

แบบฝึกหัดพร้อมเฉลย
และอธิบายข้อที่ถูกต้อง

Advance Math 2

- ความยาว พื้นที่ พื้นที่ผิว และปริมาตร • อัตราส่วนตรีโกณมิติ และแคลคูลัส
- เรขาคณิตวิเคราะห์ และเส้นตรง • ลำดับและอนุกรม • การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่
- ความน่าจะเป็น • ร้อยละ, กำไรขาดทุน, ของผสม • เมตริกซ์ และดีเทอร์มิแนนต์ • สถิติ



Advance Math 2





Advance Math 2

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

978-616-596-456-2

ราคา 400 บาท

© สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ (ฉบับที่ 5) พ.ศ. 2565

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ
สถาบันโอเพียน.

Advance Math 2. -- ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์, 2569.

278 หน้า.

1. คณิตศาสตร์ -- ข้อสอบและเฉลย. I. ชื่อเรื่อง.

510.76

ISBN 978-616-596-456-2

จัดจำหน่ายหนังสืออิเล็กทรอนิกส์ (e-book) โดย

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

28, 30, 32 ซอยรังสิต-ปทุมธานี 16 ซอย 7

ต. ประชาธิปัตย์ อ. รัษฎา จ. ปทุมธานี 12130

โทรศัพท์ 0-2958-1125, 0-2958-1127

e-mail : sales@skybook.co.th, saleskybook@gmail.com

www.facebook.com/skybook.co.th

www.skybook.co.th

คำนำ

ในปัจจุบันนี้การศึกษาต่อในระดับปริญญาโทเป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายมากขึ้น จึงทำให้มีการแข่งขันสูง ดังนั้น การเตรียมตัวที่ดีจึงเป็นพื้นฐานที่สำคัญด้วยหนังสือ Advance Math 2 เล่มนี้เหมาะสำหรับเพื่อฟื้นฟูความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ทั้งหมดในระดับมัธยมต้น มัธยมปลาย และปริญญาตรี เพื่อเตรียมในชั้นเรียนของแต่ละระดับมีการครอบคลุมด้วยเนื้อหาไว้อย่างสมบูรณ์

หนังสือ Advance Math 2 ยังมีอีก 2 เล่มที่อยู่ในชุดเดียวกัน คือ Advance Math 1 และ Advance Math Test

หนังสือ Advance Math 2 เล่มนี้ จะเป็นส่วนสำคัญที่ช่วยให้ผู้ที่สนใจประสบความสำเร็จในการสอบตามที่มุ่งหวังไว้ทุกประการ

สารบัญ

บทที่ 1	ความยาว พื้นที่ พื้นที่ผิว และปริมาตร	5
	แบบฝึกหัดบทที่ 1	24
	เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 1	26
บทที่ 2	อัตราส่วนตรีโกณมิติ และแคลคูลัส	31
	แบบฝึกหัดบทที่ 2	40
	เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 2	45
	แบบทดสอบบทที่ 2	63
	เฉลยแบบทดสอบบทที่ 2	68
บทที่ 3	เรขาคณิตวิเคราะห์ และเส้นตรง	69
	แบบฝึกหัดบทที่ 3 พร้อมวิธีทำและเฉลย	83
	แบบทดสอบบทที่ 3	96
	เฉลยแบบทดสอบบทที่ 3	100
บทที่ 4	ลำดับและอนุกรม	101
	แบบทดสอบบทที่ 4	111
	เฉลยแบบทดสอบบทที่ 4	117
บทที่ 5	การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่	118
	แบบฝึกหัดบทที่ 5 พร้อมวิธีทำและเฉลย	127
	แบบทดสอบบทที่ 5	147
	เฉลยแบบทดสอบบทที่ 5	152
บทที่ 6	ความน่าจะเป็น	153
	แบบฝึกหัดบทที่ 6	168
	เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 6	172
	แบบทดสอบบทที่ 6	177
	เฉลยแบบทดสอบบทที่ 6	180
บทที่ 7	ร้อยละ กำไรขาดทุน ของผสม	181
	แบบฝึกหัดบทที่ 7	186
	เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 7	191
บทที่ 8	เมตริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์	192
	แบบฝึกหัดบทที่ 8 พร้อมวิธีทำและเฉลย	206
	แบบทดสอบบทที่ 8	224
	เฉลยแบบทดสอบบทที่ 8	230
บทที่ 9	สถิติ	231
	แบบฝึกหัดบทที่ 9	263
	เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 9	268
	แบบทดสอบบทที่ 9	273
	เฉลยแบบทดสอบบทที่ 9	278



ความยาว

ความยาว (length) หมายถึง ระยะห่างระหว่างจุดสองจุด

การวัดความยาว มี 2 วิธี คือ

1. วัดอย่างละเอียด จนถึงทศนิยมตำแหน่งที่สอง
2. วัดโดยประมาณ เพื่อให้ได้ค่าใกล้เคียง

อุปกรณ์ในการวัดความยาว

1. ไม้บรรทัด มีความยาว 1 ฟุต หรือ 30 เซนติเมตร
2. ไม้เมตร ตลับเมตร เทปวัด มีความยาว 1 เมตรขึ้นไป
3. ไม้ฉาก ใช้วัดความยาวและมุมฉาก

หน่วยของความยาว ที่นิยมใช้ได้แก่

1. มาตราเมตริก มีหน่วยเป็นมิลลิเมตร เซนติเมตร เมตร และกิโลเมตร

$$10 \text{ มิลลิเมตร} = 1 \text{ เซนติเมตร}$$

$$100 \text{ เซนติเมตร} = 1 \text{ เมตร}$$

$$1,000 \text{ เมตร} = 1 \text{ กิโลเมตร}$$

2. มาตราอังกฤษ มีหน่วยเป็น นิ้ว ฟุต หลา และไมล์

$$12 \text{ นิ้ว} = 1 \text{ ฟุต}$$

$$3 \text{ ฟุต} = 1 \text{ หลา}$$

$$1,760 \text{ หลา} = 1 \text{ ไมล์}$$

3. มาตราไทย มีหน่วยเป็น นิ้ว คืบ ศอก วา และเส้น

$$12 \text{ นิ้ว} = 1 \text{ คืบ}$$

$$2 \text{ คืบ} = 1 \text{ ศอก}$$

$$4 \text{ ศอก} = 1 \text{ วา}$$

$$20 \text{ วา} = 1 \text{ เส้น}$$

หน่วยเปรียบเทียบ

1 นิ้ว	=	2.54	เซนติเมตร
1 ฟุต	=	30.48	เซนติเมตร
1 วา	=	2	เมตร
1 กิโลเมตร	=	25	เส้น
8 กิโลเมตร	=	5	ไมล์

มาตราส่วน

มาตราส่วน (Scale) หมายถึง สัดส่วนที่ใช้ในการย่อหรือขยายส่วน ใช้ในการเขียนแผนผัง (plan) หรือแผนที่ (map) เช่น

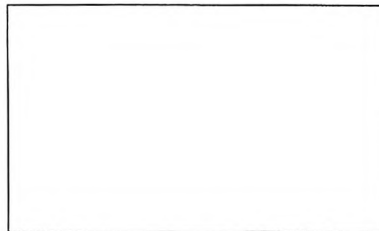
มาตราส่วน 1 : 20 หมายความว่า ความยาวในแผนผัง 1 หน่วยแทนความยาวจริง 20 หน่วย
 มาตราส่วน 20 : 1 หมายความว่า ความยาวในแผนผัง 20 หน่วยแทนความยาวจริง 1 หน่วย

ตัวอย่าง จงเขียนแผนผังของสนามรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กว้าง 6 เมตร ยาว 10 เมตร โดยใช้มาตราส่วน 1 เซนติเมตร : 2 เมตร

วิธีทำ มาตราส่วน 1 เซนติเมตร : 2 เมตร หมายความว่า ความยาวจริง 2 เมตรจะเป็นความยาวในแผนผัง 1 เซนติเมตร

$$\text{ดังนั้น ด้านกว้างในแผนผังจะยาว } \frac{6}{2} = 3 \text{ เซนติเมตร}$$

$$\text{และ ด้านยาวในแผนผังจะยาว } \frac{10}{2} = 5 \text{ เซนติเมตร}$$



ตอบ

มาตราส่วน 1 เซนติเมตร : 2 เมตร

- ข้อสังเกต**
1. แผนผังจะต้องบอกขนาดจริงด้วย เช่น 6 เมตร, 10 เมตร หรือบอกมาตราส่วนกำกับไว้ เช่น 1 เซนติเมตร : 2 เมตร หรือ 1 : 200
 2. แผนผังที่มีการประมาณความยาวของระยะทางและกำหนดตำแหน่งของสิ่งต่างๆ อย่างคร่าวๆ เรียกว่า "แผนผังอย่างสังเขป"

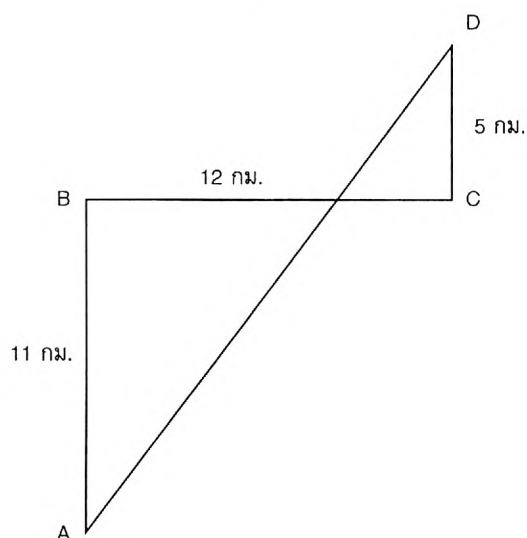
ตัวอย่าง ชายคนหนึ่งเดินทางจากตำบล A ไปทางทิศเหนือ 11 กิโลเมตร ถึงตำบล B เลี้ยวขวาดังตรงไปทางตะวันออก 12 กิโลเมตร ถึงตำบล C แล้วตรงขึ้นไปทางทิศเหนืออีก 5 กิโลเมตรถึงตำบล D อยากทราบว่า ตำบล A และ D อยู่ห่างกันเท่าใด

วิธีทำ โดยใช้มาตราส่วน 1 เซนติเมตร : 2 กิโลเมตร

จะได้แผนผังดังรูป ซึ่ง $AB = \frac{11}{2} = 5.5$ เซนติเมตร

$BC = \frac{12}{2} = 6$ เซนติเมตร

และ $CD = \frac{5}{2} = 2.5$ เซนติเมตร

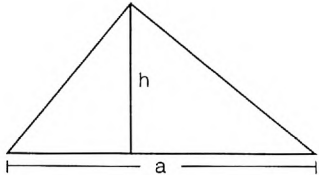


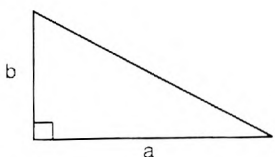
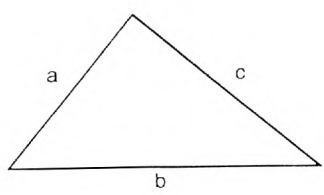
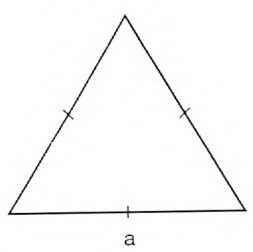
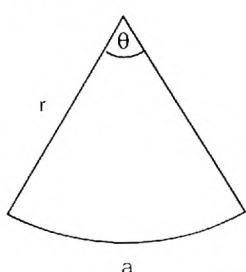
จากการวัดจะได้ $AD = 10$ เซนติเมตร

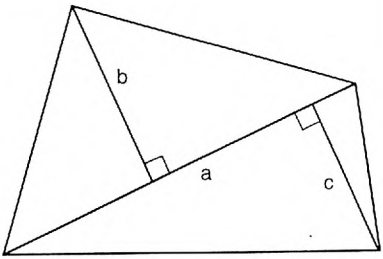
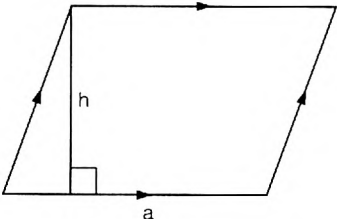
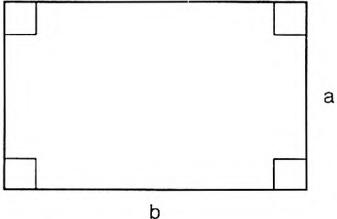
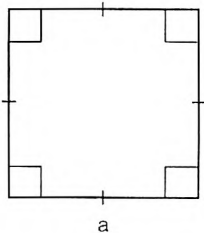
ตอบ นั่นคือ ตำบล A และ D อยู่ห่างกัน $10 \times 2 = 20$ กิโลเมตร

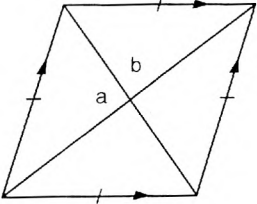
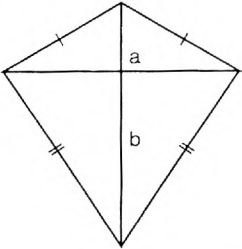
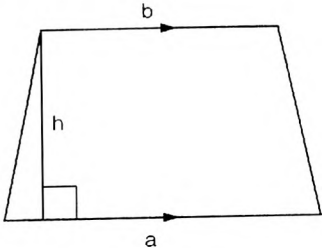
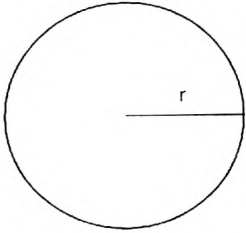
พื้นที่ (Area)

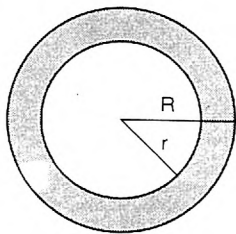
สูตรเบื้องต้นในการหาพื้นที่ ได้แก่

รูป	สูตร
สามเหลี่ยมใดๆ 	พื้นที่ $\Delta = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$ $= \frac{1}{2} ah$

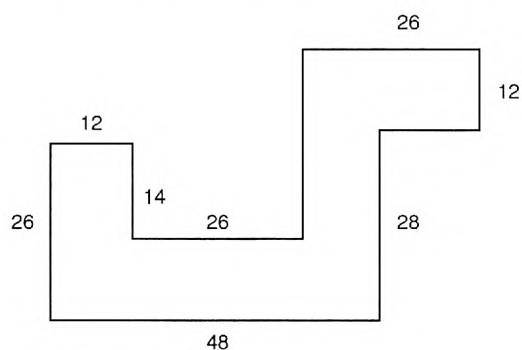
รูป	สูตร
สามเหลี่ยมมุมฉาก 	พื้นที่ Δ มุมฉาก = $\frac{1}{2} \times$ ผลคูณของด้านประกอบมุมฉาก $= \frac{1}{2} ah$
สามเหลี่ยมใดๆ 	พื้นที่ Δ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ เมื่อ s = $\frac{a+b+c}{2}$
สามเหลี่ยมด้านเท่า 	พื้นที่ Δ ด้านเท่า = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (ด้าน)² $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ และจะได้ว่า พื้นที่หกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (ด้าน)²
สามเหลี่ยมฐานโค้ง 	พื้นที่ Δ ฐานโค้ง = $\frac{\theta}{360} \pi r^2$ หรือพื้นที่ Δ ฐานโค้ง = $\frac{1}{2} ar$

รูป	สูตร
สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า 	พื้นที่ □ ด้านไม่เท่า = $\frac{1}{2} \times \text{เส้นทแยงมุม} \times \text{ผลบวกของเส้นกึ่ง}$ = $\frac{1}{2} a(b+c)$
สี่เหลี่ยมด้านขนาน 	พื้นที่ □ ข = ฐาน x สูง = ah
สี่เหลี่ยมผืนผ้า 	พื้นที่ □ ผ = กว้าง x ยาว = ab
สี่เหลี่ยมจัตุรัส 	พื้นที่ □ จ = (ด้าน)² = a² หรือ พื้นที่ □ จ = $\frac{1}{2} (\text{เส้นทแยงมุม})^2$

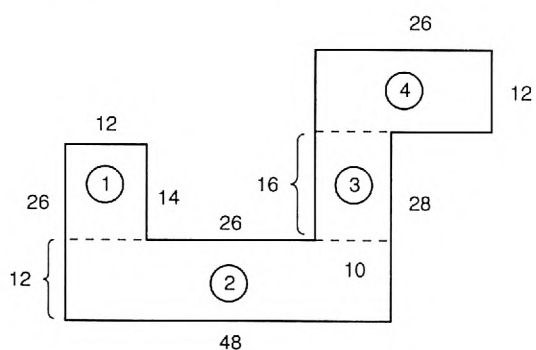
รูป	สูตร
สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 	พื้นที่ □ = $\frac{1}{2} \times$ ผลคูณของเส้นทแยงมุม = $\frac{1}{2} ab$
สี่เหลี่ยมรูปว่าว 	พื้นที่ □ รูปว่าว = $\frac{1}{2} \times$ ผลคูณของเส้นทแยงมุม = $\frac{1}{2} ab$
สี่เหลี่ยมคางหมู 	พื้นที่ □ = $\frac{1}{2} \times$ ผลบวกของด้านคู่ขนาน $\times$ สูง = $\frac{1}{2} (a+b)h$
วงกลม 	ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลาง = $2r$ ความยาวเส้นรอบวง = $2\pi r$ พื้นที่วงกลม = πr^2

รูป	สูตร
วงแหวน 	พื้นที่วงแหวน = $\pi(R^2 - r^2)$

ตัวอย่าง พื้นที่ของรูปมูมจาก กำหนดหน่วยความยาวเป็นเซนติเมตร



วิธีทำ ลากเส้นให้เกิดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังรูป

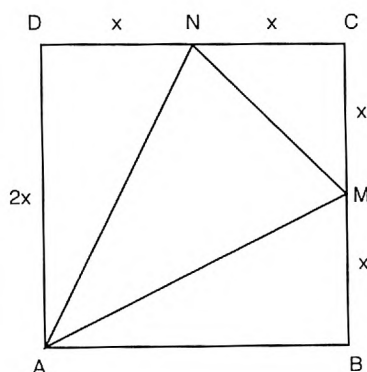


จะได้ พื้นที่รูป ① = $12 \times 14 = 168$ ตารางเซนติเมตร
พื้นที่รูป ② = $12 \times 48 = 576$ ตารางเซนติเมตร
พื้นที่รูป ③ = $10 \times 16 = 160$ ตารางเซนติเมตร
พื้นที่รูป ④ = $12 \times 26 = 312$ ตารางเซนติเมตร
ดังนั้น พื้นที่ที่ต้องการ = $168 + 576 + 160 + 312$ ตารางเซนติเมตร
= 1,216 ตารางเซนติเมตร

ตอบ

ตัวอย่าง ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส M และ N เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC, CD ตามลำดับ จาก AM, MN และ AN จงหาอัตราส่วนของพื้นที่สามเหลี่ยม AMN ต่อพื้นที่สี่เหลี่ยม ABCD

วิธีทำ



สมมติว่า AB ยาว $2x$ หน่วย

จะได้ พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD $= (2x)^2 = 4x^2$ ตารางหน่วย

พื้นที่สามเหลี่ยม ABM $= \frac{1}{2} \times 2x \cdot x = x^2$ ตารางหน่วย

พื้นที่สามเหลี่ยม AND $= \frac{1}{2} \times 2x \cdot x = x^2$ ตารางหน่วย

พื้นที่สามเหลี่ยม MCN $= \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{x^2}{2}$ ตารางหน่วย

ดังนั้น พื้นที่สามเหลี่ยม AMN $= 4x^2 - x^2 - x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{3x^2}{2}$ ตารางหน่วย

จะได้ $\frac{\text{พื้นที่สามเหลี่ยม AMN}}{\text{พื้นที่สี่เหลี่ยม ABCD}} = \frac{\frac{3x^2}{2}}{4x^2} = \frac{3}{8}$

ตอบ แสดงว่า อัตราส่วนของพื้นที่สามเหลี่ยม AMN ต่อพื้นที่สี่เหลี่ยม ABCD $= 3 : 8$

ตัวอย่าง พรมกว้าง 27 นิ้ว ต้องการปูพื้นห้องซึ่งกว้าง 10 ฟุต 6 นิ้ว ยาว 15 ฟุต 6 นิ้ว ด้วยพรมนี้ จะต้องใช้พรมยาวเท่าไร และถ้าพรมราคาหลาละ 450 บาท จะต้องจ่ายเงินค่าพรมเท่าไร

วิธีทำ พื้นห้องกว้าง $= 10 \text{ ฟุต } 6 \text{ นิ้ว} = 10 \frac{1}{2} \text{ นิ้ว}$

พื้นห้องยาว $= 15 \text{ ฟุต } 6 \text{ นิ้ว} = 15 \frac{1}{2} \text{ นิ้ว}$

จะได้ พื้นที่ของพื้นห้อง $= 10 \frac{1}{2} \times 15 \frac{1}{2}$ ตารางฟุต
 $= \frac{21}{2} \times \frac{31}{2} = \frac{651}{4}$ ตารางฟุต

แต่พรมกว้าง $= 27 \text{ นิ้ว} = \frac{27}{12} \text{ ฟุต} = \frac{9}{4} \text{ ฟุต}$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น ต้องใช้พรมยาว} &= \frac{651}{4} \div \frac{9}{4} \text{ ฟุต} \\
 &= \frac{651}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{217}{3} \text{ ฟุต} \\
 &= 72 \text{ ฟุต } 4 \text{ นิ้ว}
 \end{aligned}$$

เนื่องจากพรมราคาหลาละ 450 บาท

ตอบ ดังนั้น จะต้องจ่ายเงินค่าพรม $= \frac{217}{3 \times 3} \times 450 = 10,850$ บาท

ตัวอย่าง สนามรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง 2.10 เมตร ยาว 3.85 เมตร ต้องการปูกระเบื้องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยใช้กระเบื้องขนาดใหญ่ที่สุดปูเต็มสนามพอดี และไม่ต้องตัดกระเบื้องเลย อยากทราบว่าต้องใช้กระเบื้องยาวด้านละกี่เซนติเมตร และต้องใช้กี่แผ่น

วิธีทำ หา ห.ร.ม. ของ 210 และ 385

1	210	385	1
	175	210	
	<u>35</u>	175	5
		175	

แสดงว่า ต้องใช้กระเบื้องยาวด้านละ 35 เซนติเมตร

เนื่องจาก พื้นที่สนาม $= 210 \times 385$ ตารางเซนติเมตร

$$= 80,850 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

และ พื้นที่กระเบื้อง 1 แผ่น $= 35 \times 35$ ตารางเซนติเมตร

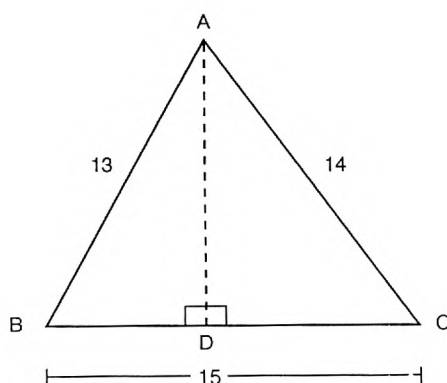
$$= 1,225 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

ดังนั้น ต้องใช้กระเบื้อง $= \frac{80,850}{1,225}$ แผ่น

ตอบ $= 66$ แผ่น

ตัวอย่าง ถ้าด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งยาว 13, 14 และ 15 เซนติเมตร ส่วนสูงที่ลากจากมุมตรงข้ามมายังด้านที่ยาว 15 เซนติเมตร ยาวเท่าใด

วิธีทำ



จากรูป $a = 15, b = 14$ และ $c = 13$

$$\begin{aligned} s &= \frac{a + b + c}{2} \\ &= \frac{15 + 14 + 13}{2} \\ &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ พื้นที่สามเหลี่ยม ABC} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)} && \text{ตารางเซนติเมตร} \\ &= \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} && \text{ตารางเซนติเมตร} \\ &= \sqrt{3 \times 7 \times 3 \times 2 \times 7 \times 2 \times 2 \times 2} && \text{ตารางเซนติเมตร} \\ &= 3 \times 7 \times 2 \times 2 && \text{ตารางเซนติเมตร} \\ &= 84 \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แต่ พื้นที่สามเหลี่ยม ABC} &= \frac{1}{2} \times BC \times AD \\ &= \frac{1}{2} \times 15 \times AD \end{aligned}$$

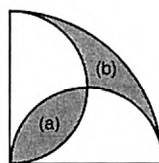
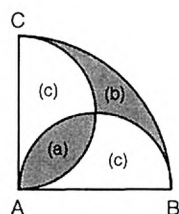
$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{2} \times 15 \times AD = 84$$

$$AD = \frac{84 \times 2}{15} \text{ เซนติเมตร}$$

$$= \frac{56}{5} \text{ เซนติเมตร}$$

ตอบ นั่นคือ ส่วนสูงที่ต้องการยาว 11.2 เซนติเมตร

ตัวอย่าง จากรูป จงแสดงให้เห็นว่า พื้นที่ที่แรเงา (a) และ (b) มีค่าเท่ากัน



วิธีทำ

สมมติว่า AB ยาว x หน่วย

พิจารณาค่า (a), (b), (c) จากรูป จะได้ว่า

$$(a) + (c) = \frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{8} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$(a) + (b) + 2(c) = \frac{1}{4} \cdot \pi x^2 = \frac{\pi x^2}{4} \quad \dots\dots\dots (2)$$

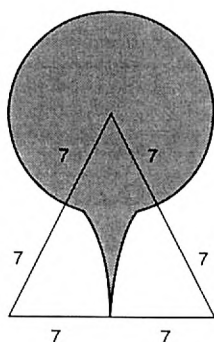
$$2 \times (1) ; \quad 2(a) + 2(c) = \frac{\pi x^2}{4} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$(3) - (2) ; \quad (a) - (b) = 0$$

$$(a) = (b)$$

ตอบ นั่นคือ พื้นที่ที่แรเงา (a) = พื้นที่ที่แรเงา (b)

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ที่แรเงา



วิธีทำ พื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่า = $\frac{\sqrt{3}}{4} (14)^2$ ตารางหน่วย

$$= 49\sqrt{3} \quad \text{ตารางหน่วย}$$

พื้นที่วงกลม = $\pi(7)^2$ ตารางหน่วย

$$= \frac{22}{7} \times 7^2 = 154 \text{ ตารางหน่วย}$$

ดังนั้น พื้นที่ที่แรเงา = พื้นที่วงกลม + $\left(\text{พื้นที่ } \triangle \text{ ด้านเท่า} - \frac{1}{2} \text{ พื้นที่วงกลม} \right)$

$$= 154 + \left(49\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 154 \right) \text{ ตารางหน่วย}$$

$$= 154 + 49\sqrt{3} - 77 \quad \text{ตารางหน่วย}$$

$$= 77 + 49\sqrt{3} \quad \text{ตารางหน่วย}$$

$$= 77 + 49 \times 1.732 \quad \text{ตารางหน่วย}$$

ตอบ

$$= 161.868 \quad \text{ตารางหน่วย}$$

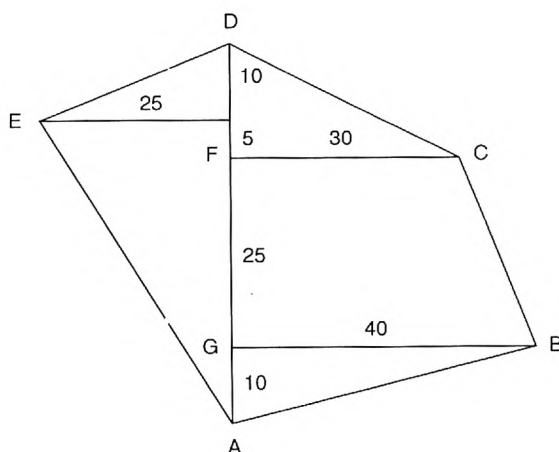
สมุดสนาม

สมุดสนาม (field book) คือ สมุดที่ช่างสำรวจใช้บันทึกความยาวของระยะต่างๆ ที่ได้จากการรังวัดที่ดิน เพื่อหาพื้นที่ของที่ดินนั้นๆ

ตัวอย่าง จากบันทึกของสมุดสนามต่อไปนี้ จงเขียนแผนผังของที่ดินและคำนวณหาพื้นที่ของที่ดินนั้น

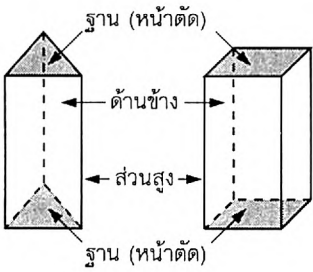
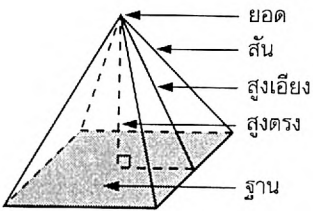
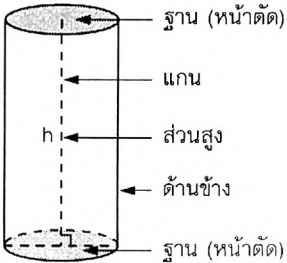
เมตร		
	ถึง D	
E 25	50	
	40	
	35	30 C
	10	40 B
	จาก A	

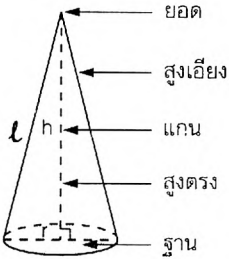
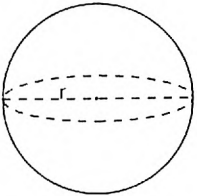
วิธีทำ



จากรูป	พื้นที่สามเหลี่ยม ADE	$= \frac{1}{2} \times 50 \times 25$	$= 625$ ตารางเมตร
	พื้นที่สามเหลี่ยม CDF	$= \frac{1}{2} \times 30 \times 15$	$= 225$ ตารางเมตร
	พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู BCFG	$= \frac{1}{2} \times (30+40) \times 25$	$= 875$ ตารางเมตร
	พื้นที่สามเหลี่ยม ABG	$= \frac{1}{2} \times 40 \times 10$	$= 200$ ตารางเมตร
	ดังนั้น ที่ดินมีพื้นที่	$= 625 + 225 + 875 + 200$	ตารางเมตร
ตอบ		$= 1,925$ ตารางเมตร	

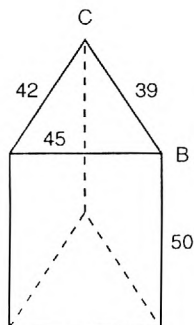
พื้นที่ผิวและปริมาตร

รูป	พื้นที่ผิว	ปริมาตร
ปริซึม (Prism) 	พื้นที่ผิวข้าง = เส้นรอบฐาน × ส่วนสูง พื้นที่ผิวทั้งหมด = พื้นที่ผิวข้าง + 2 (พื้นที่ฐาน)	ปริมาตร = พื้นที่ฐาน × ส่วนสูง
พีระมิด (Pyramid) 	พื้นที่ผิวข้าง = ผลบวกของพื้นที่ หน้าทุกหน้า ซึ่ง เป็นรูป Δ ถ้าฐานเป็นรูปเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า จะได้ว่า พื้นที่ผิวข้าง = $\frac{1}{2} \times$ ความยาว รอบฐาน $\times$ สูงเอียง พื้นที่ผิวทั้งหมด = พื้นที่ผิวข้าง + พื้นที่ฐาน	ปริมาตร = $\frac{1}{3} \times$ พื้นที่ฐาน $\times$ สูงตรง
ทรงกระบอก (Cylinder) 	พื้นที่ผิวข้าง = $2\pi rh$ พื้นที่ฐาน = πr^2 พื้นที่ผิวทั้งหมด = $2\pi rh + 2\pi r^2$	ปริมาตร = $\pi r^2 h$

รูป	พื้นที่ผิว	ปริมาตร
กรวย 	พื้นที่ผิวข้าง = $\pi r l$ พื้นฐาน = πr^2 พื้นที่ผิวทั้งหมด = $\pi r l + \pi r^2$	ปริมาตร = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$
ทรงกลม 	พื้นที่ผิว = $4\pi r^2$	ปริมาตร = $\frac{4}{3} \pi r^3$

ตัวอย่าง ฐานของปริซึมเป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านยาว 39, 42, 45 เซนติเมตร ถ้าปริซึมสูง 50 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ผิวทั้งหมดและปริมาตร

วิธีทำ



ให้ $a = 39$, $b = 42$ และ $c = 45$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } s &= \frac{a + b + c}{2} \\
 &= \frac{39 + 42 + 45}{2} \\
 &= 63
 \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ฐาน = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
 $= \sqrt{63(63-39)(63-42)(63-45)}$ ตารางเซนติเมตร
 $= \sqrt{63 \times 24 \times 21 \times 18}$ ตารางเซนติเมตร
 $= 756$ ตารางเซนติเมตร

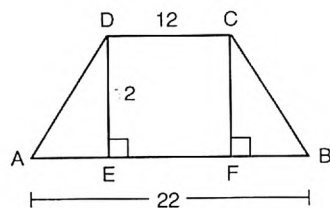
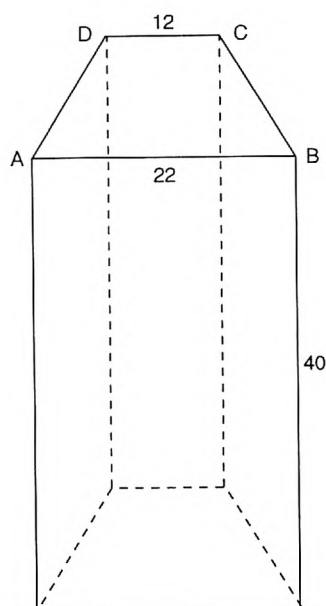
พื้นที่ผิวข้าง = เส้นรอบฐาน $\times$ ส่วนสูง
 $= (39+42+45) \times 50$ ตารางเซนติเมตร
 $= 126 \times 50 = 6,300$ ตารางเซนติเมตร

นั่นคือ พื้นที่ผิวทั้งหมด = พื้นที่ผิวข้าง + $2 \times$ พื้นที่ฐาน
 $= 6,300 + 2(756)$ ตารางเซนติเมตร
 $= 6,300 + 1,512$ ตารางเซนติเมตร
 $= 7,812$ ตารางเซนติเมตร

และ ปริมาตรของปริซึม = พื้นที่ฐาน $\times$ ส่วนสูง
 $= 756 \times 50$ ลูกบาศก์เซนติเมตร
 $= 37,800$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

ตัวอย่าง ปริซึมรูปหนึ่งมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วซึ่งมีด้านคู่ขนานยาว 12 เซนติเมตร และ 22 เซนติเมตร เส้นตั้งฉากระหว่างด้านคู่ขนานยาว 12 เซนติเมตร ถ้าปริซึมสูง 40 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตร

วิธีทำ



จากรูป $AE = \frac{22 - 12}{2}$
 $= 5$ เซนติเมตร

จากสามเหลี่ยม ADE ; $AD^2 = AE^2 + DE^2 = 5^2 + 12^2$
 $= 25 + 144 = 169$

จะได้ $AD = 13$ เซนติเมตร

ดังนั้น $BC = 13$ เซนติเมตร

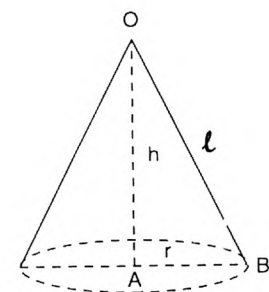
จะได้ พื้นที่ฐาน $= \frac{1}{2} \times (22+12) \times 12$ ตารางเซนติเมตร
 $= 204$ ตารางเซนติเมตร

พื้นที่ผิวข้าง $=$ เส้นรอบฐาน $\times$ ส่วนสูง
 $= (22+13+12+13) \times 40$ ตารางเซนติเมตร
 $= 2,400$ ตารางเซนติเมตร

ดังนั้น พื้นที่ผิวทั้งหมด $=$ พื้นที่ผิวข้าง $+ 2 \times$ พื้นที่ฐาน
 $= 2,400 + 2(204)$ ตารางเซนติเมตร
 $= 2,808$ ตารางเซนติเมตร

และ ปริมาตรของปริซึม $=$ พื้นที่ฐาน $\times$ ส่วนสูง
 $= 204 \times 40$ ลูกบาศก์เซนติเมตร
 $= 8,160$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

ตอบ

ตัวอย่าง
วิธีทำ

เนื่องจาก พื้นที่ผิวโค้ง $= 4$ เท่าของพื้นที่ฐาน
 $\pi r l = 4\pi r^2$
 $l = 4r$

จากสามเหลี่ยม OAB ; $l^2 = h^2 + r^2$
 $(4r)^2 = 5^2 + r^2$
 $15r^2 = 25$
 $r^2 = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$

ปริมาตรกรวย $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$
 $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{3} \times 5$ ลูกบาศก์เซนติเมตร
 $= 8.730$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

ตอบ

ตัวอย่าง ทรงกลมตันลูกหนึ่งมีพื้นที่ผิว 1,386 ตารางเซนติเมตร ทรงกลมมีปริมาตรเท่าใด

วิธีทำ

$$\text{พื้นที่ผิวทรงกลม} = 4\pi r^2$$

$$1,386 = 4 \times \frac{22}{7} \times r^2$$

$$r^2 = \frac{1,386 \times 7}{4 \times 22} = \frac{441}{4}$$

$$r = \frac{21}{2} \text{ เซนติเมตร}$$

$$\text{ดังนั้น ปริมาตรทรงกลม} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{2}\right)^3 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

ตอบ

$$= 4,851 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

ตัวอย่าง ชิ้นเงินรูปครึ่งทรงกลม มีเส้นผ่านศูนย์กลางวงนอกยาว 12 เซนติเมตร ชันหนา 1 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ผิวทั้งหมดและน้ำหนักของชิ้น (กำหนดเงิน 1 ลูกบาศก์เซนติเมตรหนัก 8.88 กรัม)

วิธีทำ

$$\text{รัศมีวงกลมวงนอก} = \frac{12}{2} = 6 \text{ เซนติเมตร}$$

$$\text{รัศมีวงกลมวงใน} = 6 - 1 = 5 \text{ เซนติเมตร}$$

$$\text{ให้ } R = 6 \text{ และ } r = 5$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ผิวโค้งด้านนอก} &= \frac{1}{2} (4\pi R^2) \\ &= \frac{1}{2} (4\pi \times 6^2) = 72\pi \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ผิวโค้งด้านใน} &= \frac{1}{2} (4\pi r^2) \\ &= \frac{1}{2} (4\pi \times 5^2) = 50\pi \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่วงแหวนปากชิ้น} &= \pi(R^2 - r^2) \\ &= \pi(6^2 - 5^2) = 11\pi \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ พื้นที่ผิวทั้งหมด} &= 72\pi + 50\pi + 11\pi \\ &= 133\pi \text{ ตารางเซนติเมตร} \\ &= \frac{133 \times 22}{7} = 418 \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ ปริมาตรเงิน} &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 \right) \\ &= \frac{2}{3} \pi (R^3 - r^3) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} (6^3 - 5^3) \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \\ &= \frac{572}{3} \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \end{aligned}$$

และเนื่องจาก เงิน 1 ลูกบาศก์เซนติเมตรหนัก 8.88 กรัม

$$\text{นั่นคือ} \quad \text{ชั้นเงินหนัก} = \frac{572}{3} \times 8.88 \text{ กรัม}$$

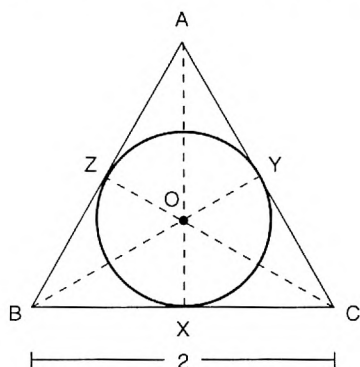
ตอบ

$$= 1,693.12 \text{ กรัม}$$

ตัวอย่าง

ภาชนะรูปทรงปริซึมมีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ด้านยาวด้านละ 2 ฟุต ภาชนะสูง 2 ฟุต นำลูกกลมโลหะโตที่สุดใส่ลงไปในภาชนะ แล้วเติมน้ำจนเต็มภาชนะ จงหาปริมาตรน้ำที่เติมลงไปนั้น

วิธีทำ



$$\text{พื้นที่ฐานปริซึม} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2)^2 \quad \text{ตารางฟุต}$$

$$= \sqrt{3} \quad \text{ตารางฟุต}$$

$$\text{ปริมาตรปริซึม} = \sqrt{3} \times 2 \quad \text{ลูกบาศก์ฟุต}$$

$$= 2\sqrt{3} \quad \text{ลูกบาศก์ฟุต}$$

$$\begin{aligned} \text{จากสามเหลี่ยม } ABX ; \quad AX^2 &= AB^2 - BX^2 \\ &= 2^2 - 1^2 = 3 \end{aligned}$$

$$AX = \sqrt{3} \text{ ฟุต}$$

$$\begin{aligned} OX &= \frac{1}{3} \cdot AX \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ฟุต} \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad \text{ทรงกลมโตที่สุดมีรัศมี} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ฟุต}$$

$$\text{ปริมาตรทรงกลม} = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 \text{ ลูกบาศก์ฟุต}$$

$$= \frac{88\sqrt{3}}{189} \text{ ลูกบาศก์ฟุต}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \text{ปริมาตรน้ำที่เติมลงไป} = \text{ปริมาตรปริซึม} - \text{ปริมาตรทรงกลม}$$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{88\sqrt{3}}{189} \text{ ลูกบาศก์ฟุต}$$

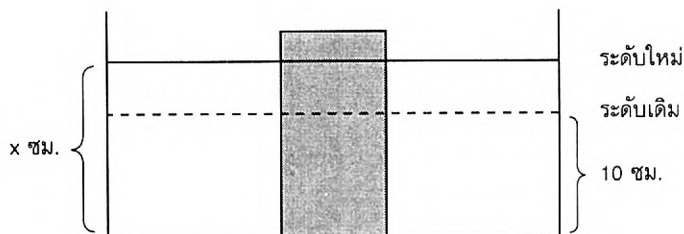
$$= \frac{290\sqrt{3}}{189} \text{ ลูกบาศก์ฟุต}$$

$$= 2.658 \text{ ลูกบาศก์ฟุต}$$

ตอบ

ตัวอย่าง ถังสี่เหลี่ยมใบหนึ่งยาว 31 เซนติเมตร กว้าง 14 เซนติเมตร สูง 20 เซนติเมตร มีน้ำอยู่ในถังสูง 10 เซนติเมตร เอาท่อเหล็กทรงกระบอกตันรัศมี 7 เซนติเมตร วางตั้งลงไปในถัง อยากทราบว่า ระดับน้ำในถังเพิ่มขึ้นอีกเท่าใด

วิธีทำ



สมมติ เมื่อวางท่อนเหล็กลงไประดับน้ำสูงขึ้นเป็น x เซนติเมตร

ปริมาตรน้ำในถัง = $31 \times 14 \times 10 = 4,340$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

ปริมาตรน้ำในถังรวมกับปริมาตรเหล็กส่วนที่จม = $31 \times 14 \times x = 434x$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรท่อนเหล็กส่วนที่จม} &= \frac{22}{7} \times 7^2 \times x \\ &= 154x \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad 4,340 + 154x = 434x$$

$$280x = 4,340$$

$$x = \frac{4,340}{280} = 15 \frac{1}{2} \text{ เซนติเมตร}$$

$$\text{แสดงว่า ระดับน้ำในถังเพิ่มขึ้นอีก} = 15 \frac{1}{2} - 10 \text{ เซนติเมตร}$$

ตอบ

$$= 5 \frac{1}{2} \text{ เซนติเมตร}$$



จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

- หีบใบหนึ่งทำด้วยไม้หนาครึ่งนิ้ว เมื่อปิดฝาวัดภายนอกได้ความยาว 18 นิ้ว กว้าง 15 นิ้ว สูง 10 นิ้ว จงหาปริมาตรของเนื้อไม้
 - 513 ลูกบาศก์นิ้ว
 - 535 ลูกบาศก์นิ้ว
 - 558 ลูกบาศก์นิ้ว
 - 585 ลูกบาศก์นิ้ว
- ห้องเรียนห้องหนึ่งยาว 32 ฟุต กว้าง 18 ฟุต สูง 10.5 ฟุต ถ้านักเรียนคนหนึ่งต้องใช้พื้นที่ห้อง 8 ตารางฟุต ห้องเรียนห้องนี้จุนักเรียนกี่คน และนักเรียนคนหนึ่งกินที่ว่างกี่ลูกบาศก์ฟุต
 - 64 คน 84 ลูกบาศก์ฟุต
 - 72 คน 84 ลูกบาศก์ฟุต
 - 64 คน 72 ลูกบาศก์ฟุต
 - 72 คน 72 ลูกบาศก์ฟุต
- ปริซึมมีฐานรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า มีด้านยาวด้านละ 14 เซนติเมตร ปริซึมสูง 36 เซนติเมตร จงหาปริมาตรของปริซึม
 - 3,040.25 ลูกบาศก์เซนติเมตร
 - 3,055.25 ลูกบาศก์เซนติเมตร
 - 3,155.35 ลูกบาศก์เซนติเมตร
 - 3,157.23 ลูกบาศก์เซนติเมตร
- ปริซึมมีหน้าตัดเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ด้านประกอบมุมฉากยาว 15 และ 8 เซนติเมตร ถ้าปริซึมสูง 12 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ผิว
 - 480 ตารางเซนติเมตร
 - 540 ตารางเซนติเมตร
 - 560 ตารางเซนติเมตร
 - 600 ตารางเซนติเมตร
- คุน้ำตอนบนกว้าง 3 หลา ตอนล่างกว้าง 2 หลา ลึก 3.2 ฟุต ยาว 20 ฟุต พอน้ำลดปรากฏว่าน้ำแห้งไป 210 ลูกบาศก์ฟุต และเหลือส่วนกว้างของผิวน้ำ $7\frac{1}{2}$ ฟุต น้ำลดลงประมาณกี่ฟุต
 - 1.15 ฟุต
 - 1.27 ฟุต
 - 1.32 ฟุต
 - 1.48 ฟุต
- พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่ 1,764 ตารางนิ้วถ้าพีระมิดมีปริมาตร 11,760 ลูกบาศก์นิ้ว จงหาพื้นที่ผิวเอียงของพีระมิด
 - 1,624 ลูกบาศก์นิ้ว
 - 2,436 ลูกบาศก์นิ้ว
 - 2,45 ลูกบาศก์นิ้ว
 - 4,872 ลูกบาศก์นิ้ว

7. พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีด้านยาวด้านละ 10 นิ้ว สันยาว 18 นิ้ว จงหาปริมาตร
1. 545.83 ลูกบาศก์นิ้ว
 2. 545.84 ลูกบาศก์นิ้ว
 3. 551.76 ลูกบาศก์นิ้ว
 4. 551.77 ลูกบาศก์นิ้ว
8. ทรงกระบอกมีรัศมีฐานยาว 5 เซนติเมตร และมีพื้นที่ผิวด้านข้าง 440 ตารางเซนติเมตร ทรงกระบอกมีปริมาตรเท่าใด
1. 840 ลูกบาศก์เซนติเมตร
 2. 1,100 ลูกบาศก์เซนติเมตร
 3. 1,240 ลูกบาศก์เซนติเมตร
 4. 1,460 ลูกบาศก์เซนติเมตร
9. ทรงกระบอกอันหนึ่งมีรัศมีฐานและความสูงเท่ากัน ถ้าทรงกระบอกมีพื้นที่ผิวทั้งหมด 616 ตารางเซนติเมตร จงหารัศมีฐาน
1. 3.5 เซนติเมตร
 2. 7 เซนติเมตร
 3. 12.5 เซนติเมตร
 4. 14 เซนติเมตร
10. กรวยมีความสูง 16 นิ้ว และมีพื้นที่ฐานเป็นเศษสามส่วนห้าของพื้นที่ผิวด้านข้าง จงหาความยาวด้านเอียง
1. 12 นิ้ว
 2. 16 นิ้ว
 3. 20 นิ้ว
 4. 24 นิ้ว



1. ข้อ 3

วิธีทำ	ปริมาตรทั้งหีบ	$= 18 \times 15 \times 10$	ลูกบาศก์นิ้ว
		$= 2,700$	ลูกบาศก์นิ้ว
	ปริมาตรที่ว่างภายใน	$= 17 \times 14 \times 9$	ลูกบาศก์นิ้ว
		$= 2,142$	ลูกบาศก์นิ้ว
	ปริมาตรเนื้อไม้	$= 2,700 - 2,142$	ลูกบาศก์นิ้ว
		$= 558$	ลูกบาศก์นิ้ว

2. ข้อ 2

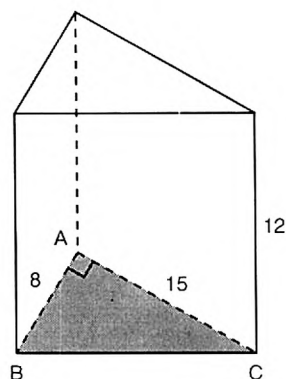
วิธีทำ	พื้นที่ห้องเรียน	$= 18 \times 32$	ตารางฟุต
		$= 576$	ตารางฟุต
	ห้องเรียนจนนักเรียนได้	$= \frac{576}{8} = 72$	คน
และ	นักเรียน 1 คนกินที่ว่าง	$= 8 \times 10.5$	ลูกบาศก์ฟุต
		$= 84$	ลูกบาศก์ฟุต

3. ข้อ 2

วิธีทำ	พื้นที่ฐาน	$= \frac{\sqrt{3}}{4} (14)^2 = 49\sqrt{3}$	ตารางเซนติเมตร
	ปริมาตรปริซึม	$= 49\sqrt{3} \times 36$	ลูกบาศก์เซนติเมตร
		$= 3,055.25$	ลูกบาศก์เซนติเมตร

4. ตอบข้อ 4

วิธีทำ



$$BC^2 = 8^2 + 15^2 = 289$$

$$BC = 17 \text{ เซนติเมตร}$$

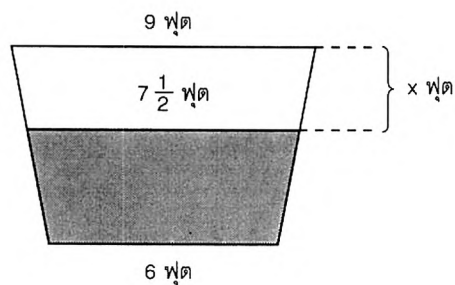
$$\text{พื้นที่ฐาน} = \frac{1}{2} \times 8 \times 15 = 60 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

$$\text{พื้นที่ผิวข้าง} = (8+15+17) \times 12 = 480 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พื้นที่ผิวทั้งหมด} &= 2 \times 60 + 480 \text{ ตารางเซนติเมตร} \\ &= 600 \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

5. ตอบข้อ 2

วิธีทำ



$$\text{สมมติให้น้ำลดลง} = x \text{ ฟุต}$$

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรน้ำที่แห้งไป} &= \frac{1}{2} \left(9 + 7\frac{1}{2} \right) \times 20 \text{ ลูกบาศก์ฟุต} \\ &= 165x \text{ ลูกบาศก์ฟุต} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad 165x = 210$$

$$x = 1.27 \text{ ฟุต}$$

แสดงว่า น้ำลดลงประมาณ 1.27 ฟุต