่อไปนี้

n	$x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$	$F(x)$	$x = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}$	$F(x)$
1	0.127324	1	0.090946	-1
2	0.070736	1	0.057875	-1
5	0.030315	1	0.027679	-1
10	0.015527	1	0.014805	-1



รูปที่ 1.3.4 กราฟของ $F(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ใกล้ $x = 0$

ค่า x ทั้งสองชุดเข้าใกล้ 0 จากด้านขวาเหมือนกัน แต่ค่า $F(x)$ เข้าใกล้คนละค่า ชุดหนึ่งให้ค่า 1 อีกชุดหนึ่งให้ค่า -1 ดังนั้น $F(x)$ ไม่ได้เข้าใกล้จำนวนเดียวเมื่อ x เข้าใกล้ 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ ไม่มีอยู่}$$

ตัวอย่างนี้แสดงว่า การดูตารางเพียงไม่กี่ค่าอาจไม่เพียงพอ โดยเฉพาะฟังก์ชันที่แกว่งอย่างรวดเร็ว ใกล้จุดที่สนใจ

การเข้าใจลิมิตควรเริ่มจากการมองพฤติกรรมของฟังก์ชันในสามรูปแบบ ได้แก่ ตารางค่า กราฟ และคำอธิบายด้วยภาษา ตารางช่วยให้เห็นแนวโน้มเชิงตัวเลข กราฟช่วยให้เห็นพฤติกรรมโดยรวมและภาษา ช่วยเชื่อมโยงสัญลักษณ์กับความหมายจริง

ลิมิตสองด้านจะมีอยู่ก็ต่อเมื่อค่าที่เข้าใกล้จากด้านซ้ายและด้านขวาเข้าใกล้จำนวนเดียวกัน ค่าของฟังก์ชันที่จุดนั้นอาจเท่ากับลิมิต ไม่เท่ากับลิมิต หรืออาจไม่ได้กำหนดไว้เลยก็ได้ ประเด็นสำคัญคือ ลิมิตพิจารณาพฤติกรรมรอบจุด ไม่ใช่เฉพาะค่าที่จุดนั้น

1.4 นิยามเชิงแนวคิดของลิมิตและสัญลักษณ์ $\lim$ (Conceptual Meaning of Limits and the Symbol $\lim$)

ในหัวข้อก่อนหน้านี้ เราใช้ตาราง กราฟ และคำอธิบายด้วยภาษาเพื่อมองพฤติกรรมการเข้าใกล้ของฟังก์ชัน หัวข้อนี้จะจัดแนวคิดเหล่านั้นให้อยู่ในรูปข้อความทางคณิตศาสตร์ โดยใช้สัญลักษณ์ $\lim$ เป็นภาษากลางในการสื่อสาร

คำว่า “ลิมิต” ไม่ได้ถามเพียงว่าฟังก์ชันมีค่าเท่าใดที่จุดหนึ่ง แต่ถามว่าเมื่อค่าของตัวแปรอิสระเข้าใกล้จุดนั้น ค่าเอาต์พุตของฟังก์ชันเข้าใกล้จำนวนใด แนวคิดนี้เป็นพื้นฐานของการอธิบายการเปลี่ยนแปลงในแคลคูลัส

ความหมายเชิงแนวคิดของลิมิต

ให้ f เป็นฟังก์ชัน และให้ a เป็นจำนวนจริงที่สนใจ ถ้าเมื่อ x เข้าใกล้ a จากทั้งสองด้าน แล้วค่า $f(x)$ เข้าใกล้จำนวน L จำนวนเดียวกัน เราเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

อ่านว่า “ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a เท่ากับ L ” ข้อความนี้เน้นพฤติกรรมของ $f(x)$ เมื่อ x อยู่ใกล้ a โดยทั่วไปไม่จำเป็นต้องให้ x เท่ากับ a และไม่จำเป็นต้องให้ $f(a)$ มีค่าเท่ากับ L

การอ่านสัญลักษณ์ $\lim$

สัญลักษณ์ $\lim$ มีสามส่วนหลัก คือ ฟังก์ชันที่ต้องการศึกษา ค่าที่ตัวแปรเข้าใกล้ และค่าที่ฟังก์ชันเข้าใกล้ เช่น $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5$ หมายความว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ค่า $x^2 + 1$ เข้าใกล้ 5

การอ่านสัญลักษณ์ให้ถูกต้องช่วยลดความเข้าใจผิดที่พบบ่อย เช่น การคิดว่า x ต้องเท่ากับ a แทนที่ หรือคิดว่าลิมิตต้องเท่ากับค่าฟังก์ชันที่จุดนั้นเสมอ ทั้งสองข้อไม่ถูกต้องในทุกกรณี

ตัวอย่างที่ 1.4.1 การอ่านสัญลักษณ์ลิมิตจากฟังก์ชันเชิงเส้น

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = 2x + 1$ จงอธิบายความหมายของสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$ ด้วยภาษา และตรวจสอบจากค่าของฟังก์ชันใกล้ $x = 3$

วิธีทำ เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ค่า $f(x)$ ควรเข้าใกล้ 7 เพราะถ้าแทนค่า x ที่ใกล้ 3 ใน $f(x) = 2x + 1$ จะได้ค่าที่ใกล้ $2(3) + 1 = 7$ ดังตาราง

x	$f(x)$
2.9	6.8
2.99	6.98
2.999	6.998
3.001	7.002
3.01	7.02
3.1	7.2

จากตาราง เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ทั้งจากด้านซ้ายและด้านขวา ค่า $f(x)$ เข้าใกล้ 7 จึงเขียนได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$

ตัวอย่างที่ 1.4.2 การคาดเดาลิมิตของฟังก์ชันพหุนาม

ให้ $f(x) = x^2 - 4x + 1$ จงคาดเดาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

วิธีทำ เลือกค่า x ที่อยู่ใกล้ 2 แล้วคำนวณค่า $f(x)$ ดังตาราง

x	$f(x)$
1.9	-2.99
1.99	-2.9999

1.999	-2.999999
2.001	-2.999999
2.01	-2.9999
2.1	-2.99

ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ -3 เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 1) = -3$
ฟังก์ชันพหุนามมักมีพฤติกรรมเรียบต่อเนื่อง จึงคาดเดาขีดจำกัดได้ชัดจากค่าที่อยู่ใกล้จุดนั้น

ตัวอย่างที่ 1.4.3 ลิมิตของฟังก์ชันเศษส่วนที่นิยามไม่ได้ ณ จุดที่สนใจ

ให้ $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ เมื่อ $x \neq 3$ จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ในเชิงแนวคิด

วิธีทำ ที่ $x = 3$ นิพจน์เดิมนิยามไม่ได้ เพราะตัวส่วนเป็นศูนย์ แต่ลิมิตตามพฤติกรรมเมื่อ x เข้าใกล้ 3 โดยที่ x ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ 3 สำหรับ $x \neq 3$ เราแยกตัวประกอบได้ว่า

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$$

ดังนั้นเมื่อ x เข้าใกล้ 3 ค่า $x + 3$ เข้าใกล้ 6 จึงได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

ตัวอย่างนี้ย้ำว่า ลิมิตอาจมีอยู่ แม้ฟังก์ชันเดิมจะไม่มีค่าที่จุดนั้น

ตัวอย่างที่ 1.4.4 ลิมิตกับค่าของฟังก์ชันที่จุดเดียวกันอาจไม่เท่ากัน

กำหนดฟังก์ชัน g โดย $g(x) = x + 1$ เมื่อ $x \neq 2$ และ $g(2) = 10$ จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ และเปรียบเทียบกับ $g(2)$

วิธีทำ เมื่อตัวแปร x เข้าใกล้ 2 แต่ไม่เท่ากับ 2 ฟังก์ชันใช้กฎ $g(x) = x + 1$ ดังนั้นค่า $g(x)$ เข้าใกล้ 3 ส่วนค่าที่จุด $x = 2$ ถูกกำหนดแยกไว้เป็น 10

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \text{ แต่ } g(2) = 10$$

จึงเห็นได้ว่า ลิมิตพิจารณาค่ารอบ ๆ จุด ส่วนค่าของฟังก์ชันพิจารณาค่าที่จุดนั้นโดยตรง
สองอย่างนี้อาจไม่เท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1.4.5 ลิมิตของฟังก์ชันที่มีรากที่สอง

ให้ $h(x) = \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$ เมื่อ $x \neq 5$ จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 5} h(x)$

วิธีทำ ถ้าแทน $x=5$ โดยตรงในนิพจน์เดิม จะได้ $\frac{0}{0}$ ซึ่งยังไม่ใช่คำตอบของลิมิต ให้จัดรูปโดยคูณด้วยพจน์ร่วมสังยุค

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+4}+3} &= \frac{(x+4)-9}{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)} \\ &= \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+4}+3} \quad \text{เมื่อ } x \neq 5 \end{aligned}$$

เมื่อ x เข้าใกล้ 5 ค่า $\sqrt{x+4}$ เข้าใกล้ 3 ดังนั้นตัวส่วนเข้าใกล้ 6 จึงได้

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} = \frac{1}{6}$$

ตัวอย่างที่ 1.4.6 กรณีที่ลิมิตสองด้านไม่มีอยู่จากฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์

ให้ $p(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ เมื่อ $x \neq 1$ จงพิจารณาว่า $\lim_{x \rightarrow 1} p(x)$ มีอยู่หรือไม่

วิธีทำ ถ้า $x > 1$ จะได้ $|x-1| = x-1$ ดังนั้น $p(x) = 1$ แต่ถ้า $x < 1$ จะได้ $|x-1| = -(x-1)$ ดังนั้น

$$p(x) = -1$$

ด้านที่เข้าใกล้	พฤติกรรมของ $p(x)$
x เข้าใกล้ 1 จากด้านซ้าย	$p(x)$ เข้าใกล้ -1
x เข้าใกล้ 1 จากด้านขวา	$p(x)$ เข้าใกล้ 1

ค่าที่เข้าใกล้จากสองด้านไม่ตรงกัน จึงไม่สามารถเขียนลิมิตสองด้านเป็นจำนวนเดียวได้ ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} \text{ ไม่มีอยู่}$$

หัวข้อถัดไปจะอธิบายเรื่องลิมิตด้านซ้ายและลิมิตด้านขวาอย่างเป็นระบบ

ตัวอย่างที่ 1.4.7 ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตารางค่า

พิจารณาฟังก์ชัน $q(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$ เมื่อ θ วัดเป็นเรเดียน จงคาดเดาค่า $\lim_{\theta \rightarrow 0} q(\theta)$

วิธีทำ คำนวณค่า $q(\theta)$ เมื่อ θ เข้าใกล้ 0 จากทั้งสองด้าน จะได้ค่าประมาณดังตาราง

θ	$\frac{\sin \theta}{\theta}$
-0.1	0.9983
-0.01	0.99998
-0.001	1.00000
0.001	1.00000
0.01	0.99998
0.1	0.9983

ค่าที่ได้เข้าใกล้ 1 เมื่อ θ เข้าใกล้ 0 จึงคาดเดาได้ว่า $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$

ผลนี้เป็นลิมิตสำคัญที่จะใช้มากในการศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตัวอย่างที่ 1.4.8 ลิมิตของฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลจากการเข้าใกล้ศูนย์

ให้ $r(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$ จงคาดเดาค่า $\lim_{x \rightarrow 0} r(x)$ จากตารางค่า

วิธีทำ แทนค่า x ที่ใกล้ 0 จากด้านซ้ายและด้านขวา จะได้ค่าประมาณดังนี้

x	$\frac{e^x - 1}{x}$
-0.1	0.9516
-0.01	0.9950
-0.001	0.9995
0.001	1.0005
0.01	1.0050
0.1	1.0517

ค่าของ $r(x)$ เข้าใกล้ 1 เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ดังนั้นจากข้อมูลเชิงตัวเลขจึงคาดเดาได้ว่า

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ผลนี้เชื่อมโยงกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน e^x

ตัวอย่างที่ 1.4.9 ลิมิตในบริบทของอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย

วัตถุเคลื่อนที่ตามสมการระยะทาง $s(t) = t^2 + 3t$ เมตร เมื่อ t มีหน่วยเป็นวินาที จงเขียนอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยจาก $t = 2$ ถึง t และหาค่าที่อัตราเข้าใกล้เมื่อ t เข้าใกล้ 2

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยจาก $t = 2$ ถึง t คือ

$$\frac{s(t) - s(2)}{t - 2}$$

คำนวณได้ว่า $s(2) = 2^2 + 3(2) = 10$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{s(t) - s(2)}{t - 2} &= \frac{(t^2 + 3t) - 10}{t - 2} \\ &= \frac{t^2 + 3t - 10}{t - 2} \\ &= \frac{(t - 2)(t + 5)}{t - 2} \\ &= t + 5 \text{ เมื่อ } t \neq 2\end{aligned}$$

เมื่อ t เข้าใกล้ 2 ค่า $t + 5$ เข้าใกล้ 7 จึงได้ว่า

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2} = 7$$

ความหมายคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยเมื่อช่วงเวลาหัดเข้าใกล้ศูนย์มีแนวโน้มเข้าใกล้ 7 เมตรต่อวินาที แนวคิดนี้จะนำไปสู่อนุพันธ์ในบทถัดไป

ข้อควรระวังเกี่ยวกับลิมิต

ประการแรก การแทนค่าโดยตรงเป็นเพียงวิธีช่วยคาดเดาในบางกรณี ไม่ใช่เหตุผลที่ใช้ได้เสมอ ถ้าแทนแล้วได้รูป $\frac{0}{0}$ ต้องจัดรูปหรือใช้ข้อมูลอื่นประกอบ

ประการที่สอง การมีค่าฟังก์ชันที่จุด a ไม่ได้บอกวาลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้ a ต้องมีอยู่ และการไม่มีค่าฟังก์ชันที่จุด a ก็ไม่ได้แปลวาลิมิตต้องไม่มีอยู่

ประการที่สาม ลิมิตสองด้านจะมีอยู่ก็ต่อเมื่อค่าที่ฟังก์ชันเข้าใกล้จากด้านซ้ายและด้านขวาเป็นจำนวนเดียวกัน หากสองด้านให้ค่าต่างกัน จะไม่สามารถเขียนลิมิตสองด้านเป็นจำนวนเดียวได้

สัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ เป็นการบอกว่า เมื่อ x เข้าใกล้ a ค่า $f(x)$ เข้าใกล้ L แนวคิดนี้พิจารณาพฤติกรรมรอบจุด ไม่ใช่เฉพาะค่าที่จุดนั้น ลิมิตจึงเป็นเครื่องมือสำคัญในการอธิบายการเปลี่ยนแปลง ความต่อเนื่อง อนุพันธ์ และปริพันธ์ในหัวข้อต่อไป

1.5 ลิมิตด้านซ้ายและลิมิตด้านขวา (Left-Hand Limits and Right-Hand Limits)

ในหัวข้อก่อนหน้า เราใช้ตาราง กราฟ และคำอธิบายด้วยภาษาเพื่อมองค่าที่ฟังก์ชันเข้าใกล้จุดสำคัญอีกประการหนึ่งคือการเข้าใกล้จุดหนึ่งอาจเกิดได้สองทิศทาง บางครั้งค่าที่เข้าใกล้จากด้านซ้ายและด้านขวาเหมือนกัน แต่บางครั้งไม่เหมือนกัน ความแตกต่างนี้ทำให้เราต้องแยกพิจารณาลิมิตด้านซ้ายและลิมิตด้านขวา

ลิมิตด้านซ้ายพิจารณาค่า $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a โดยใช้ค่า x ที่น้อยกว่า a ส่วนลิมิตด้านขวาพิจารณาค่า $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a โดยใช้ค่า x ที่มากกว่า a แนวคิดนี้สำคัญมากเมื่อฟังก์ชันมีนิยามเป็นช่วง มีการกระโดดของกราฟ หรือมีโดเมนเพียงด้านเดียวของจุดที่สนใจ

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

สัญลักษณ์นี้อ่านว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a จากด้านซ้าย มีค่าเท่ากับ L

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = M$$

สัญลักษณ์นี้อ่านว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a จากด้านขวา มีค่าเท่ากับ M

ถ้าลิมิตด้านซ้ายและลิมิตด้านขวามีอยู่ และมีค่าเท่ากัน เราจึงกล่าวได้ว่าลิมิตสองด้านมีอยู่

โดยเขียนว่า

$$\text{ถ้า } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \text{ แล้ว } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

ในทางกลับกัน ถ้าลิมิตด้านซ้ายและลิมิตด้านขวามีค่าไม่เท่ากัน หรือมีด้านใดด้านหนึ่งไม่มีอยู่ จะสรุปไม่ได้ว่าลิมิตสองด้านมีอยู่ ประเด็นนี้ช่วยให้นิสิตเห็นว่า ลิมิตไม่ใช่เพียงการแทนค่า $x = a$ แต่เป็นการพิจารณาพฤติกรรมของฟังก์ชันเมื่อ x เคลื่อนเข้าใกล้ a

ความหมายจากตารางและกราฟ

ในการคำนวณเบื้องต้น เรามักดูค่าของฟังก์ชันใกล้จุดที่สนใจจากสองฝั่ง ตารางด้านซ้ายใช้ค่า x ที่น้อยกว่า a และเข้าใกล้ a มากขึ้น ส่วนตารางด้านขวาใช้ค่า x ที่มากกว่า a และเข้าใกล้ a มากขึ้น ถ้าค่าของฟังก์ชันจากสองฝั่งเข้าใกล้จำนวนเดียวกัน เรามีเหตุผลที่จะคาดว่าลิมิตสองด้านมีอยู่

ในเชิงกราฟ ลิมิตด้านซ้ายคือความสูงของกราฟเมื่อเราเดินตามกราฟจากซ้ายเข้าหา $x = a$ ส่วนลิมิตด้านขวาคือความสูงของกราฟเมื่อเราเดินตามกราฟจากขวาเข้าหา $x = a$ จุดที่ $x = a$ จะมีค่าหรือไม่ก็ได้ เพราะลิมิตมองค่าที่อยู่ใกล้จุดนั้น ไม่ได้มองเฉพาะค่าที่จุดนั้น