

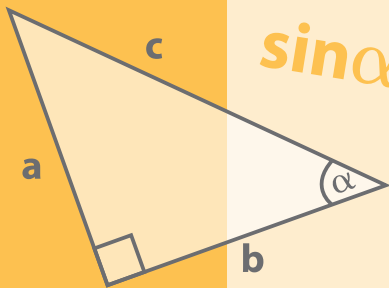
คณิตศาสตร์

ม. 3

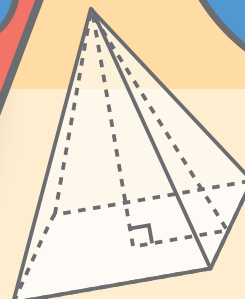
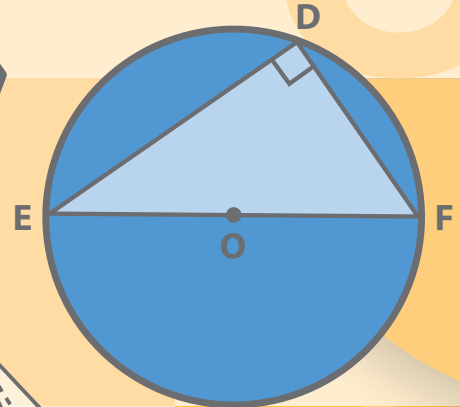
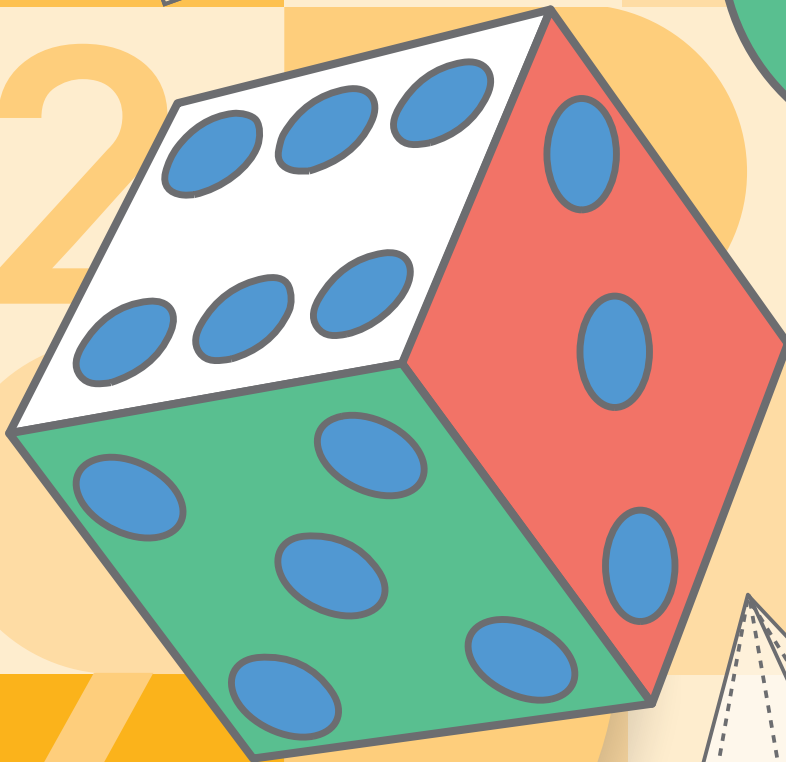
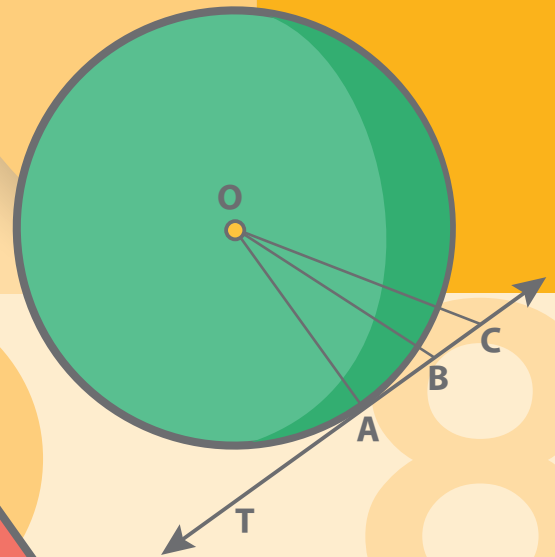
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

เล่ม 2



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$



หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ผู้เรียบเรียง

รศ. ดร.กฤษณะ โสขุมมา

ผู้ตรวจ

ผศ. ดร.กันย์ สุ่นเย็น

ผศ.พัชรี หิรัญมาศสุวรรณ

พนิดา พิสิฐอมรชัย

บรรณาธิการ

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ผู้เรียบเรียง รศ. ดร.กฤษณะ โสขุมมา
ผู้ตรวจ ผศ. ดร.กันย์ สุนัยชิ้น
ผศ.พัชรี ทิริญมาศสุวรรณ
พนิดา พิสิฐอมรชัย
บรรณาธิการ ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

กฤษณะ โสขุมมา.

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2.

--กรุงเทพฯ : แม็คเอดูเคชั่น, 2568.

248 หน้า.

1. คณิตศาสตร์--การศึกษาและการสอน (มัธยมศึกษา). I. ชื่อเรื่อง.

510.7

ISBN 978-616-345-324-2

พิมพ์ครั้งที่ 1

จำนวน : 8,000 เล่ม

สงวนลิขสิทธิ์ : ธันวาคม 2568

สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย ห้ามลอกเลียน ไม่ว่าจะเป็นส่วนหนึ่งส่วนใด
ของหนังสือเล่มนี้ นอกจากจะได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษร

จัดทำโดย

MACIMACEDUCATION

ส่งชานาณัติสั่งจ่าย ไปรษณีย์ลาดพร้าว

ในนาม บริษัท แม็คเอดูเคชั่น จำกัด

9/99 อาคารแม็ค ซอยลาดพร้าว 38 ถนนลาดพร้าว

แขวงจันทระเกษม เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900

โทร. 0-2512-0661, 0-2938-2022-7 แฟกซ์ 0-2938-2028

www.MACeducation.com

พิมพ์ที่ : บริษัท ทีเอส อินเทอร์เน็ต จำกัด

คำนำ

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 ได้เรียบเรียงขึ้นตามมาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด และสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กิจกรรม-การเรียนรู้ในหนังสือเรียนเล่มนี้เน้นการบูรณาการสาระการเรียนรู้กับทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ การแก้ปัญหา การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยง การให้เหตุผล และการคิดสร้างสรรค์ เพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนรู้สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ มีทักษะที่จำเป็นสอดคล้องกับการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 และมีคุณลักษณะที่พึงประสงค์ มีการฝึกทักษะตามสาระการเรียนรู้ มีการวัดผลประเมินผลด้วยตนเอง นอกจากนี้ยังมีกิจกรรมส่งเสริมให้เกิดความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

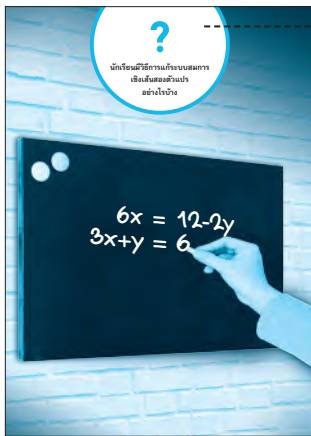
หนังสือเรียนเล่มนี้ประกอบด้วย 5 หน่วยการเรียนรู้ ได้แก่ หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 วงกลม หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 พีระมิด กรวย และทรงกลม หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 ความน่าจะเป็น และหน่วยการเรียนรู้ที่ 5 อัตราส่วนตรีโกณมิติ แต่ละหน่วยการเรียนรู้ได้มีสาระการเรียนรู้ ระบุตัวชี้วัด มีภาพและคำถามที่นำเข้าสู่บทเรียน กิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ กิจกรรมส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายและท้าทายให้ผู้เรียนตรวจสอบความเข้าใจบทสรุปเนื้อหาและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์เพื่อเป็นการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ของผู้เรียน

ผู้เรียบเรียงขอขอบคุณเป็นอย่างสูงที่ท่านได้เลือกใช้หนังสือเรียนเล่มนี้เป็นสื่อการเรียนรู้ ผู้เรียบเรียงหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเรียนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อครู นักเรียน และผู้สนใจ โดยส่งผลต่อการพัฒนาทั้งด้านความรู้ ทักษะ ค่านิยม และคุณลักษณะที่พึงประสงค์ ตามเจตนารมณ์ที่กำหนดไว้ในหลักสูตร

รศ. ดร.กฤษณะ โสขมา

คำชี้แจง

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 เล่มนี้ได้แนะนำให้แต่ละหน่วยการเรียนรู้มีคำถามนำเพื่อให้ผู้เรียนเกิดความสนใจ ผึกฝนทักษะและความเชี่ยวชาญด้วยกิจกรรมตามธรรมชาติวิชาเพื่อให้ผู้เรียนมีการเรียนรู้ที่คงทน มีการตรวจสอบความรู้ความเข้าใจเป็นระยะ ๆ โดยสอดแทรกกิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ซึ่งสัมพันธ์กับเรื่องที่ได้เรียนผ่านมา ในท้ายหน่วยการเรียนรู้จะมีสรุปสำหรับทบทวนองค์ความรู้ทั้งหมด และประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ นอกจากนี้ยังเพิ่มเติมด้วยกิจกรรมส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์หรือดัดแปลงให้เหมาะสมกับบริบทของโรงเรียนและผู้เรียน ในส่วนของเนื้อหาและแบบทดสอบเพิ่มเติมที่ผ่านการคัดกรองมาแล้วว่าเหมาะสมกับการเรียนรู้จะมีสัญลักษณ์   ซึ่งสามารถใช้สมาร์ทโฟนสแกน คิวอาร์โค้ด (QR Code) ได้ เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจเนื้อหาในเรื่องนั้น ๆ มากยิ่งขึ้นและผู้สอนสามารถประเมินผู้เรียนได้



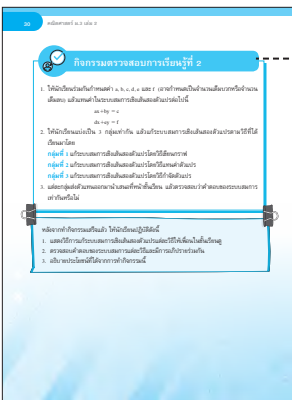
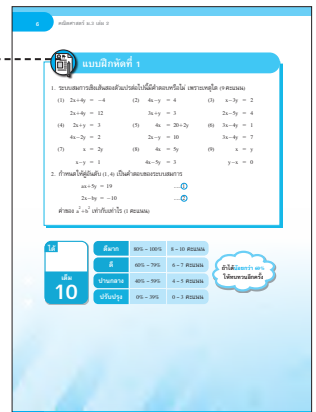
คำถามนำเข้าสู่บทเรียน

เป็นคำถามที่กระตุ้นความสนใจในสิ่งที่จะได้เรียนรู้ ผึกผู้เรียนให้รู้จักแสดงความคิดเห็นและปรึกษาหารือร่วมกัน



แบบฝึกหัด

เป็นแบบฝึกที่ใช้วัดความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในเรื่องที่ผู้เรียนได้เรียนมาแล้ว พร้อมทั้งมีเกณฑ์การตรวจสอบด้วยตนเอง



กิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้

กิจกรรมเพื่อฝึกทักษะในการทำงานเป็นคู่หรือเป็นกลุ่มของผู้เรียน เพื่อแก้ปัญหาตามหลักการทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อนั้นๆ ทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้ง่ายและรวดเร็ว



กิจกรรมที่ ๓

นิยามการคิดเชิงวิเคราะห์

นิยามการคิดเชิงวิเคราะห์

จุดประสงค์

1. ผู้เรียนสามารถนิยามการคิดเชิงวิเคราะห์ได้
2. ผู้เรียนสามารถอธิบายความสำคัญของการคิดเชิงวิเคราะห์ได้
3. ผู้เรียนสามารถอธิบายขั้นตอนของการคิดเชิงวิเคราะห์ได้

กิจกรรม

1. Brain storm
2. การถามคำถาม

ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. นิยามการคิดเชิงวิเคราะห์ (๑๐ นาที)
2. อธิบายความสำคัญของการคิดเชิงวิเคราะห์ (๑๐ นาที)
3. อธิบายขั้นตอนของการคิดเชิงวิเคราะห์ (๑๐ นาที)

สื่อ/วัสดุอุปกรณ์

บัตรคำ

	Interval 1	Interval 2	ช่วงเวลาพักเบรก
กิจกรรม	1 นาที 30 วินาที	1 นาที 30 วินาที	10 นาที
ตาราง	1 นาที 30 วินาที	1 นาที 30 วินาที	10 นาที
กิจกรรม	1 นาที 30 วินาที	1 นาที 30 วินาที	10 นาที

ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ผู้เรียนสามารถนิยามการคิดเชิงวิเคราะห์ได้
2. ผู้เรียนสามารถอธิบายความสำคัญของการคิดเชิงวิเคราะห์ได้
3. ผู้เรียนสามารถอธิบายขั้นตอนของการคิดเชิงวิเคราะห์ได้

สื่อ/วัสดุอุปกรณ์

บัตรคำ

ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. นิยามการคิดเชิงวิเคราะห์ (๑๐ นาที)
2. อธิบายความสำคัญของการคิดเชิงวิเคราะห์ (๑๐ นาที)
3. อธิบายขั้นตอนของการคิดเชิงวิเคราะห์ (๑๐ นาที)

สื่อ/วัสดุอุปกรณ์

บัตรคำ

 กิจกรรมส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

เป็นกิจกรรมที่ผู้เรียนสามารถประยุกต์ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เพื่อต่อยอดในการทำกิจกรรมต่างๆ เพิ่มเติมจนเกิดขึ้นงาน


សរុប ០

เป็นการให้ผู้เรียนเข้าใจเนื้อหาโดยรวมของหน่วยการเรียนรู้
นั้นๆ เพื่อทบทวนความรู้

[illegible]

กิจกรรม ๓.๕ (๑)

๑. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์

๑. พหุคูณสองตัวประกอบที่มีผลบวกเป็น ๑๖ และผลคูณเป็น ๖๓ คือ

(๑) $x^2 + 9 = 0$ (๒) $x^2 + 4 = 0$ (๓) $x^2 + 7 = 0$ (๔) $x^2 + 3 = 0$	(๕) $x^2 + 12 = 0$ (๖) $x^2 + 5 = 0$ (๗) $x^2 + 8 = 0$ (๘) $x^2 + 6 = 0$
---	--

๒. ถ้า x และ y เป็นรากของสมการ $x^2 - 3x - 4 = 0$ และ $3x - 4y - 7 = 0$ แล้ว $x + y$ มีค่าเป็นเท่าใด (๑ คะแนน)

๓. ถ้า x และ y เป็นรากของสมการ $x^2 - 5x + 6 = 0$ แล้ว $x^2 + y^2$ มีค่าเป็นเท่าใด (๑ คะแนน)

๔. ถ้า x และ y เป็นรากของสมการ $x^2 - 3x + 2 = 0$ แล้ว $x^2 + y^2$ มีค่าเป็นเท่าใด (๑ คะแนน)

๕. ถ้า x และ y เป็นรากของสมการ $x^2 - 5x + 6 = 0$ แล้ว $x^2 + y^2$ มีค่าเป็นเท่าใด (๑ คะแนน)

๖. ถ้า x และ y เป็นรากของสมการ $x^2 - 3x + 2 = 0$ แล้ว $x^2 + y^2$ มีค่าเป็นเท่าใด (๑ คะแนน)

๗. ถ้า x และ y เป็นรากของสมการ $x^2 - 5x + 6 = 0$ แล้ว $x^2 + y^2$ มีค่าเป็นเท่าใด (๑ คะแนน)

๘. ถ้า x และ y เป็นรากของสมการ $x^2 - 3x + 2 = 0$ แล้ว $x^2 + y^2$ มีค่าเป็นเท่าใด (๑ คะแนน)

๙. ถ้า x และ y เป็นรากของสมการ $x^2 - 5x + 6 = 0$ แล้ว $x^2 + y^2$ มีค่าเป็นเท่าใด (๑ คะแนน)

๑๐. ถ้า x และ y เป็นรากของสมการ $x^2 - 3x + 2 = 0$ แล้ว $x^2 + y^2$ มีค่าเป็นเท่าใด (๑ คะแนน)

นักเรียน

ได้คะแนน

จาก

จำนวน

๑๐๐

คะแนน

นักเรียน

ได้คะแนน

จาก

จำนวน

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์

เป็นแบบทดสอบที่ใช้วัดความรู้ ความเข้าใจ ทักษะ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของหน่วยการเรียนรู้หนึ่งๆ ให้เป็นไปตามตัวชี้วัดของหลักสูตรฯ พร้อมทั้งมีเกณฑ์การตรวจสอบด้วยตนเอง

อภินิหารศัพท์

ให้ผู้เรียนเข้าใจคำสำคัญ คำยาก และคำใหม่ที่จำเป็นต้องรู้

[illegible]

 **แนะนำตัวละคร**

ตัวละครที่กล่าว
เกริ่นนำเข้าสู่
เนื้อหา



ตัวละครที่กล่าวถึง
ข้อควรในเนื้อหา



ตัวละครที่สร้าง
กิจกรรมชวนคิด



ตัวละคร
ที่ใช้ถามคำถาม



ตัวละครที่ถามคำถาม
ส่งเสริมคุณธรรม จริยธรรม
และวัฒนธรรม และกล่าวถึงข้อความ
ที่นำไปใช้ในชีวิตจริง



สารบัญ

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 1

(ตรงตามตัวชี้วัด ค 1.3 ม.3/3)

1. ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 3
2. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 8
3. การนำความรู้เกี่ยวกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรไปใช้ในการแก้ปัญหา
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ 31
42

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 วงกลม 43

(ตรงตามตัวชี้วัด ค 2.2 ม.3/3)

1. บทนำเกี่ยวกับวงกลม 45
2. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลม 54
3. สมบัติของเส้นสัมผัส 81
4. วงกลมและรูปหลายเหลี่ยม 93
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ 105

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 พีระมิด กรวย และทรงกลม 107

(ตรงตามตัวชี้วัด ค 2.1 ม.3/1 และ ค 2.1 ม.3/2)

1. พื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิด 109
2. พื้นที่ผิวและปริมาตรของกรวย 130
3. พื้นที่ผิวและปริมาตรของทรงกลม 148
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ 161

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 ความน่าจะเป็น 163

(ตรงตามตัวชี้วัด ค 3.2 ม.3/1)

1. การทดลองสุ่มและแซมเปิลสเปซ 165
2. เหตุการณ์ 175
3. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ 182
4. การนำความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นไปใช้ในชีวิตจริง 193
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ 200

หน่วยการเรียนรู้ที่ 5 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

201

(ตรงตามตัวชี้วัด ค 2.2 ม.3/2)

1. อัตราส่วนตรีโกณมิติ

203

2. การนำความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในชีวิตจริง
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์

226

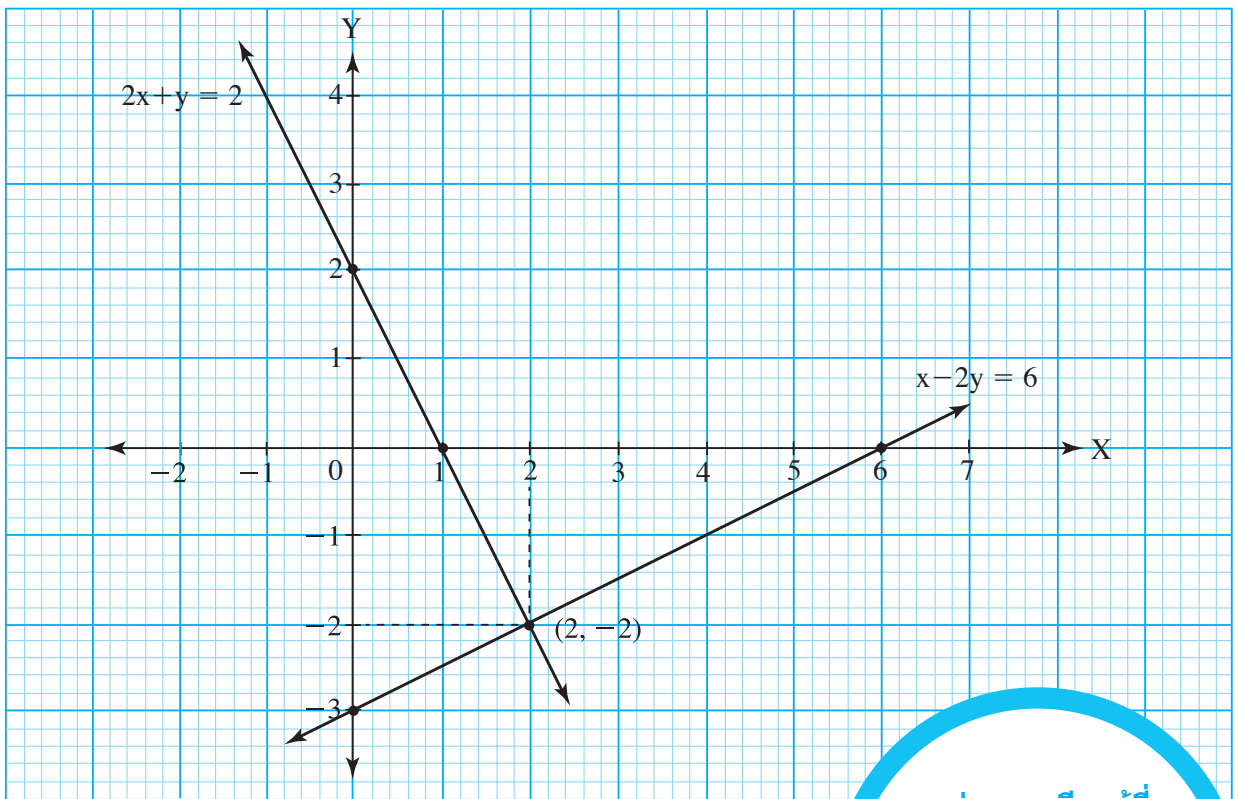
236

บรรณานุกรม

238

อภิธานศัพท์

239



หน่วยการเรียนรู้ที่

1



ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

สาระการเรียนรู้

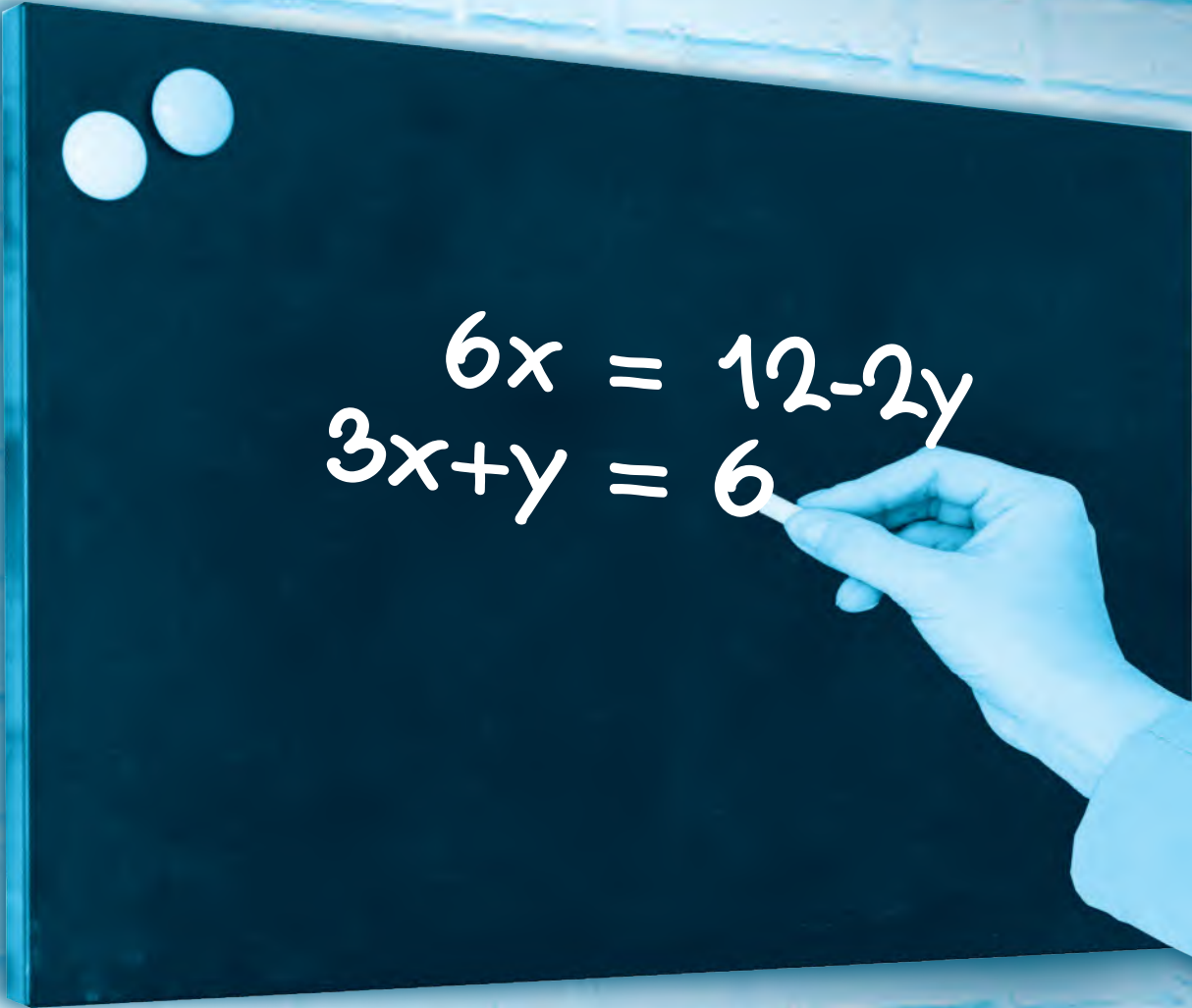
1. ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
2. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
3. การนำความรู้เกี่ยวกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรไปใช้ในการแก้ปัญหา

ตัวชี้วัด

ประยุกต์ใช้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ (ค 1.3 ม.3/3)

?

นักเรียนมีวิธีการแก้ระบบสมการ
เชิงเส้นสองตัวแปร
อย่างไรบ้าง



A hand is shown writing a system of linear equations on a black chalkboard. The equations are written in white chalk. The first equation is $6x = 12 - 2y$ and the second equation is $3x + y = 6$. The hand is holding a piece of chalk and is in the process of writing the second equation.

$$\begin{array}{l} 6x = 12 - 2y \\ 3x + y = 6 \end{array}$$

สำหรับเนื้อหาของหน่วยการเรียนรู้นี้เป็นการนำเนื้อหาเกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่มีสองสมการ กราฟของระบบสมการ การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่มีสองสมการ ซึ่งความรู้เกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรสามารถนำไปประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาเกี่ยวกับจำนวน อัตราส่วนและร้อยละ ต้นทุนการผลิต ระยะทาง อัตราเร็วและเวลา เป็นต้น



1. ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ให้นักเรียนอ่านโจทย์ต่อไปนี้ และหาคำตอบ

ฉันเลี้ยงไก่และกระต่ายรวมกันได้ 75 ตัว และนับขา รวมกันได้จำนวน 210 ขา
ฉันมีไก่และกระต่ายอย่างละกี่ตัว

นักเรียนอาจใช้การแก้ปัญหาโดยการสุ่มหาคำตอบ ดังตารางต่อไปนี้

จำนวนไก่	จำนวนกระต่าย	จำนวนขา		
		ไก่	กระต่าย	รวม
70	5	140	20	160
65	10	130	40	170
60	15	120	60	180
55	20	110	80	190
50	25	100	100	200
45	30	90	120	210

จากตารางสรุปได้ว่า มีไก่ 45 ตัว และมีกระต่าย 30 ตัว

อย่างไรก็ตาม นักเรียนไม่สามารถคาดหวังได้ว่าวิธีหาคำตอบจะเป็นวิธีการหาคำตอบได้สำหรับทุกโจทย์ปัญหา ในทางคณิตศาสตร์จะใช้วิธีแปลงโจทย์ปัญหาเป็นประโยคสัญลักษณ์ และกำหนดเป็นสมการ ดังนี้

จากโจทย์ปัญหาถ้าให้ x แทนจำนวนไก่ และ y แทนจำนวนกระต่าย

เขียนข้อความ “ไก่และกระต่ายรวมกันได้ 75 ตัว” เป็นประโยคสัญลักษณ์

ได้เป็น “ $x + y = 75$ ”

และเขียนข้อความ “นับขารวมกันได้จำนวน 210 ขา” เป็นประโยคสัญลักษณ์

ได้เป็น “ $2x + 4y = 210$ ”

จากโจทย์ปัญหาข้างต้น เมื่อแปลงให้เป็นประโยคสัญลักษณ์แล้วจะได้สมการสองสมการที่มีตัวไม่ทราบค่าสองตัว คือ x และ y ดังนี้

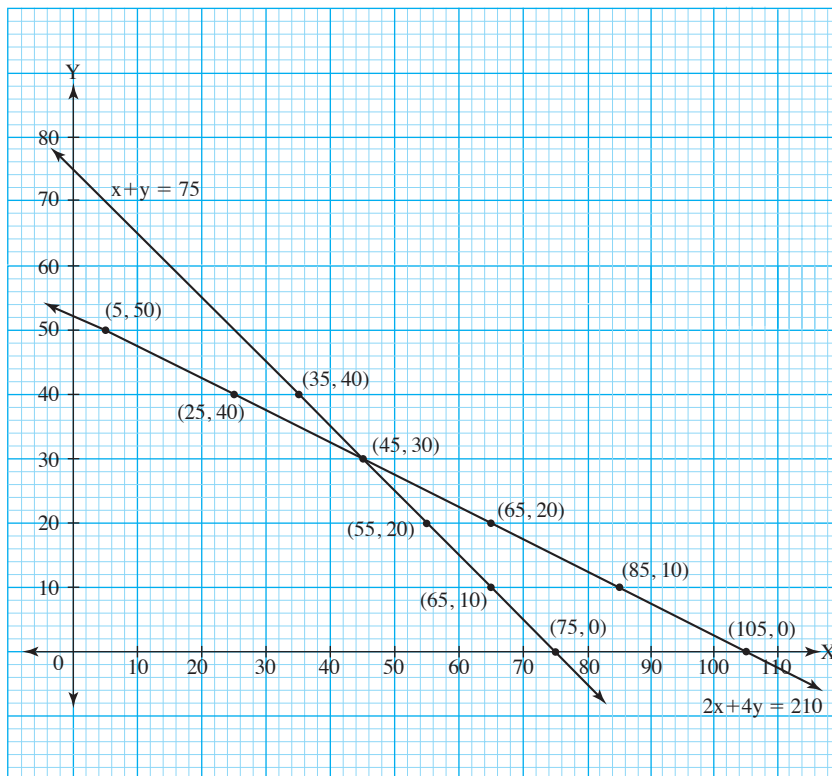
$$x + y = 75$$

.....①

$$2x + 4y = 210$$

.....②

เรียกสมการชุดนี้ว่า **ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร** (system of linear equation with two variables)



จากสมการ $x+y = 75$ เมื่อเขียนคำตอบของสมการในรูป (x, y) จะได้ว่าคำตอบของสมการมีหลายคำตอบ เช่น $(75, 0), (70, 5), (65, 10), (60, 15), (55, 20), (50, 25), (45, 30), (40, 35), (35, 40), \dots$

จากสมการ $2x+4y = 210$ เมื่อเขียนคำตอบของสมการในรูป (x, y) จะได้ว่าคำตอบของสมการมีหลายคำตอบ เช่น $(5, 50), (25, 40), (45, 30), (65, 20), (85, 10), \dots$

จะเห็นว่าสมการ $x+y = 75$ และ $2x+4y = 210$ มีคู่อันดับที่เหมือนกันคือ $(45, 30)$

นำ $(45, 30)$ มาตรวจสอบว่าเป็นคำตอบของสมการทั้งสองจริงหรือไม่ ดังนี้

แทนค่า x และแทนค่า y ในสมการ $x+y = 75$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } x+y &= 45+30 \\ &= 75\end{aligned}$$

แทนค่า x และแทนค่า y ในสมการ $2x+4y = 210$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } 2x+4y &= 2(45)+4(30) \\ &= 90+120 \\ &= 210\end{aligned}$$

นั่นคือ $(45, 30)$ เป็นคำตอบของสมการ $x+y = 75$ และ $2x+4y = 210$ กล่าวได้ว่า $(45, 30)$ เป็น

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ให้ a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริงที่ a, b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ c, d ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เรียกระบบที่ประกอบด้วยสมการ

$$ax+by = e$$

$$cx+dy = f$$

ว่า**ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร**ที่มี x และ y เป็นตัวแปร

โดยที่มี a และ c เป็นสัมประสิทธิ์ของ x

b และ d เป็นสัมประสิทธิ์ของ y

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ คู่อันดับของจำนวนจริง (m, n) ที่เมื่อแทน x ด้วย m และแทน y ด้วย n ในแต่ละสมการจะได้สมการที่เป็นจริง ถ้าไม่มีคู่อันดับของจำนวนจริงใดที่สอดคล้องกับระบบสมการ ให้ตอบว่า “ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ”



แบบฝึกหัดที่ 1

1. ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรต่อไปนี้ มีคำตอบหรือไม่ เพราะเหตุใด (9 คะแนน)

(1) $2x+4y = -4$

(2) $4x-y = 4$

(3) $x-3y = 2$

$2x+4y = 12$

$3x+y = 3$

$2x-5y = 4$

(4) $2x+y = 3$

(5) $4x = 20+2y$

(6) $3x-4y = 1$

$4x-2y = 2$

$2x-y = 10$

$3x-4y = 7$

(7) $x = 2y$

(8) $4x = 5y$

(9) $x = y$

$x-y = 1$

$4x-5y = 3$

$y-x = 0$

2. กำหนดให้คู่อันดับ (1, 4) เป็นคำตอบของระบบสมการ

$ax+5y = 19$

.....①

$2x-by = -10$

.....②

ค่าของ a^2+b^2 เท่ากับเท่าไร (1 คะแนน)

ได้

เต็ม

10

ดีมาก

80% - 100%

8 - 10 คะแนน

ดี

60% - 79%

6 - 7 คะแนน

ปานกลาง

40% - 59%

4 - 5 คะแนน

ปรับปรุง

0% - 39%

0 - 3 คะแนน

ถ้าได้น้อยกว่า 60%
ให้ทบทวนอีกครั้ง



กิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ที่ 1

1. ให้นักเรียนแบ่งเป็น 6 กลุ่มเท่ากัน
2. ครูจัดทำสลากระบบสมการที่ 1 ถึงระบบสมการที่ 6 ตามที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จากนั้นให้ตัวแทนของแต่ละกลุ่มออกมาจับสลากเลือกกระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่หน้าชั้นเรียน

ระบบสมการที่ 1	ระบบสมการที่ 2	ระบบสมการที่ 3
$\frac{1}{4}x - y = -1$ $x + y = 1$	$3x - y = 2$ $6x - 2y = 4$	$y = 0.5 - 2x$ $8x + 4y = 2$
ระบบสมการที่ 4	ระบบสมการที่ 5	ระบบสมการที่ 6
$x - y = 0$ $y = x + 4$	$x - y = 3$ $y = -2x$	$0.5x + y = 3$ $x + 2y = -8$

3. แต่ละกลุ่มช่วยกันหาคู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการเชิงเส้นสองตัวแปรทั้งสองสมการแล้วเขียนในรูปคู่อันดับ จากนั้นตรวจสอบว่า “ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรหาคำตอบ” หรือ “ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรไม่มีคำตอบ” (ในกรณีที่ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรหาคำตอบให้ระบุคำตอบด้วย)
4. แต่ละกลุ่มส่งตัวแทนออกมานำเสนอข้อสรุปคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่หน้าชั้นเรียน โดยเพื่อนกลุ่มอื่นคอยตรวจสอบความถูกต้อง

หลังจากทำกิจกรรมเสร็จแล้ว ให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

1. แสดงระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรให้เพื่อนในชั้นเรียนดู
 - ถ้าระบบสมการเชิงเส้นหาคำตอบ ให้แสดงคำตอบ
 - ถ้าระบบสมการเชิงเส้นไม่มีคำตอบ ให้บอกเหตุผล
 จากนั้นให้มีการอภิปรายร่วมกัน
2. อธิบายประโยชน์ที่ได้จากการทำกิจกรรมนี้

2. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

2.1 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยวิธีเขียนกราฟ

ให้นักเรียนพิจารณาการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยวิธีเขียนกราฟของแต่ละสมการบนระนาบโดยใช้แกนพิกัดเดียวกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้



ตัวอย่างที่ 1 แก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรต่อไปนี้โดยวิธีเขียนกราฟ

$$x - 2y = 6$$

$$2x + y = 2$$

วิธีทำ เขียนกราฟของ $x - 2y = 6$ และ $2x + y = 2$ บนระนาบโดยใช้แกนพิกัดเดียวกัน โดยเริ่มจากหาพิกัดของจุดบางจุดบนกราฟ และกำหนดค่า x บางค่า เพื่อหาค่า y ดังนี้

$$x - 2y = 6$$

หรือ $y = \frac{x - 6}{2}$

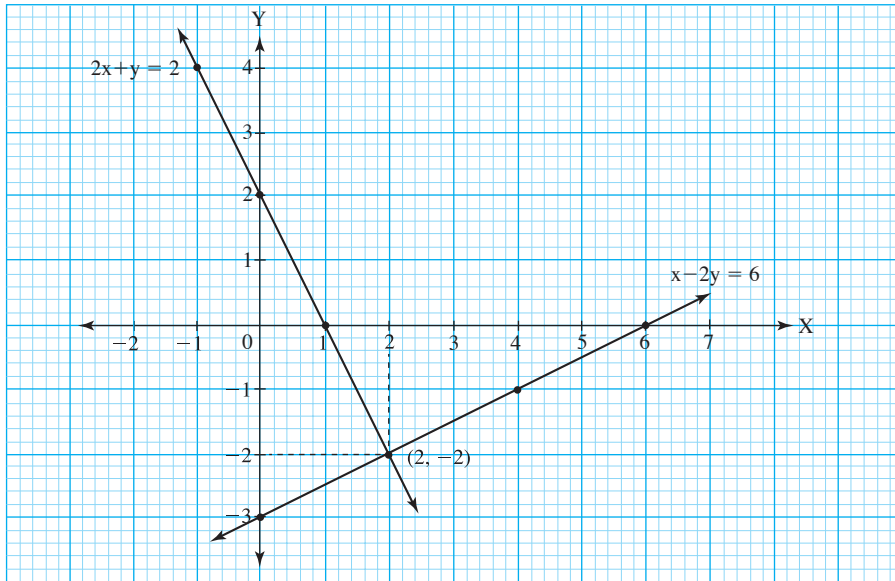
x	0	4	6
y	-3	-1	0

$$2x + y = 2$$

หรือ $y = 2 - 2x$

x	-1	0	1
y	4	2	0

เขียนกราฟของสมการทั้งสองได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่ามีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $x - 2y = 6$ และมีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $2x + y = 2$

เนื่องจากกราฟของสมการทั้งสองเป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่ตำแหน่งเดียวบนระนาบพิกัดฉาก จุดนี้มีพิกัดตามแนวแกน X คือ 2 และพิกัดตามแนวแกน Y คือ -2 ซึ่งคือจุด $(2, -2)$ แสดงว่ามีคู่อันดับเพียงคู่เดียวคือ $(2, -2)$ ที่ทำให้สมการทั้งสองเป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรนี้คือ $(2, -2)$

ตรวจสอบ แทน x ด้วย 2 และแทน y ด้วย -2 ในสมการ $x - 2y = 6$
 จะได้ $2 - 2(-2) = 2 + 4$
 $= 6$
 ดังนั้น $(2, -2)$ เป็นคำตอบของสมการ $x - 2y = 6$
 แทน x ด้วย 2 และแทน y ด้วย -2 ในสมการ $2x + y = 2$
 จะได้ $2(2) + (-2) = 4 - 2$
 $= 2$
 ดังนั้น $(2, -2)$ เป็นคำตอบของสมการ $2x + y = 2$

ตอบ $(2, -2)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ความรู้เพิ่มเติม

จากตัวอย่างที่ 1 อาจเขียนกราฟของ $x-2y = 6$ และ $2x+y = 2$ โดยหาจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y ดังนี้

หาจุดตัดแกน X โดยแทน $y = 0$

จากสมการ $x-2y = 6$

$$x-2(0) = 6$$

$$x = 6$$

จุดตัดแกน X คือ (6, 0)

จากสมการ $2x+y = 2$

$$2x+0 = 2$$

$$x = 1$$

จุดตัดแกน X คือ (1, 0)

หาจุดตัดแกน Y โดยแทน $x = 0$

จากสมการ $x-2y = 6$

$$0-2y = 6$$

$$y = -3$$

จุดตัดแกน Y คือ (0, -3)

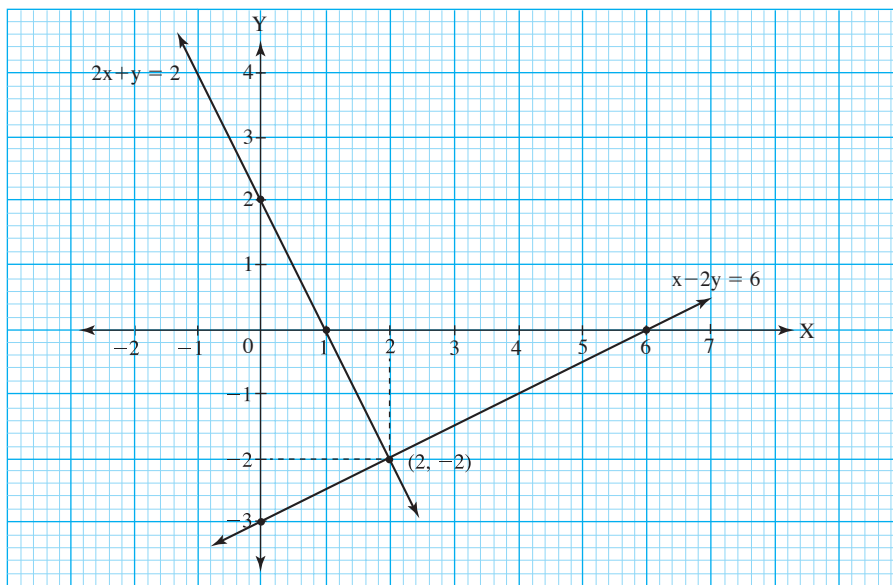
จากสมการ $2x+y = 2$

$$2(0)+y = 2$$

$$y = 2$$

จุดตัดแกน Y คือ (0, 2)

นำพิกัดของจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y เขียนลงบนแกนพิกัดฉาก แล้วเขียนกราฟเส้นตรงผ่านจุดทั้งสอง จะได้กราฟเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุด (2, -2) ดังรูป



ตัวอย่างที่ 2 แก่ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรต่อไปนี้โดยวิธีเขียนกราฟ

$$2x + y = 4$$

$$2x + y = -2$$

วิธีทำ เขียนกราฟของ $2x + y = 4$ และ $2x + y = -2$ บนระนาบโดยใช้แกนพิกัดเดียวกัน โดยเริ่มจากหาพิกัดของจุดบางจุดบนกราฟ และกำหนดค่า x บางค่า เพื่อหาค่า y ดังนี้

$$2x + y = 4$$

หรือ $y = 4 - 2x$

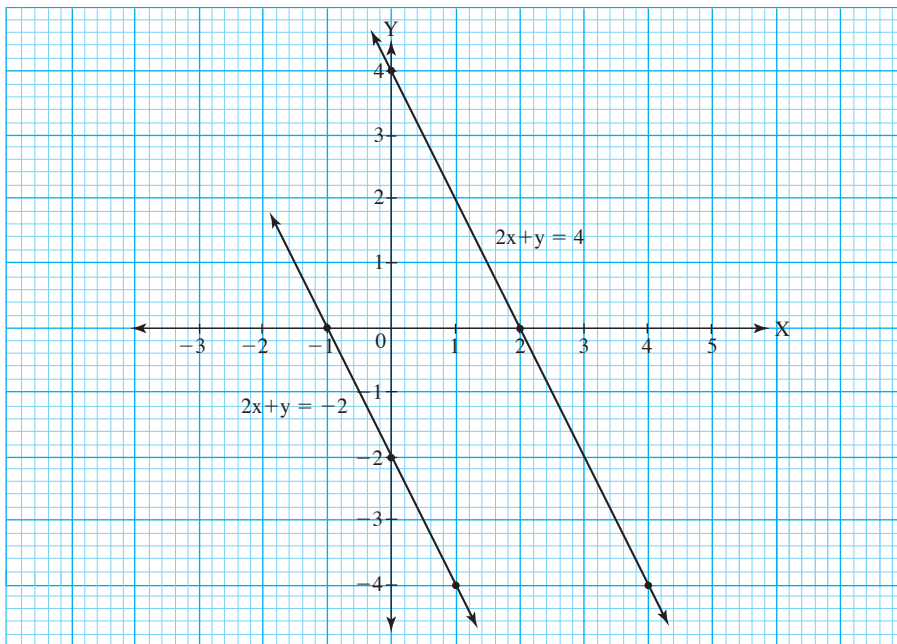
x	0	2	4
y	4	0	-4

$$2x + y = -2$$

หรือ $y = -2 - 2x$

x	-1	0	1
y	0	-2	-4

เขียนกราฟของสมการทั้งสองได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่ามีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $2x + y = 4$ และมีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $2x + y = -2$

เนื่องจากกราฟของสมการทั้งสองเป็นเส้นตรง 2 เส้นที่ขนานกัน จึงไม่ตัดกัน และทำให้ไม่มีจุดตัด ดังนั้น จึงไม่มีคู่อันดับใดเป็นคำตอบของระบบสมการ หรือกล่าวได้ว่าระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

ตอบ ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

ความรู้เพิ่มเติม

จากตัวอย่างที่ 2 อาจเขียนกราฟของ $2x+y = 4$ และ $2x+y = -2$ โดยหาจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y ดังนี้

หาจุดตัดแกน X โดยแทน $y = 0$

จากสมการ $2x+y = 4$

$$2x+0 = 4$$

$$x = 2$$

จุดตัดแกน X คือ (2, 0)

จากสมการ $2x+y = -2$

$$2x+0 = -2$$

$$x = -1$$

จุดตัดแกน X คือ (-1, 0)

หาจุดตัดแกน Y โดยแทน $x = 0$

จากสมการ $2x+y = 4$

$$2(0)+y = 4$$

$$y = 4$$

จุดตัดแกน Y คือ (0, 4)

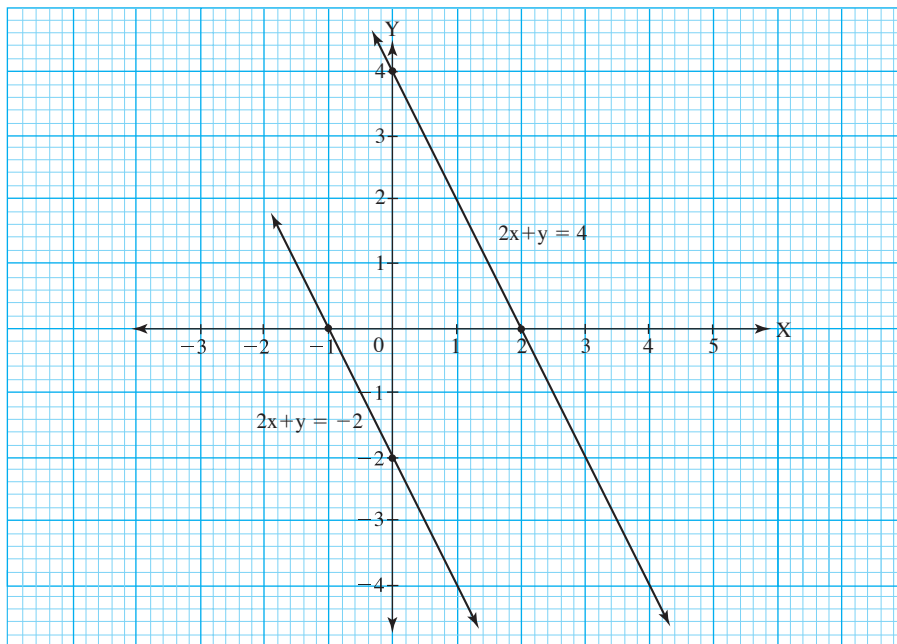
จากสมการ $2x+y = -2$

$$2(0)+y = -2$$

$$y = -2$$

จุดตัดแกน Y คือ (0, -2)

นำพิกัดของจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y เขียนลงบนแกนพิกัดฉาก แล้วเขียนกราฟเส้นตรงผ่านจุดทั้งสอง จะได้กราฟเส้นตรงสองเส้นขนานกัน ดังรูป



ตัวอย่างที่ 3 แก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรต่อไปนี้โดยวิธีเขียนกราฟ

$$6x = 12 - 2y$$

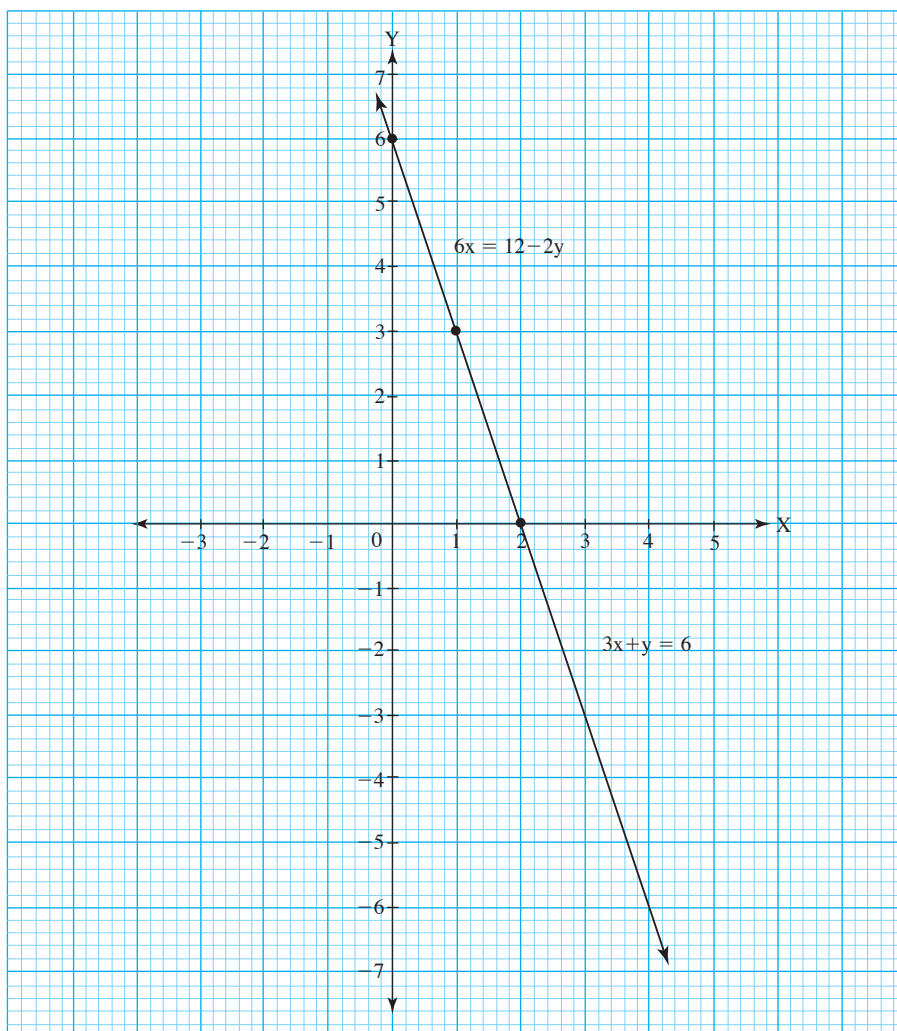
$$3x + y = 6$$

วิธีทำ เขียนกราฟของ $6x = 12 - 2y$ และ $3x + y = 6$ บนระนาบโดยใช้แกนพิกัดเดียวกัน โดยเริ่มจากหาพิกัดของจุดบางจุดบนกราฟ และกำหนดค่า x บางค่า เพื่อหาค่า y ดังนี้

	$6x = 12 - 2y$		$3x + y = 6$
หรือ	$y = \frac{12 - 6x}{2}$		หรือ $y = 6 - 3x$
	$y = 6 - 3x$		

x	0	1	2
y	6	3	0

เขียนกราฟของสมการทั้งสองได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่าคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $6x = 12 - 2y$ และมีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $3x + y = 6$

เนื่องจากสมการทั้งสองเป็นสมการที่สมมูลกัน กราฟของสมการทั้งสองจึงเป็นเส้นตรงสองเส้นซ้อนทับกัน แสดงว่าคู่อันดับทุกคู่อันดับที่เป็นพิกัดของจุดบนเส้นตรงที่ซ้อนทับกันนี้เป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

$$\text{จากสมการ } 3x + y = 6$$

$$y = -3x + 6$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรนี้มีคำตอบไม่จำกัดในรูป $(x, -3x + 6)$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใดๆ

ตอบ ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรนี้มีคำตอบไม่จำกัดในรูป $(x, -3x + 6)$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใดๆ

ความรู้เพิ่มเติม

จากตัวอย่างที่ 3 อาจเขียนกราฟของ $6x = 12 - 2y$ และ $3x + y = 6$ โดยหาจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y ดังนี้

หาจุดตัดแกน X โดยแทน $y = 0$

$$\begin{aligned} \text{จากสมการ} \quad 6x &= 12 - 2y \\ 6x &= 12 - 2(0) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

จุดตัดแกน X คือ $(2, 0)$

หาจุดตัดแกน Y โดยแทน $x = 0$

$$\begin{aligned} \text{จากสมการ} \quad 6x &= 12 - 2y \\ 6(0) &= 12 - 2y \\ y &= 6 \end{aligned}$$

จุดตัดแกน Y คือ $(0, 6)$

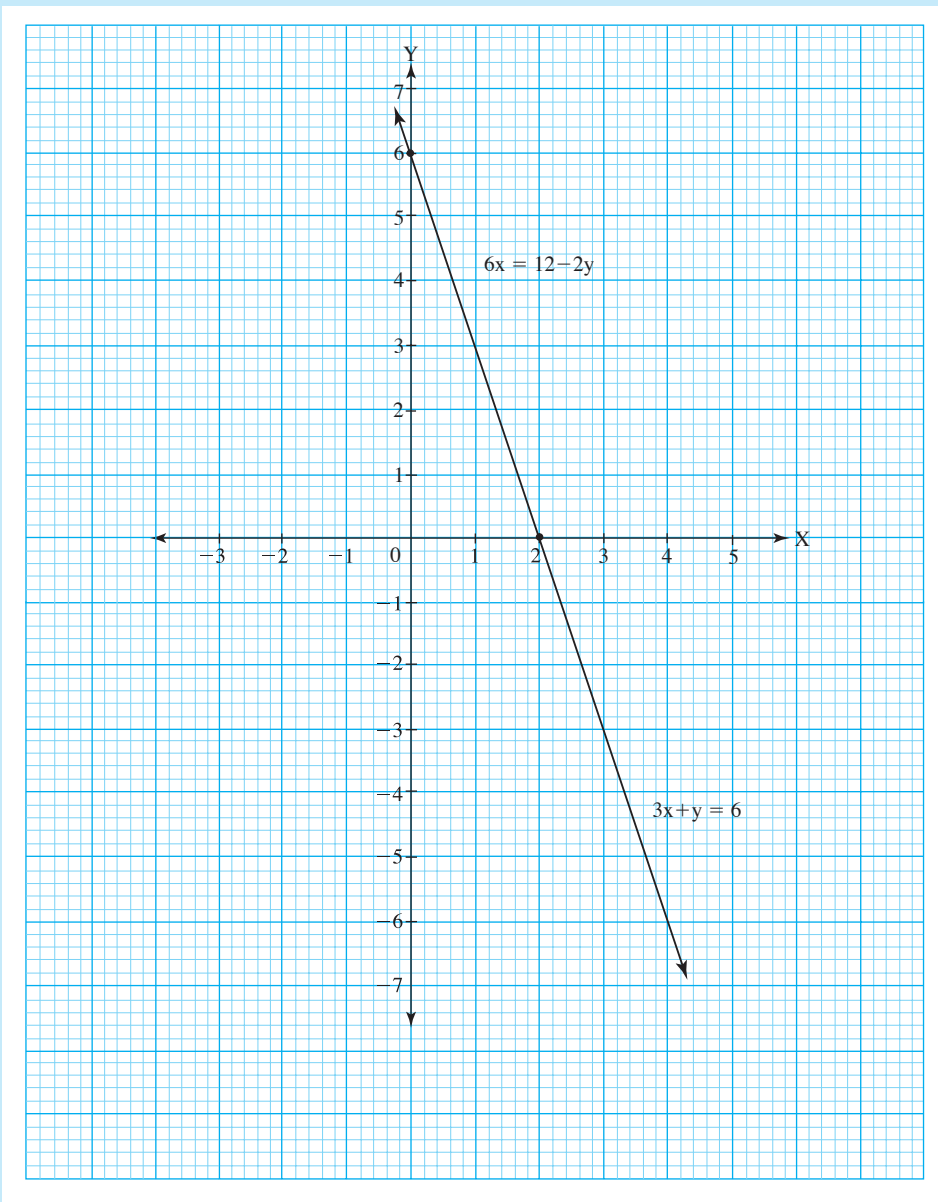
$$\begin{aligned} \text{จากสมการ} \quad 3x + y &= 6 \\ 3x + 0 &= 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

จุดตัดแกน X คือ $(2, 0)$

$$\begin{aligned} \text{จากสมการ} \quad 3x + y &= 6 \\ 3(0) + y &= 6 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

จุดตัดแกน Y คือ $(0, 6)$

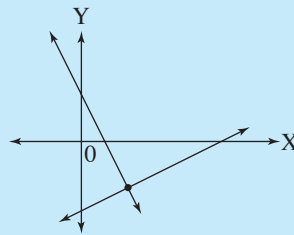
นำพิกัดของจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y เขียนลงบนแกนพิกัดฉาก แล้วเขียนกราฟเส้นตรงผ่านจุดทั้งสอง จะได้กราฟเส้นตรงสองเส้นซ้อนทับกัน ดังรูป



คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรให้ได้ 3 กรณี

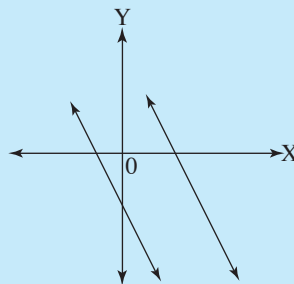
1

มีคู่อันดับของจำนวนจริงเพียงคู่อันดับเดียวที่สอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ถ้าพิจารณาจากกราฟจะได้ว่ากราฟตัดกันเพียงจุดเดียวและจุดตัดนั้นเป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร



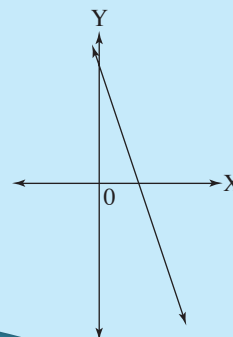
2

ไม่มีคู่อันดับของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ถ้าพิจารณาจากกราฟจะได้ว่ากราฟทั้งสองจะเป็นเส้นตรงขนานกัน



3

มีคู่อันดับของจำนวนจริงโดยจำนวนคู่อันดับมีไม่จำกัดที่สอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ถ้าพิจารณาจากกราฟจะได้ว่ากราฟทั้งสองเป็นเส้นตรงซ้อนทับกัน





แบบฝึกหัดที่ 2

แก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรต่อไปนี้โดยวิธีเขียนกราฟ และตรวจสอบคำตอบที่ได้ (10 คะแนน)

1. $x + y = 7$

$x - y = -5$

3. $4x + 5y = 17$

$4x = 20 - 5y$

5. $5x + y = 5$

$-10x = 2y + 10$

7. $x + 2y = -6$

$5y = x - 1$

9. $2x - 4y = 8$

$4y - 2x = -8$

2. $2x - 3y = 1$

$4x + y = 23$

4. $2x + y = 5$

$x - 2y = -10$

6. $5x + 6y = 2$

$3x - 2y = -10$

8. $3x + y = 2$

$6x + 2y - 4 = 0$

10. $1 - 3y = 5x$

$10x + 6y = 2$

ได้

เต็ม

10

ดีมาก

80% - 100%

8 - 10 คะแนน

ดี

60% - 79%

6 - 7 คะแนน

ปานกลาง

40% - 59%

4 - 5 คะแนน

ปรับปรุง

0% - 39%

0 - 3 คะแนน

ถ้าได้น้อยกว่า 60%
ให้ทบทวนอีกครั้ง

2.2 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยวิธีแทนค่าตัวแปร (substitution method)

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร นอกจากวิธีเขียนกราฟแล้ว อาจหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรได้โดยใช้วิธีแทนค่าตัวแปรโดยมี 2 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 เลือกจัดรูปตัวแปร y ในเทอมของตัวแปร x โดยมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1

เลือก 1 สมการ แล้วจัดรูปให้ตัวแปร y อยู่ในเทอมของตัวแปร x

ขั้นที่ 2

แทนค่าตัวแปร y จากสมการที่ได้จากขั้นที่ 1 ลงในสมการที่เหลือ แล้วแก้สมการเพื่อหาค่าตัวแปร x

ขั้นที่ 3

แทนค่าตัวแปร x ที่ได้ในสมการที่โจทย์กำหนดหรือสมการที่จัดรูปแล้ว (y ในเทอมของ x) เพื่อหาค่าตัวแปร y

วิธีที่ 2 เลือกจัดรูปตัวแปร x ในเทอมของตัวแปร y โดยมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1

เลือก 1 สมการ แล้วจัดรูปให้ตัวแปร x อยู่ในเทอมของตัวแปร y

ขั้นที่ 2

แทนค่าตัวแปร x จากสมการที่ได้จากขั้นที่ 1 ในสมการที่เหลือ แล้วแก้สมการเพื่อหาค่าตัวแปร y

ขั้นที่ 3

แทนค่าตัวแปร y ที่ได้ในสมการที่โจทย์กำหนดหรือสมการที่จัดรูปแล้ว (x ในเทอมของ y) เพื่อหาค่าตัวแปร x

ตัวอย่างที่ 4 แก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรต่อไปโดยวิธีแทนค่าตัวแปร

$$x + y = 50 \quad \text{.....} \textcircled{1}$$

$$2x + 4y = 140 \quad \text{.....} \textcircled{2}$$

วิธีทำ วิธีที่ 1 เลือกจัดรูปตัวแปร y ในเทอมของตัวแปร x

ขั้นที่ 1 จากสมการ $\textcircled{1}$ จัดรูปให้ตัวแปร y อยู่ในเทอมของตัวแปร x จะได้

$$y = 50 - x \quad \text{.....} \textcircled{3}$$

ขั้นที่ 2 แทนค่าตัวแปร y จากสมการ $\textcircled{3}$ ในสมการ $\textcircled{2}$ จะได้

$$2x + 4(50 - x) = 140$$

$$2x + 200 - 4x = 140$$

$$-2x + 200 = 140 \quad \text{.....} \textcircled{4}$$

แก้สมการ $\textcircled{4}$ เพื่อหาค่าของตัวแปร x จะได้

$$-2x + 200 = 140$$

$$-2x = 140 - 200$$

$$-2x = -60$$

$$x = \frac{-60}{-2}$$

$$x = 30$$

ขั้นที่ 3 แทนค่าตัวแปร x ที่ได้ในสมการ $\textcircled{3}$ เพื่อหาค่าตัวแปร y จะได้

$$y = 50 - 30$$

$$y = 20$$

ดังนั้น $(30, 20)$ เป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

วิธีที่ 2 เลือกจัดรูปตัวแปร x ในเทอมของตัวแปร y

ขั้นที่ 1 จากสมการ $\textcircled{1}$ จัดรูปให้ตัวแปร x อยู่ในเทอมของตัวแปร y จะได้

$$x = 50 - y \quad \text{.....} \textcircled{3}$$

ขั้นที่ 2 แทนค่าตัวแปร x จากสมการ $\textcircled{3}$ ในสมการ $\textcircled{2}$ จะได้

$$2(50 - y) + 4y = 140$$

$$100 - 2y + 4y = 140$$

$$2y + 100 = 140 \quad \text{.....} \textcircled{4}$$

แก้สมการ $\textcircled{4}$ เพื่อหาค่าของตัวแปร y จะได้

$$2y + 100 = 140$$

$$2y = 140 - 100$$

$$2y = 40$$

$$y = \frac{40}{2}$$

$$y = 20$$