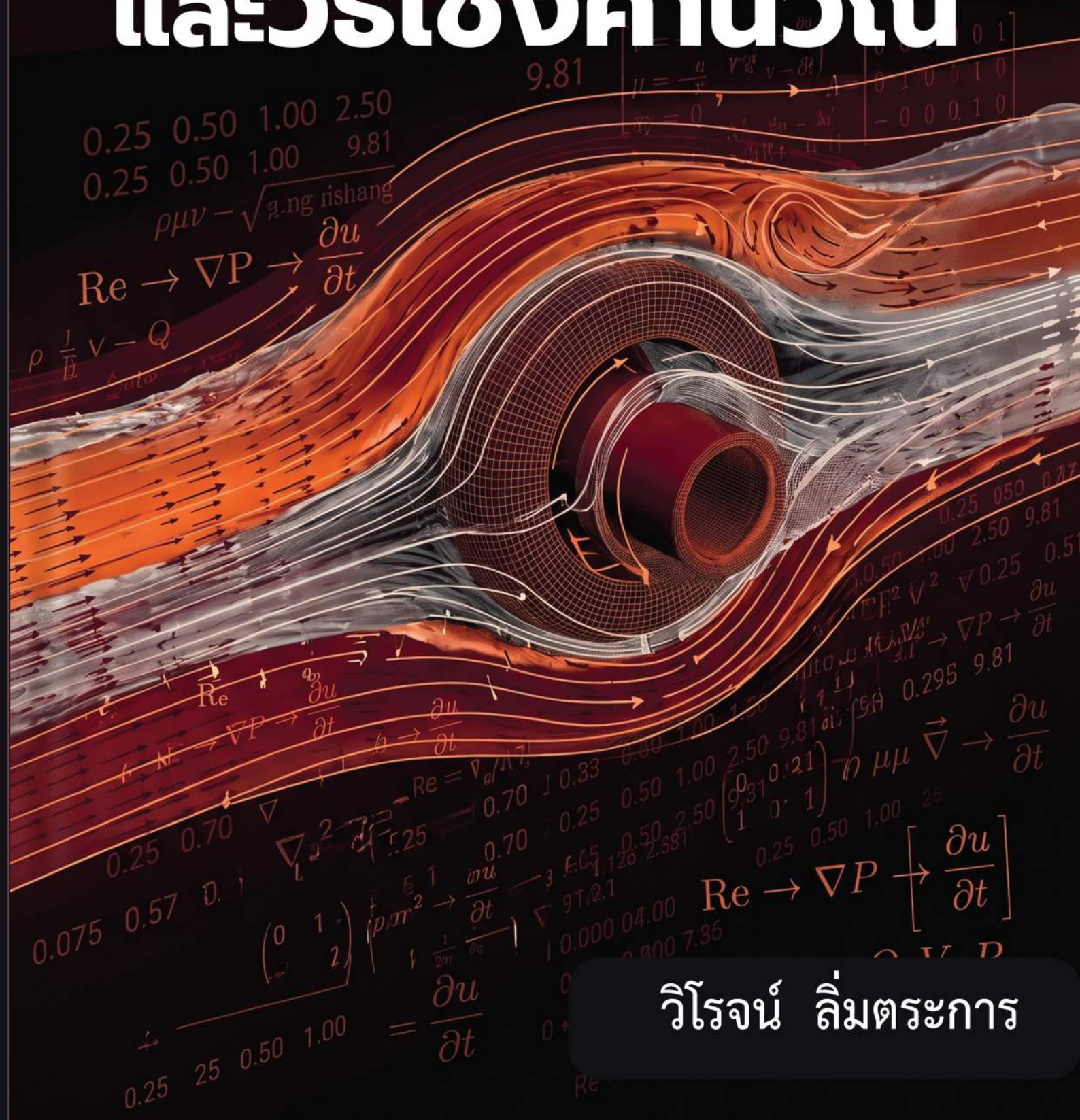




กลศาสตร์ของไหล และวิธีเชิงคำนวณ



วิโรจน์ ลิ้มตระการ

กลศาสตร์ของไหลและวิธีเชิงคำนวณ

กลศาสตร์ของไหลและวิธีเชิงคำนวณ

วิโรจน์ ลิ้มตระการ

วิโรจน์ ลิ้มตระการ

กลศาสตร์ของไหลและวิธีเชิงคำนวณ

ISBN (e-book) 978-616-637-409-4

ลิขสิทธิ์ของ รองศาสตราจารย์ ดร.วิโรจน์ ลิ้มตระการ แต่ผู้เดียว
ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2569

จัดทำและจัดจำหน่ายโดย รองศาสตราจารย์ ดร.วิโรจน์ ลิ้มตระการ

ร้านค้าติดต่อ รองศาสตราจารย์ ดร.วิโรจน์ ลิ้มตระการ
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ (ศูนย์รังสิต)
โทร. 081-4275859 อีเมล: wirojlimtrakarn@gmail.com

รายละเอียดการชำระเงินสำหรับสั่งซื้อหนังสือ

กรุณาโอนเงินเข้าบัญชี ชื่อบัญชี: นายวิโรจน์ ลิ้มตระการ
ธนาคาร: ธนาคารกรุงเทพ
สาขา: มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์-รังสิต
เลขที่บัญชี: 091-0-88255-4
ประเภทบัญชี: ออมทรัพย์

หลังโอนเงินแล้ว กรุณาส่งหลักฐานการโอน มาที่ **อีเมล: wirojlimtrakarn@gmail.com**
พร้อมแจ้งอีเมลสำหรับรับไฟล์ eBook

ออกแบบปกและออกแบบรูปเล่ม : นางสาวไกรอัมพร พงษ์ขจร

ราคาเล่มละ 214.- บาท

คำนำ

ปัจจุบันผลิตภัณฑ์ เครื่องมืออุปกรณ์ นวัตกรรมและงานทางวิศวกรรมจำนวนมากมีความเกี่ยวข้องกับของไหล ทำให้วิศวกรในหลายสาขา หรือกลุ่มนักออกแบบผลิตภัณฑ์และนักนวัตกรรมดังกล่าว จำเป็นต้องเข้าใจถึงทฤษฎีที่อธิบายพฤติกรรมของของไหลในแต่ละสถานการณ์ คุณสมบัติของของไหลที่เปลี่ยนแปลงไป รวมไปถึงวิธีเชิงคำนวณที่ใช้หาพฤติกรรม หรือคุณสมบัติของของไหล และสามารถนำความรู้ดังกล่าวไปประยุกต์ในงานหรือผลิตภัณฑ์ของตนเองได้ตามที่ต้องการ

ตำรากลศาสตร์ของไหลและวิธีเชิงคำนวณเล่มนี้ ได้เรียบเรียงจากเอกสารคำสอนที่ผู้เขียนใช้สอนและประสบการณ์ในการทำวิจัยในหลายสิบปีที่ผ่านมา โดยเนื้อหาจะกล่าวถึงทฤษฎีที่ควรรู้เกี่ยวกับพฤติกรรมของไหลที่หยุดนิ่ง หรือที่เรียกว่าของไหลสถิต พฤติกรรมของไหลเมื่อเกิดการเคลื่อนที่ ชนิดของการเคลื่อนที่ของของไหล รูปแบบการไหล สมการคณิตศาสตร์ที่ใช้หาคุณสมบัติของของไหลที่เปลี่ยนแปลงไป จนไปถึงการอธิบายวิธีเชิงตัวเลขและระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องเพื่อใช้คำนวณหาคำตอบของปัญหาการไหลแบบศักย์ ทั้งใน 1 มิติ และ 2 มิติ โดยผู้เขียนได้พัฒนาโปรแกรมการคำนวณด้วยระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง ผู้อ่านสามารถนำโปรแกรมดังกล่าวไปใช้หรือพัฒนาต่อในงานของตนเองต่อไป ผู้เขียนได้แสดงรายละเอียดของโปรแกรมไว้ในบทที่ 9 และในบทที่ 10 กล่าวถึงกรณีศึกษาการประยุกต์ใช้ในงานวิศวกรรม

เนื้อหาในหนังสือเล่มนี้ นับตั้งแต่ข้อความ สมการ และรูปภาพต่างๆ ได้จัดทำขึ้นบนเครื่องคอมพิวเตอร์ของผู้เขียนเองทั้งหมด จากประสบการณ์การสอนและการทำวิจัยตลอดระยะเวลาหลายสิบปีที่ผ่านมา นอกจากนั้นผู้เขียนขอขอบคุณสมาชิกทุกท่านของหน่วยวิจัยกลศาสตร์การคำนวณ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ได้แก่ นายบรรจง เตชะพานิชกุล นายอนุวัฒน์ ยอดแสงคำ นางสาวสุภารัตน์ รัตนานนท์ นางสาวอโนชา นามเหลา นายพีรศิษฐ์ บุญมงคลรักษา นายปพน พุทธธนาศักดิ์ นายศิษฐ์ นวลศิริโกมล นายวงศกร ภัคดีพิณี และนายปริญญ์ พงษ์ทอง ที่ช่วยอ่านตรวจทานต้นฉบับแรก

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาที่สนับสนุนผู้เขียนในด้านการศึกษามาโดยตลอด คอยปลุกฝังให้ผู้เขียนมีความเพียรและอดุสาหะตั้งแต่เยาว์วัย รวมถึงพี่ชายทั้งสองที่ให้การสนับสนุนและให้คำปรึกษาด้วยดีตลอดมา และท้ายสุดขอขอบคุณภรรยาและบุตรทั้งสอง คุณพรสุภา พยัคฆพันธ์ แพทย์หญิงญาณิศา ลิ้มตระกูล และนายแพทย์วิศรุต ลิ้มตระกูล ที่เข้าใจในความตั้งใจของผู้เขียน คอยสนับสนุนและให้กำลังใจ รวมทั้งให้โอกาสผู้เขียนได้ใช้เวลาในการเขียนและปรับปรุงหนังสือ e-book เล่มนี้ ในช่วงระยะเวลาหลายเดือนที่ผ่านมา

วิโรจน์ ลิ้มตระกูล

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

กันยายน 2569

สารบัญ

คำนำ

สารบัญ

บทที่ 1	ก้าวแรกสู่กลศาสตร์ของไหลและวิธีเชิงคำนวณ	1
1.1	บทนำ	1
1.2	ของไหลคืออะไร	3
1.3	ประโยชน์ของการศึกษากลศาสตร์ของไหล	6
1.4	วิธีเชิงคำนวณ	9
1.5	ระบบของหน่วย	10
1.6	คุณสมบัติของของไหล	15
1.7	สรุป	30
	แบบฝึกหัด	31
บทที่ 2	สแตกติกส์ของไหล	35
2.1	บทนำ	35
2.2	สมการสแตกติกส์เบื้องต้น	35
2.3	การหาแรงกระทำบนแผ่นเรียบที่จมอยู่ในของไหลสถิต	47
2.4	แรงดันบนพื้นผิวโค้งที่จมอยู่ในของไหลสถิต	57
2.5	แรงลอยตัวของวัตถุในของไหลสถิต	62
2.6	เสถียรภาพการลอยตัวของวัตถุในของไหลสถิต	64
2.7	พฤติกรรมของไหลสถิตในภาชนะเคลื่อนที่แนวเส้นตรง	71
2.8	พฤติกรรมของไหลสถิตในภาชนะหมุน	75
2.9	สรุป	77
	แบบฝึกหัด	78

บทที่ 3 จลนศาสตร์ของไหล	87
3.1 บทนำ	87
3.2 ชนิดของการไหล	87
3.3 รูปแบบความเร็วและความเร่งของการไหล	93
3.4 การเคลื่อนที่ของอนุภาคของไหล	99
3.5 การเคลื่อนที่ของมวลของไหล	103
3.6 ปริมาตรควบคุมและระบบของไหล	113
3.7 ทฤษฎีการส่งผ่านแบบเบรย์โนลด์	114
3.8 สรุป	120
แบบฝึกหัด	121
 บทที่ 4 สมการนาเวียร์-สโตค	 125
4.1 บทนำ	125
4.2 การเปลี่ยนแปลงมวลในโดเมนการไหล	125
4.3 การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมในโดเมนการไหล	130
4.4 การเปลี่ยนแปลงพลังงานในโดเมนการไหล	139
4.5 สมการอนุรักษ์มวล	142
4.6 สมการอนุรักษ์โมเมนตัม	144
4.7 สมการนาเวียร์-สโตค	146
4.8 สรุป	147
แบบฝึกหัด	148
 บทที่ 5 การวิเคราะห์มิติ แบบจำลองและความคล้ายคลึงกัน	 159
5.1 บทนำ	159
5.2 การวิเคราะห์มิติ	160
5.3 แบบจำลองและความคล้ายคลึง	173
5.4 การประยุกต์ความคล้ายคลึงกับสมการนาเวียร์ – สโตกส์	178

5.5 สรุป	180
แบบฝึกหัด	181
บทที่ 6 สมการเบอร์นูลลีและการไหลแบบศักย์	185
6.1 บทนำ	185
6.2 สมการเบอร์นูลลี	185
6.3 ความสัมพันธ์ของความเร็วและความดัน	188
6.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้สมการเบอร์นูลลี	191
6.5 การไหลแบบศักย์	197
6.6 รูปแบบปัญหาการไหลแบบศักย์อย่างง่าย	201
6.7 รูปแบบปัญหาการไหลแบบศักย์ที่ซับซ้อน	211
6.8 สรุป	222
แบบฝึกหัด	223
บทที่ 7 การไหลภายในแบบหนืดและอัดตัวไม่ได้	227
7.1 บทนำ	221
7.2 การไหลแบบราบเรียบที่พัฒนาเต็มที่	228
7.3 การสูญเสียพลังงานของการไหลภายในท่อ	242
7.4 การคำนวณหาความสูญเสียเสียดหลักและรอง	244
7.5 การไหลในท่อที่มีพื้นที่หน้าตัดไม่ใช่วงกลม	259
7.6 สรุป	260
แบบฝึกหัด	261
บทที่ 8 วิธีเชิงตัวเลข	265
8.1 บทนำ	265
8.2 ฟังก์ชันการประมาณค่าภายใน	266
8.3 การหาค่าอินทิกรัลเชิงตัวเลข	276

8.4	การหาค่าอนุพันธ์เชิงตัวเลข	279
8.5	การแก้ระบบสมการเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น	283
8.6	สรุป	291
	แบบฝึกหัด	292
บทที่ 9	ระเบียบวิธีผลต่างสลับเนื่อง	293
9.1	บทนำ	293
9.2	ระเบียบวิธีผลต่างสลับเนื่องสำหรับปัญหาใน 1 มิติ	293
9.3	การประยุกต์ระเบียบวิธีผลต่างสลับเนื่องกับปัญหาการไหลแบบศักย์ ใน 2 มิติ	301
9.4	ลักษณะของโปรแกรม POFLOW2D	306
9.5	รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์	307
9.6	ลักษณะข้อมูลที่โปรแกรม POFLOW2D ต้องการ	312
9.7	ตัวอย่าง	313
9.8	สรุป	318
	แบบฝึกหัด	319
บทที่ 10	กรณีศึกษาการประยุกต์ใช้ในงานวิศวกรรม	321
10.1	บทนำ	321
10.2	เทคนิคการสร้างภาพการไหลด้วยฟองไฮโดรเจน	322
10.3	การไหลผ่านทรงกระบอก	323
10.4	การไหลผ่านแพนอากาศ	325
10.5	การไหลผ่านแบบจำลองรถยนต์ไอโค 5 ประตู	327
10.6	การไหลแบบธรรมชาติของโรงเรือนเพาะปลูกพืชแบบเปิด	328
10.7	การไหลอากาศ 3 มิติในห้องสะอาด	339
10.8	สรุป	345
	แบบฝึกหัด	346

บรรณานุกรม	349
ผนวก ก การแปลงหน่วย	351
ผนวก ข คุณสมบัติของของไหล	357
ผนวก ค คุณสมบัติเรขาคณิต	364
ดัชนี	367
ประวัติผู้เขียน	371

สารบัญตาราง

ตาราง 1.1	แสดงตัวอย่างหน่วยปฐมภูมิในระบบหน่วยสากล (SI Units) ระบบหน่วย อังกฤษแบบโน้มถ่วง (British Gravitational System Units, BG Units) และระบบหน่วยอังกฤษ (English Engineering System Units, EE Units)	10
ตาราง 1.2	แสดงตัวอย่างหน่วยทุติยภูมิในระบบหน่วยสากล (SI Units)	11
ตาราง 1.3	แสดงสัญลักษณ์คำนำหน้าที่ยอมรับใช้ในระบบหน่วย	14
ตาราง 5.1	แสดงมิติของหน่วยที่ใช้ในกลศาสตร์ของไหล	162
ตาราง 5.2	ตัวอย่างตัวแปรไร้มิติที่มีใช้ในกลศาสตร์ของไหล	173
ตาราง 7.1	ค่าความหยาบของผิวท่อที่ทำจากวัสดุชนิดต่าง ๆ	246
ตาราง 7.2	สัมประสิทธิ์ การสูญเสียของการไหลผ่านท่อเข้าขนาดเล็ก	249
ตาราง 7.3	ค่าสัมประสิทธิ์การสูญเสียเมื่อมีการไหลผ่านท่อที่พื้นที่หน้าตัดค่อย ๆ ลดขนาด	250
ตาราง 7.4	ค่าสัมประสิทธิ์การสูญเสียของข้ออและข้อต่อแบบต่าง ๆ	251
ตาราง 7.5	ค่าสัมประสิทธิ์การสูญเสียของการไหลผ่านวาล์วชนิดต่าง ๆ	253
ตาราง 10.1	คุณสมบัติของอากาศที่หมู่บ้านแม่สาใหม่	331
ตาราง 10.2	ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่วัดได้ที่ระดับความสูงต่าง ๆ ในวันที่ 11 กุมภาพันธ์	331
ตาราง 10.3	การเจริญเติบโตและผลผลิตของพริกหวาน	338
ตาราง 10.4	เงื่อนไขขอบเขต	341
ตารางผนวก ก-1	ตัวแปลงหน่วย	352
ตารางผนวก ข-1	คุณสมบัติของน้ำ	358
ตารางผนวก ข-2	คุณสมบัติของชั้นบรรยากาศมาตรฐาน	360
ตารางผนวก ข-3	คุณสมบัติของของไหลที่ความดัน 1 บรรยากาศ และอุณหภูมิ 20°C	361
ตารางผนวก ค-1	คุณสมบัติเรขาคณิตของรูปทรงต่าง ๆ	364

สารบัญรูปภาพ

รูป 1.1	เส้นทางการไหลผ่านและระดับความดันของอากาศรอบตัวรถกระบะ	2
รูป 1.2	ถังที่มีแกนหมุนและตำแหน่งอนุภาคของแข็งขณะเริ่มออกแรงบิด (ก) และ (ข) และพฤติกรรมของอนุภาค เมื่อถูกแรงบิด T_1 จากภายนอก (ค) และ (ง)	4, 5
รูป 1.3	รายละเอียดของตัวอย่างการมองเหรียญกันแก้ว	8
รูป 1.4	แผนภาพการทำงานของระบบควบคุมแบบป้อนกลับแบบปรับตัวของหุ่นยนต์เคลื่อนที่ในระนาบ x - y แบบเอช-เฟรม	18
รูป 1.5	แผนภาพการทำงานของระบบหุ่นยนต์สำหรับงานทาสี	20
รูป 1.6	การระเหยและกลั่นตัวของของไหลในภาชนะเปิดและปิด	22
รูป 1.7	แรงต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นบนหยดน้ำทรงกลม	24
รูป 1.8	ตารางและกราฟความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิกับแรงตึงผิวของน้ำและอากาศ	25
รูป 1.9	เส้นรอยต่อของผิวรูปทรงต่าง ๆ	26
รูป 1.10	ลักษณะผิวสัมผัสระหว่างของไหลและของแข็ง	27
รูป 1.11	มุมสัมผัสระหว่างของไหลที่อยู่ภายในหลอด	28
รูป 1.12	ชุดหลอดคาพิลลารีต	29
รูป 2.1	ความดันในแนวแกน x กระทำต่อก้อนของไหลบนระนาบ xy	36
รูป 2.2	ความสัมพันธ์ของความดันและระยะ x แบบคงที่และเชิงเส้นตรง	37
รูป 2.3	ความดันในแนวแกน y กระทำต่อก้อนของไหลบนระนาบ xy	38
รูป 2.4	ความดันที่เกิดขึ้นบนผนังของถังบรรจุน้ำ	39
รูป 2.5	ความดันในแนวแกน z กระทำต่อก้อนของไหลบนระนาบ y - z	39
รูป 2.6	หลอดรูปตัว U บรรจุของไหล 3 ชนิด	40

รูป 2.7	ของไหล 2 ชนิดบรรจุอยู่ในกะเปาะ	41
รูป 2.8	การทำงานของมานอมิเตอร์	42
รูป 2.9	การทำงานของมานอมิเตอร์แบบเอียง	45
รูป 2.10	ถังเก็บน้ำ	46
รูป 2.11	แรงกระทำกับแผ่นเรียบแนวดิ่งที่ระดับความลึกต่างกัน	48
รูป 2.12	แรงกระทำต่อแผ่นเรียบวางตัวในแนวดิ่งและอยู่ใต้ของเหลว 2 ชนิด	50
รูป 2.13	รูปร่างใบเปิดปิดของวาล์วน้ำ	51
รูป 2.14	แผ่นเรียบวางมุมเอียง θ กับผิวน้ำ	52
รูป 2.15	แผ่นเรียบวางมุมเอียง θ กับผิวน้ำในระนาบ $y-z$ และ $x-y$	54
รูป 2.16	แผ่นสี่เหลี่ยมกั้นน้ำระดับความสูง h	55
รูป 2.17	แรงในแนวระดับที่กระทำกับพื้นผิวโค้งแต่ละด้านของวัตถุผิวโค้งที่จมอยู่ในของไหลสถิต	57
รูป 2.18	แรงในแนวดิ่งที่ลดลงที่กระทำกับพื้นผิวโค้ง AB ของวัตถุผิวโค้งที่จมอยู่ในของไหลสถิต	58
รูป 2.19	แรงในแนวดิ่งที่เพิ่มขึ้นที่กระทำกับพื้นผิวโค้ง BC และ CD ของวัตถุผิวโค้งที่จมอยู่ในของไหลสถิต	59
รูป 2.20	ผิวโค้งจมอยู่ในน้ำ	60
รูป 2.21	แรงกระทำต่อผิวโค้ง	61
รูป 2.22	แรงลอยตัวของวัตถุจมบางส่วนหรือทั้งหมดในของไหลสถิต	62
รูป 2.23	ทุ่นได้น้ำทรงกลม	63
รูป 2.24	แรงลอยตัวของวัตถุจมในของไหลสถิต 2 ชนิด	64
รูป 2.25	ลักษณะการลอยตัวและเอียงตัวของวัตถุที่อยู่ในสภาวะสมดุลเสถียร	65

รูป 2.26	ลักษณะการลอยตัวและเอียงตัวของวัตถุที่อยู่ในสภาวะไม่สมดุลเสถียร	67
รูป 2.27	วัตถุลอยเปลี่ยนตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลในแนวตั้ง	68
รูป 2.28	วัตถุลอยเปลี่ยนตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลในแนวนอน	69
รูป 2.29	พฤติกรรมของของไหลสถิตในภาชนะที่หยุดนิ่งและเคลื่อนที่แนวเส้นตรง	71
รูป 2.30	ภาชนะบรรจุสารเคมีวิ่งผ่านเนิน	74
รูป 2.31	พฤติกรรมของของไหลสถิตในภาชนะที่หยุดนิ่งและหมุน	76
รูป ป 2.1		78
รูป ป 2.2		79
รูป ป 2.3		79
รูป ป 2.4		80
รูป ป 2.5		80
รูป ป 2.6		81
รูป ป 2.7		81
รูป ป 2.8		82
รูป ป 2.9		82
รูป ป 2.10		83
รูป ป 2.11		83
รูป ป 2.12		84
รูป ป 2.13		84
รูป ป 2.15		85
รูป ป 2.16		85
รูป ป 2.17		86
รูป ป 2.18		86

รูป 3.1	การไหลผ่านแผ่นเรียบ	88
รูป 3.2	ความสัมพันธ์ของความเร็วและเวลาของการไหลแบบปั่นป่วนและอยู่ตัว	90
รูป 3.3	การไหลแบบพัฒนาเต็มที่แล้วใน 1 มิติ และการไหลใน 2 มิติ	91
รูป 3.4	การไหลใน 2 มิติ	92
รูป 3.5	การไหลใน 3 มิติ	92
รูป 3.6	เส้นทางการไหลและความเร็วของอนุภาค ก ใน 3 มิติ	94
รูป 3.7	ระบบแกนระนาบของเส้นกระแสการไหล	95
รูป 3.8	ขนาดและทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคของไหลบนเส้นกระแสการไหล	96
รูป 3.9	เส้นทางการไหลและเส้นอนุภาคไหลผ่าน	100
รูป 3.10	เส้นเวลาการไหล	101
รูป 3.11	เส้นและท่อกระแสการไหล	102
รูป 3.12	ลักษณะการเคลื่อนที่ของมวลของไหล (ก) การเคลื่อนที่ทั่วไปของมวลของไหล (ข) การเคลื่อนที่เชิงเส้น (ค) การหมุน (ง) การเสียรูปเชิงเส้น (จ) การเสียรูปเชิงมุม	104
รูป 3.13	ตำแหน่งมวลของไหลเมื่อเกิดการหมุน	105
รูป 3.14	การไหลวนของการไหล	108
รูป 3.15	การเสียรูปเชิงเส้นของมวลของไหล	109
รูป 3.16	ตำแหน่งมวลของไหลขนาด 1×1 ที่เวลา 0 และ 2 วินาที	110
รูป 3.17	รูปร่างมวลของไหลที่เสียรูปเชิงมุม	112
รูป 3.18	ปริมาตรควบคุมและระบบของการไหลในโดเมนการไหลผ่านท่อทรงกระบอก	113
รูป 3.19	การเคลื่อนที่ของระบบผ่านปริมาตรควบคุมของการไหลผ่านท่อทรงกระบอก	116
รูป 3.20	การซ้อนทับกันบางส่วนของระบบของไหลและปริมาตรควบคุม	117

รูป 4.1	มวลของไหลไหลเข้าและไหลออกจากถัง	127
รูป 4.2	ปริมาตรควบคุมที่มีการเคลื่อนที่	128
รูป 4.3	แรงที่เกิดขึ้นบนขอบเขตปริมาตรควบคุม	141
รูป 4.4	มวลไหลเข้าและออกจากปริมาตรควบคุมใด ๆ	142
รูป 4.5	ความเค้นที่เกิดขึ้นบนมวลของไหล	145
รูป ป 4.1		148
รูป ป 4.2		148
รูป ป 4.3		149
รูป ป 4.4		149
รูป ป 4.5		150
รูป ป 4.6		150
รูป ป 4.7		151
รูป ป 4.8		151
รูป ป 4.9		152
รูป ป 4.10		152
รูป ป 4.11		153
รูป ป 4.12		154
รูป ป 4.13		154
รูป ป 4.14		155
รูป ป 4.15		155
รูป ป 4.16		156
รูป ป 4.17		156
รูป ป 4.18		157
รูป ป 4.19		157

รูป 5.1	กราฟแสดงความสัมพันธ์ของแรงกระทำ F และความเร็ว V	161
รูป 5.2	กราฟแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรไร้มิติ $\frac{F}{\rho V^2 L^2}$ และ $\frac{\rho V L}{\mu}$	162
รูป 5.3	แบบจำลองรถยนต์ที่ลดขนาดลงมา 45 เท่า	174
รูป 5.4	ความคล้ายคลึงเชิงจลนศาสตร์ของการไหลผ่านทรงกระบอก	175
รูป ป 5.1		181
รูป ป 5.2		182
รูป ป 5.3		183
รูป ป 5.4		183
รูป ป 5.6		183
รูป ป 5.7		183
รูป ป 5.8		184
รูป 6.1	แรงกระทำต่อหนึ่งหน่วยมวลของไหลบนเส้นกระแสการไหล	186
รูป 6.2	การไหลภายในท่อ	189
รูป 6.3	การไหลผ่านท่อเวนทูรี	191
รูป 6.4	ลักษณะมีของไหลไหลออกจากรูด้านข้าง	192
รูป 6.5	การไหลแบบกัลกน้ำ	194
รูป 6.6	การไหลแบบกัลกน้ำร่วมกับการไหลออกจากรูข้างลักษณะ	195
รูป 6.7	การไหลแบบศักย์	198
รูป 6.8	เส้นฟังก์ชันศักย์คงที่และเส้นฟังก์ชันการไหลคงที่ในโดเมนการไหล	201
รูป 6.9	การไหลสมำเสมอในแนวราบและแนวเอียง	203
รูป 6.10	การไหลจากแหล่งให้ของไหลเข้าสู่โดเมนการไหลบนระนาบ ที่ขนานกับระนาบ xy	204

รูป 6.11	การไหลวนแบบธรรมชาติและแบบบังคับ	205
รูป 6.12	การไหลแบบดับเบิล	207
รูป 6.13	การไหลที่มีแหล่งให้มวลของไหลอยู่ในโดเมนการไหลสม่ำเสมอ	212
รูป 6.14	เส้นกระแสการไหลของปัญหาการไหลครึ่งรูป	214
รูป 6.15	ปัญหาการไหลที่มีดับเบิลที่อยู่ในโดเมนการไหลสม่ำเสมอ	215
รูป 6.16	เส้นกระแสการไหลของปัญหาการไหลที่มีดับเบิลที่อยู่ในโดเมนการไหลสม่ำเสมอ	216
รูป 6.17	เส้นกระแสการไหลหยุดนิ่งที่ดับเบิลระยะห่างต่าง ๆ	217
รูป 6.18	เส้นกระแสการไหลของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอกที่ไม่หมุนและหมุน	220
รูป ป 6.1		223
รูป ป 6.5		224
รูป ป 6.6		224
รูป ป 6.8		225
รูป 7.1	การไหลแบบราบเรียบภายในท่อที่เกิดการพัฒนาอย่างเต็มรูปแบบ	228
รูป 7.2	การไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานหยุดนิ่ง	230
รูป 7.3	แรงภายนอกกระทำต่อมวลของไหล	231
รูป 7.4	การไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานที่แผ่นบนเคลื่อนที่	234
รูป 7.5	การไหลในท่อกลม	237
รูป 7.6	แรงภายนอกกระทำต่อมวลของไหลในท่อ	238
รูป 7.7	การไหลภายในท่อวงแหวน	239
รูป 7.8	กราฟความสัมพันธ์ของเลขยกกำลัง n และค่าเรย์โนลด์ Re	240
รูป 7.9	รูปแบบการไหลแบบราบเรียบและปั่นป่วนภายในท่อ	241
รูป 7.10	การไหลภายในท่อ	243

รูป 7.11	แผนภาพโม่ดี	247
รูป 7.12	การสูญเสียที่เกิดขึ้นในท่อที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดอย่างฉับพลัน	250
รูป 7.13	การสูญเสียเฮดรอนเมื่อมีการไหลผ่านช่องอโค้งและหักมุม	251
รูป 7.14	ลักษณะการไหลในวาล์วขณะปิดสนิท เปิดครึ่งหนึ่ง และเปิดเต็มที่	252
รูป 7.15	ตัวอย่างวาล์วที่มีการใช้งาน	253
รูป 7.16	พฤติกรรมการไหลภายในท่อเพิ่มขนาด	255
รูป 7.17	ค่า C_p ของท่อเพิ่มขนาด	256
รูป ป 7.1		261
รูป ป 7.5		262
รูป ป 7.7		262
รูป ป 7.8		263
รูป ป 7.10		264
รูป 8.1	ผลเฉลยแบบเชิงเส้นใน 1 มิติบนพิกัด x และพิกัดธรรมชาติ ξ	266
รูป 8.2	ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์ 2 จุดต่อ	267
รูป 8.3	ค่าการเคลื่อนตัวและค่าความเครียดของสองเอลิเมนต์ติดกัน ที่ใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์แบบเชิงเส้น	269
รูป 8.4	ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์ 3 จุดต่อ	270
รูป 8.5	ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์แบบคาน 2 จุดต่อ	271
รูป 8.6	รูปร่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยม	272
รูป 8.7	ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม 3 จุดต่อ	272
รูป 8.8	รูปร่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบไร้ 3 จุดต่อที่ขอบของเอลิเมนต์ และ 6 จุดต่อ	273
รูป 8.9	รูปร่างเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม 4 จุดต่อ บนพิกัด $x - y$ และพิกัดธรรมชาติ $\xi - \eta$	273

รูป 8.10	รูปร่างเอลิเมนต์ทรงสี่หน้า บนพิกัด $x - y - z$	274
รูป 8.11	รูปร่างเอลิเมนต์ทรงหกหน้าบนพิกัด $x - y - z$ และพิกัดธรรมชาติ $\xi - \eta - \zeta$	275
รูป 8.12	สมการเชิงเส้น 1 มิติบนพิกัด x และพิกัดธรรมชาติ ξ	276
รูป 8.13	ค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันเชิงเส้น 1 มิติบนพิกัดธรรมชาติ ξ	277
รูป 8.14	ค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันเชิงเส้น 1 มิติ บนพิกัดธรรมชาติ ξ ที่ใช้จุดเกาส์ 2 จุด	278
รูป 8.15	ค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันเชิงเส้น 2 มิติ บนพิกัดธรรมชาติ ξ ที่ใช้จุดเกาส์ 2 จุด	279
รูป 8.16	ค่าการเคลื่อนตัว ความเร็ว และความเร่ง ที่สัมพันธ์กับเวลา	280
รูป 8.17	ค่าอนุพันธ์แบบไปข้างหน้าของค่าการเคลื่อนที่สัมพันธ์กับเวลาช่วง 0 ถึง t_2	281
รูป 8.18	ค่าอนุพันธ์แบบย้อนหลังและตรงกลางของค่าการเคลื่อนที่สัมพันธ์กับเวลาช่วง 0 ถึง t_2	282
รูป 8.19	คำตอบแบบประมาณตามวิธีของออยเลอร์	283
รูป 8.20	ฟังก์ชันนูน	288
รูป 9.1	เงื่อนไขขอบเขตการไหล	294
รูป 9.2	คำตอบแบบประมาณของระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม	296
รูป 9.3	ตำแหน่งของจุดต่อในปัญหา 1 มิติ	296
รูป 9.4	ตำแหน่งจุดต่อต่าง ๆ ของปัญหา	297
รูป 9.5	กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงกับคำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม	298
รูป 9.6	การจัดแบ่งจุดต่อบนพื้นที่การคำนวณ	302
รูป 9.7	แผนภาพสมการของระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม	303
รูป 9.8	แผ่นสี่เหลี่ยมขนาด 2 เมตร $\times$ 3 เมตรและรูปแบบผลต่างสี่เหลี่ยม	304
รูป 9.9	แสดงขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมการไหลแบบศักย์ POFLOW2D	307

รูป 9.10	แผ่นสี่เหลี่ยมและรูปแบบผลต่างสี่เหลี่ยม	313
รูป 9.11	พื้นที่สี่เหลี่ยมที่มีทอสี่เหลี่ยมตรงกลางและรูปแบบผลต่างสี่เหลี่ยม	316
รูป 9.12	ลักษณะการกระจายฟังก์ชันศักย์บนพื้นที่สี่เหลี่ยมที่มีทอสี่เหลี่ยมตรงกลาง	317
รูป ป 9.6		319
รูป 10.1	เทคนิคการสร้างภาพการไหลด้วยฟองไฮโดรเจน (hydrogen bubble flow visualization technique)	322
รูป 10.2	ของไหลไหลผ่านท่อทรงกระบอกที่วางขวางการไหล	324
รูป 10.3	เปรียบเทียบการไหลรอบทรงกระบอก	325
รูป 10.4	ลักษณะปัญหาการไหลผ่านแพนอากาศที่มุมปะทะ 15 และ 35 องศา	325
รูป 10.5	พฤติกรรมของการไหลผ่านแพนอากาศที่มุมปะทะ 15 และ 35 องศา	326
รูป 10.7	เปรียบเทียบผลการไหลผ่านรถยนต์ไอโค 5 ประตู	327
รูป 10.8	การกระจายความดันรอบรถยนต์ไอโค 5 ประตู	328
รูป 10.9	รูปแบบโครงสร้างโรงเรือนแบบทรงโค้ง (arch type)	330
รูป 10.10	ตำแหน่งติดตั้งเซ็นเซอร์วัดอุณหภูมิ ความชื้น และสถานีตรวจวัดสภาพอากาศ	330
รูป 10.11	อุณหภูมิเฉลี่ยของโรงเรือนแบบโค้ง ณ วันที่ 11 กุมภาพันธ์	332
รูป 10.12	ความเร็วและทิศทางลมในวันที่ 11 กุมภาพันธ์	333
รูป 10.13	เวกเตอร์ความเร็วการไหลของอากาศในโรงเรือนเพาะชำแบบหลังคาโค้ง	333
รูป 10.14	เปรียบเทียบอุณหภูมิระหว่างข้อมูลที่ได้จากการจำลองและวัดจริง	334
รูป 10.15	รูปแบบโรงเรือนเพาะชำแบบหลังคาสองระดับ	335
รูป 10.16	เวกเตอร์ความเร็วการไหลของอากาศในโรงเรือนเพาะชำ แบบหลังคาสองระดับ	336
รูป 10.17	การเปรียบเทียบอุณหภูมิที่วัดได้จากโรงเรือนเพาะชำทั้งสองรูปแบบ	337

รูป 10.18	แสดงลักษณะของห้องสะอาด	340
รูป 10.19	ลักษณะของแบบจำลองห้องสะอาดอย่างง่าย	341
รูป 10.20	เงื่อนไขขอบเขตของห้องสะอาดอย่างง่าย	342
รูป 10.21	เวกเตอร์ความเร็ว	343
รูป 10.22	ตำแหน่งเส้นอ้างอิง 2 เส้น	344
รูป ป 10.1	การไหลในท่อลมและมีใบพัดนำทางที่ข้องอ 90°	346
รูป ป 10.2	การกระจายความดันในชุดท่อแลกเปลี่ยนความร้อนแบบ in-line	346
รูป ป 10.3	การกระจายความดันในชุดท่อแลกเปลี่ยนความร้อนแบบแถว และหลักเยื้องกัน	347
รูป ป 10.4	การไหลผ่านชุดอาคาร 3 ตึก	347

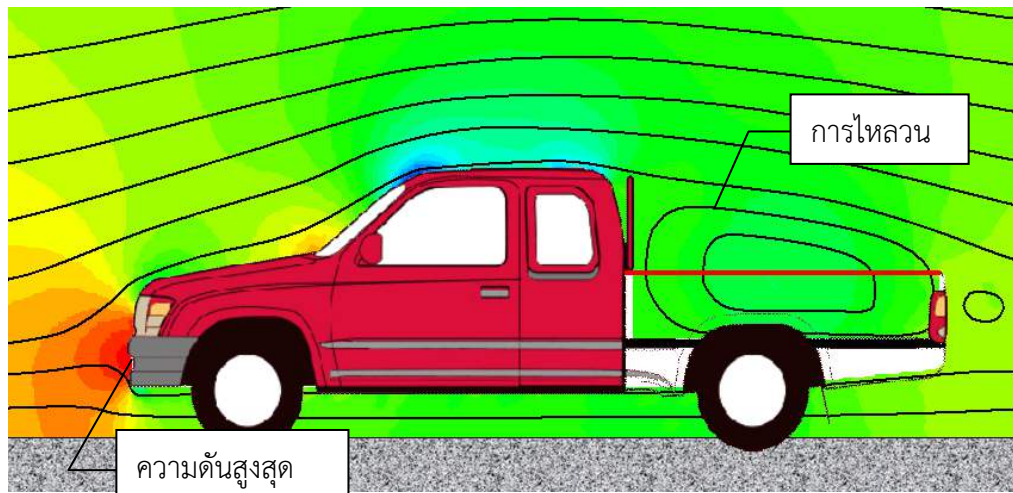
ก้าวแรกสู่กลศาสตร์ของไหล และวิธีเชิงคำนวณ

1.1 บทนำ

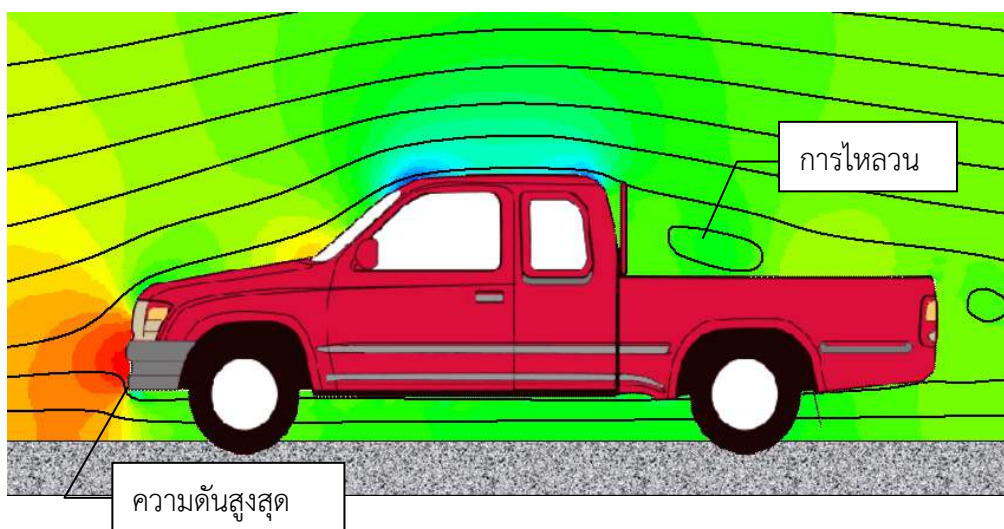
กลศาสตร์ของไหลและวิธีเชิงคำนวณเป็นสาขาความรู้หนึ่งที่ปัจจุบันมีความสำคัญต่อความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมมาก เนื่องจากกลศาสตร์ของไหลเป็นศาสตร์ที่อธิบายถึงพฤติกรรมของของไหลได้ทั้งที่อยู่ในสภาวะหยุดนิ่งหรือเคลื่อนที่ภายใต้สภาพแวดล้อมต่าง ๆ เช่น พฤติกรรมของน้ำภายในเขื่อน จะมีแรงดันน้ำกระทำต่อเขื่อนซึ่งเปลี่ยนแปลงตามความลึกจากผิวน้ำ พฤติกรรมการไหลของอากาศผ่านรถยนต์ ก่อให้เกิดแรงต้านการเคลื่อนที่ของตัวรถ เป็นต้น พฤติกรรมของของไหลเหล่านี้ได้ถูกทดแทนด้วยสมการคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจจะอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) หรือในรูปแบบทั่วไปของสมการพีชคณิต (algebraic equation) หากสามารถแก้สมการหาคำตอบด้วยวิธีเชิงคำนวณ (computational method) และทำความเข้าใจสมการคณิตศาสตร์เหล่านี้ได้ ก็สามารถนำไปประยุกต์ใช้ประโยชน์ได้อีกมากมาย เช่น นำไปช่วยออกแบบประตูน้ำของเขื่อน การออกแบบลิ้นหัวใจเทียม ที่ต้องรักษาระดับความดันที่เกิดขึ้นให้เหมาะสม ขณะที่ลิ้นหัวใจเทียมเปิดและปิด การออกแบบบ้านประหยัดพลังงาน ที่ต้องคำนึงถึงการวางตำแหน่งและสถาปัตยกรรมของบ้าน เพื่อทำให้เกิดการไหลเวียนของอากาศที่ดี การออกแบบโครงสร้างคลุมกระเบหลังของรถกระเบ

2 | บทที่ 1 ก้าวแรกสู่กลศาสตร์ของไหลและวิธีเชิงคำนวณ

ทำให้ลดแรงต้านอากาศลง เนื่องจากระดับการไหลวนลดลง ดังแสดงในรูป 1.1 หรือรวมไปถึงการออกแบบลักษณะโครงสร้างของกระสวยอวกาศเพื่อป้องกันความร้อนและแรงดันอันเนื่องมาจากการเสียดสีกับอากาศ ผลประโยชน์ที่เกิดขึ้นในงานหลายด้านที่กล่าวมานี้ ล้วนตั้งอยู่บนพื้นฐานความเข้าใจในกลศาสตร์ของไหลทั้งสิ้น



(ก) กรณีตัวรถมีกระบังหลังธรรมดา



(ข) กรณีตัวรถที่มีผ้าปิดคลุมกระบังหลัง

รูป 1.1 เส้นทางการไหลผ่านและระดับความดันของอากาศรอบตัวรถกระบะ^[1]

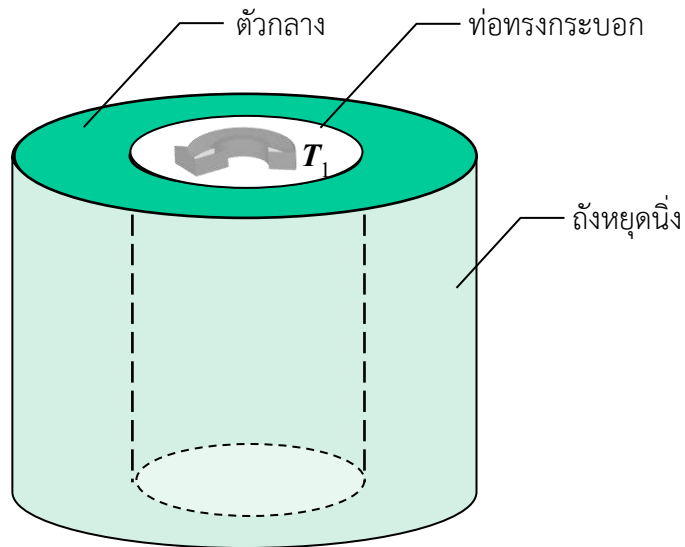
จากความสำคัญและบทบาทของวิชากลศาสตร์ของไหลดังกล่าว ทำให้ปัจจุบันมีการทำงานวิจัยที่ศึกษาในพฤติกรรมของของไหลในด้านต่าง ๆ เป็นจำนวนมาก ซึ่งมีทั้งการศึกษาพฤติกรรมการไหลที่มีความเร็วต่ำและความเร็วสูง ทั้งแบบราบเรียบ (laminar flow) และปั่นป่วน (turbulent flow) รวมไปถึงการศึกษาลักษณะที่เกิดจากของไหลร่วมกับสาขาอื่นได้แก่ การประยุกต์กลศาสตร์ของไหลร่วมกับสาขาการกลศาสตร์ของแข็ง เช่น งานวิจัยผลกระทบของการไหลความเร็วสูงที่มีผลต่อการเสียรูปของโครงสร้างเครื่องบิน การประยุกต์กลศาสตร์ของไหลร่วมกับสาขาการแพทย์ เช่น ออกแบบลิ้นหัวใจเทียม การประยุกต์กลศาสตร์ของไหลร่วมกับสาขาการเกษตร เช่น พฤติกรรมการไหลของอากาศร้อนภายในเตาอบแห้ง การระบายอากาศภายในโรงเลี้ยงไก่ระบบปิด เป็นต้น ซึ่งในปัจจุบันการทำวิจัยมีลักษณะเป็นงานวิจัยแบบสหสาขา (multidiscipline research) กันมากขึ้น และก่อให้เกิดประโยชน์ต่อชีวิตความเป็นอยู่ทั้งในปัจจุบันและอนาคตเป็นอันมาก

1.2 ของไหลคืออะไร

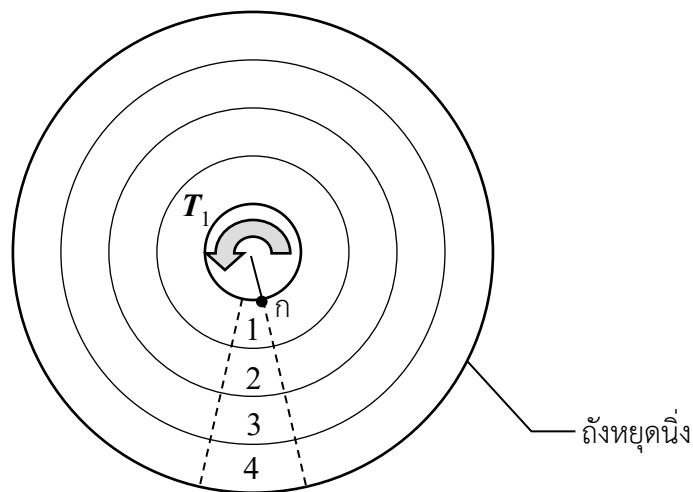
ของไหลเป็นสสารที่มีอยู่ทั่วไปทุกหนแห่ง และมีคุณสมบัติในการเปลี่ยนแปลงปริมาตรหรือรูปร่างที่แตกต่างจากของแข็งอย่างเห็นได้ชัด กล่าวคือ ของแข็งสามารถคงรูปร่างของตนเองได้ ส่วนของไหลจะไม่สามารถคงรูปร่างได้ด้วยตนเอง กล่าวคือของเหลวจะเปลี่ยนรูปร่างไปตามรูปร่างของภาชนะที่ของเหลวนั้นอยู่ เช่น น้ำในแก้วจะคงรูปร่างตามรูปร่างของแก้ว หรือถ้าของไหลที่เป็นก๊าซจะคงรูปร่างเต็มตามภาชนะปิดที่ก๊าซนั้นบรรจุอยู่

ของไหลมีคุณสมบัติที่น่าสนใจคือ เมื่อของไหลถูกแรงภายนอกกระทำให้เกิดการเคลื่อนที่ของไหลดังกล่าวจะเข้าสู่สภาวะสมดุลได้ยาก ในขณะที่ของแข็งเมื่อได้รับแรงเดียวกันจะเข้าสู่สภาวะสมดุลได้ง่ายกว่า ในรูป 1.2 (ก) แสดงตัวอย่างตัวกลางที่เป็นของแข็งซึ่งอยู่ระหว่างถังกับท่อทรงกระบอกตรงกลาง หากออกแรงบิดขนาด T_1 ที่ท่อแกนกลางขณะที่ถังหยุดนิ่ง จะพบว่าท่อแกนกลางจะบิดไปด้วยมุมขนาดหนึ่งตามทิศทางนาฬิกา เพื่อให้เห็นภาพได้ชัดเจนยิ่งขึ้นได้ทำการกำหนดอนุภาคของของแข็งออกเป็น 4 ชิ้นส่วนตลอดแนวรัศมี ดังแสดงเป็นภาพฉายด้านบนในรูป 1.2 (ข) เมื่อทำการออกแรงบิดแกนกลาง ลักษณะการเคลื่อนตัวของอนุภาคของแข็งจะพยายามบิดตามทิศทางการหมุนของท่อแกนกลาง ตัวอย่างเช่น ตำแหน่ง ก จะเกิดมุมบิดสูงสุดเท่ากับ θ และเข้าสู่สภาวะสมดุลหยุดนิ่ง โดยอนุภาคทั้ง 4 ยังคงมีขอบที่ติดกันเหมือนเดิมดังแสดงใน

รูป 1.2 (ค) ในกรณีที่หากเปลี่ยนตัวกลางจากของแข็งเป็นของเหลว พบว่าท่อแกนกลางจะหมุน



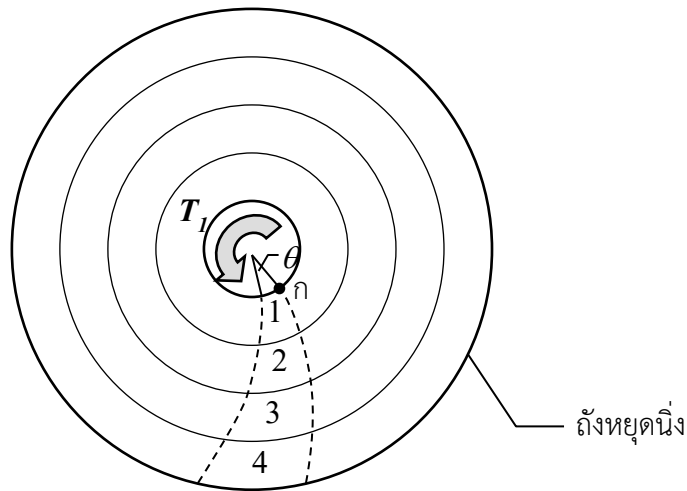
(ก) ถังที่มีแกนหมุนเป็นท่อทรงกระบอก



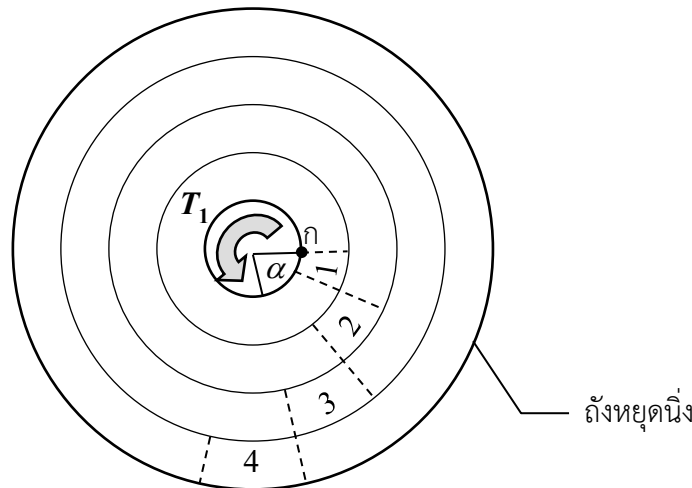
(ข) ตำแหน่งอนุภาคของแข็งทั้ง 4 ขณะเริ่มออกแรงบิด

รูป 1.2 ถังที่มีแกนหมุนและตำแหน่งอนุภาคของแข็งขณะเริ่มออกแรงบิด (ก) และ (ข) และพฤติกรรมของอนุภาค เมื่อถูกแรงบิด T_1 จากภายนอก (ค) และ (ง)

ไปเรื่อย ๆ ด้วยความเร็วรอบการหมุนที่แปรตามแรงบิด T_1 ที่กำหนด หากพิจารณาอนุภาคทั้ง 4 จะเห็นได้ว่าอนุภาคทั้งหมดสามารถเลื่อนไหลหนีออกจากกันได้ ทำให้อนุภาคเหล่านี้ไม่มีขอบที่ติดกัน และไม่เข้าสู่สภาวะสมดุลหยุดนิ่ง ดังแสดงในรูป 1.2 (ง) นอกจากนั้นหากเปลี่ยนของไหลจากน้ำเป็นน้ำมันพบว่าความเร็วรอบของท่อแกนกลางจะลดลง เนื่องจากน้ำมันมีความหนืดมากกว่าน้ำ



(ค) ตำแหน่งอนุภาคของแข็งทั้ง 4 ภายหลังจากถูกแรงบิดกระทำ



(ง) ตำแหน่งอนุภาคของไหลทั้ง 4 ภายหลังจากถูกแรงบิดกระทำ

รูป 1.2 ถังที่มีแกนหมุนและตำแหน่งอนุภาคของแข็งขณะเริ่มออกแรงบิด (ก) และ (ข) และพฤติกรรมของอนุภาค เมื่อถูกแรงบิด T_1 จากภายนอก (ค) และ (ง)

โดยทั่วไปของไหลจะมีอยู่ 2 สถานะ คือ แก๊สและของเหลว ในบางครั้งของไหลอาจอยู่ในสภาวะผสมตั้งแต่สองสถานะ (multiphase) ขึ้นไป เช่น น้ำที่ถูกนำมาต้มและเริ่มเดือด จะเกิดฟองอากาศลอยขึ้นมา หรือในเครื่องยนต์ที่บรรจุแก๊ส เป็นต้น ในปัจจุบันได้มีการศึกษาวิจัยพฤติกรรมของไหลแบบหลายสถานะกันมากขึ้น เนื่องจากความเข้าใจในพฤติกรรมดังกล่าวจะช่วยในเรื่องของการออกแบบอุปกรณ์ที่สำคัญหลายอย่าง เช่น เตาปฏิกรณ์ปรมาณู เป็นต้น

1.3 ประโยชน์ของการศึกษากลศาสตร์ของไหล

การทำความเข้าใจในกลศาสตร์ของไหลจะต้องเริ่มจากการรู้ถึงสมการทดแทนพฤติกรรมของของไหลในรูปแบบต่าง ๆ และความหมายทางกายภาพ (physical meaning) ของแต่ละเทอมในสมการดังกล่าว ความเข้าใจทั้งสองส่วนจะทำให้ผู้ศึกษาได้เห็นถึงความสำคัญของกลศาสตร์ของไหล และสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับสิ่งรอบตัวที่เกี่ยวข้องกับของไหลได้ไม่ยากนัก ดังตัวอย่างที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้

ตัวอย่าง คือ มีแก้วไวน์แก้วหนึ่งที่มีระดับน้ำไวน์แดงอยู่สูงจากก้นแก้ว 5 ซม. ที่ก้นแก้วมีเหรียญอยู่ 1 เหรียญ ดังแสดงในรูป 1.3 (ข) หากต้องการทราบว่าเหรียญนั้นหงายหัวหรือก้อยอยู่ จะต้องทำอะไร โดยไม่เทน้ำไวน์ออกจากแก้ว

วิธีการหนึ่ง คือ การใช้ความรู้ของกลศาสตร์ของไหล ที่ว่า เมื่อของไหลเกิดแรงเหวี่ยงหนีศูนย์กลาง จะทำให้ระดับผิวของของไหลเปลี่ยนระดับไป โดยผิวของไหลที่ตำแหน่งห่างจากแกนหมุนจะมีระดับสูงกว่าผิวของไหลที่ตำแหน่งใกล้กับแกนหมุน ดังนั้นเมื่อทำการหมุนแก้วไวน์จะทำให้เกิดแรงเหวี่ยงหนีศูนย์กลาง และความต่างระดับผิวของน้ำไวน์ดังแสดงในรูป 1.3 (ค) ดังนั้นหากต้องการมองเห็นเหรียญที่ก้นแก้วจะต้องให้ระดับน้ำในตำแหน่ง 1 เลื่อนลงไปอยู่ที่ก้นแก้ว

การหาคำตอบดังกล่าวจะเริ่มต้นจากการหาการเปลี่ยนแปลงของความดัน ∇p ณ ตำแหน่งใด ๆ ดังนี้

$$\vec{\nabla} p = -\rho \vec{a} - \rho g \hat{e}_z = \frac{\partial p}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{e}_z \quad (1.1)$$

โดยเทอม $\rho \vec{a}$ หมายถึง ความดันแตกต่างที่เกิดจากมวลของไหลมีความเร่งในทิศทางต่าง ๆ ส่วนเทอม $\rho g \hat{e}_z$ แสดงถึงผลจากน้ำหนักของของไหล