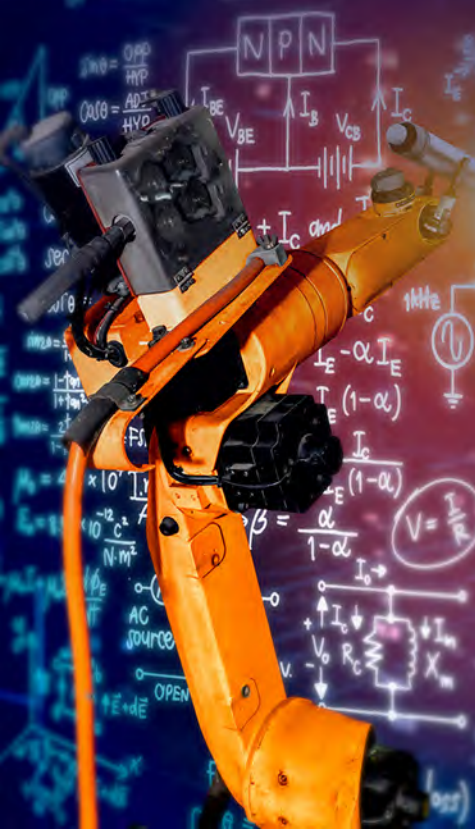
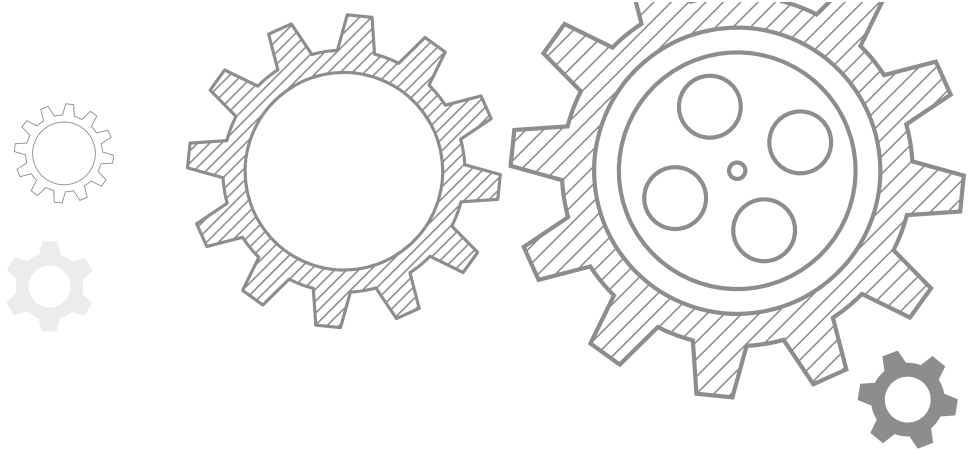


เตรียมสอบ คณิตศาสตร์ วิศวะ

ตัวอย่างข้อสอบ
และเฉลยวิธีทำโดยละเอียด





เตรียมสอบ
คณิตศาสตร์
วิศวะ





เตรียมสอบคณิตศาสตร์วิศวะ

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

978-616-596-454-8

ราคา 400 บาท

© สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ (ฉบับที่ 5) พ.ศ. 2565

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

พิชัย ตีลิ่ง.

เตรียมสอบคณิตศาสตร์วิศวะ. -- ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์, 2569.

358 หน้า.

1. คณิตศาสตร์ -- ข้อสอบและเฉลย. I. ชื่อเรื่อง.

510.76

ISBN 978-616-596-454-8

จัดจำหน่ายหนังสืออิเล็กทรอนิกส์ (e-book) โดย

บริษัท สกายบุ๊กส์ จำกัด

28, 30, 32 ซอยรังสิต-ปทุมธานี 16 ซอย 7

ต. ประชาธิปัตย์ อ. รัษฎา จ. ปทุมธานี 12130

โทรศัพท์ 0-2958-1125, 0-2958-1127

e-mail : sales@skybook.co.th, saleskybook@gmail.com

www.facebook.com/skybook.co.th

www.skybook.co.th



คำนำ

ปัจจุบันเป็นที่ทราบกันดีว่า อัตราการแข่งขันทางการศึกษานับวันจะยิ่งทวีสูงขึ้น ซึ่งไม่เฉพาะแต่นักเรียนในสายสามัญเท่านั้น นักศึกษาในกลุ่มอาชีวะ หรือที่เรียกกันติดปากว่า “เด็กช่าง” นั้นก็ไม่ยิ่งหย่อนไปกว่ากัน จุดมุ่งหมายคงไม่พ้นกับอาชีพวิศวกร ซึ่งก็แล้วแต่ว่าจะเป็นสาขาใด จนปัจจุบันมีค่านิยมที่จะต้องจบปริญญาตรีเป็นอย่างน้อย การสอบในระดับ ปวส. เพื่อศึกษาต่อในระดับปริญญาตรี มีเนื้อหาค่อนข้างหลากหลาย ตำราที่เขียนครอบคลุมในทุกหัวเรื่องหาได้ยากเต็มที ส่วนใหญ่จะต้องอาศัยการอ่านจากตำราหลาย ๆ เล่ม โดยหยิบบางตอนจากเล่มโน้นบ้างเล่มนี้บ้าง ซึ่งบางครั้งก็ไม่ตรงนักหรือไม่พบบางเรื่องบางหัวข้อเลยก็มี

ตำราเล่มนี้ได้รวบรวมเนื้อหาที่ต้องใช้ในการสอบเข้าเรียนต่อทั้งหมด โดยยึดจากแนวข้อสอบเก่าเป็นหลัก โดยพยายามรวบรวมเนื้อหาทั้งจากตำราไทยและเทศ เพื่อความสะดวกรวดเร็ว และลดความสับสนในการค้นคว้า ทั้งยังลดค่าใช้จ่ายในการซื้อตำราหลาย ๆ เล่ม เพื่อให้ได้เนื้อหาครอบคลุมครบถ้วน ซึ่งผู้เรียบเรียงได้ตัดทอนบางตอนที่เห็นว่าไม่จำเป็นนักออก เพื่อไม่ให้เป็นการตำราที่หนาเกินไป ซึ่งถ้านักศึกษามีความต้องการศึกษาในรายละเอียดปลีกย่อย ก็สามารถหาได้จากหนังสืออ้างอิง ดังแสดงไว้ในตอนท้ายของแต่ละบทและท้ายเล่ม

เนื้อหาในเล่ม บางบทบางตอนนักศึกษาอาจสามารถใช้ประกอบการเรียน ในระดับ ปวส. ในวิชาคณิตศาสตร์ที่กำลังศึกษา และยังสามารถใช้อ้างอิงหรือประกอบการเรียนในระดับปริญญาตรี ปี 1 ได้อีกในอนาคต หลังจาก que สอบเข้าเรียนได้แล้ว

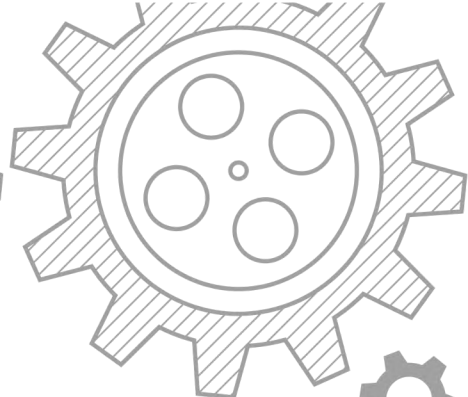
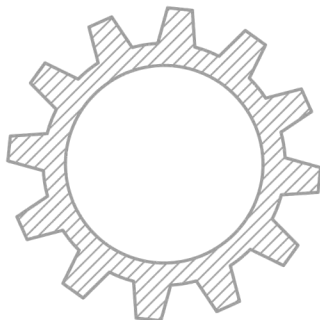
ในการจัดทำหนังสือเล่มนี้ ค่อนข้างยุ่งยากและพบอุปสรรคหลายประการ แต่ก็สามารถลุล่วงไปด้วยดี เพราะได้รับความอนุเคราะห์จากบุคคลหลายฝ่าย ซึ่งมีอาจนามากล่าวได้ทั้งหมดตรงนี้ และขอบคุณสำนักพิมพ์สกายบุ๊กส์ที่เรียบเรียงต้นฉบับขึ้น



สารบัญ

ตัวอย่างข้อสอบและเทคนิคการตัดตัวเลือก.....	7
บทที่ 1 เมตริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ และการแก้สมการเชิงเส้น	33
บทที่ 2 เวกเตอร์	60
บทที่ 3 จำนวนเชิงซ้อน	69
บทที่ 4 ระบบพิกัดเชิงขั้ว	75
บทที่ 5 ฟังก์ชันและความสัมพันธ์	81
บทที่ 6 เรขาคณิตวิเคราะห์ เส้นตรง ภาคตัดกรวย	86
บทที่ 7 ตรีโกณมิติ พีชคณิตฟังก์ชัน	108
บทที่ 8 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม	120
บทที่ 9 อนุกรมและลำดับ	131
บทที่ 10 ทฤษฎีความน่าจะเป็น.....	148
บทที่ 11 ทฤษฎีบททวินาม	156
บทที่ 12 ลิมิตและความต่อเนื่อง	159
บทที่ 13 อนุพันธ์และการประยุกต์	167
บทที่ 14 เทคนิคการอินทิเกรต	195
บทที่ 15 อนุพันธ์ย่อย	228

บทที่ 16	การอินทิเกรตฟังก์ชันหลายตัวแปร	233
บทที่ 17	ผลแปลงลาปลาซ	238
บทที่ 18	อนุกรมกำลัง	258
บทที่ 19	สมการเชิงอนุพันธ์	263
บทที่ 20	อนุกรมฟูรีเยร์	284
บทที่ 21	สรุปสูตรคณิตศาสตร์	294
บรรณานุกรม		351





ตัวอย่างข้อสอบ และเทคนิค การตัดตัวเลือก

1. กำหนดเลขเชิงซ้อน $Z = (1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} - i)(1 + i)$ จงหาค่าของ $|Z^{-1}|$

ก. $2\sqrt{2}$

ข. $4\sqrt{2}$

ค. $3\sqrt{2}$

ง. $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

จ. $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

วิธีทำตรง

$$\begin{aligned} Z &= (1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} - i)(1 + i) \\ &= [\sqrt{3} + 3i - i - \sqrt{3}i^2](1 + i) \\ &= [2\sqrt{3} + 2i](1 + i) \\ &= (2\sqrt{3} - 2) + (2\sqrt{3} + 2)i \end{aligned}$$

$\therefore$

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{(2\sqrt{3} - 2) + (2\sqrt{3} + 2)i}$$

$$Z^{-1} = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{16} \right) - \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{16} \right)i$$

$$\begin{aligned} |Z^{-1}| &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{16} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{16} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{8}}{16} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

วิธีลัด จากความรู้ว่า ถ้า $Z = Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \dots Z_n$

$$\text{แล้ว} \quad |Z| = |Z_1| \cdot |Z_2| \cdot |Z_3| \dots |Z_n|$$

$$\text{และ} \quad |Z^{-1}| = \frac{1}{|Z|}$$

$$\therefore \text{จากโจทย์} \quad Z = (1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} - i)(1 + i)$$

$$\begin{aligned} |Z| &= |1 + \sqrt{3}i| |\sqrt{3} - i| |1 + i| = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$|Z^{-1}| = \frac{1}{|Z|} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$\therefore$ คำตอบคือข้อ จ.

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 1

$$1.1 \quad Z = \frac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1+i)^2} \text{ มีค่าเท่าใด}$$

$$\text{ก. } \frac{-15}{2} + 5i$$

$$\text{ข. } \frac{15}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\text{ค. } \frac{15}{4} + \frac{5}{2}i$$

$$\text{ง. } \frac{-15}{4} - \frac{5}{4}i$$

เฉลย ข้อ ก.

$$1.2 \quad \frac{(3+2i)^2(1-3i)}{(3+i)^2(1+2i)} \text{ มีค่าเท่าใด}$$

$$\text{ก. } \frac{230+500i}{890}$$

$$\text{ข. } \frac{-230-890i}{500}$$

$$\text{ค. } \frac{890-230i}{550}$$

$$\text{ง. } \frac{550-890i}{230}$$

เฉลย ข้อ ข.

1.3 จงหา $|a + bi|$ มีค่าเท่าใด เมื่อ $(3 + 4i)(a + bi)(-12 - 5i) = 2 - 4i$ ค่าของ $|a + bi|$ มีค่าเท่าใด

ก. $\frac{2\sqrt{5}}{65}$

ข. $\frac{50}{13}$

ค. $\frac{4\sqrt{2}}{65}$

ง. $\frac{16}{65}$

เฉลย ข้อ ก.

2. กำหนดให้ $|u| = 3$, $|v| = 5$ และ $|u + v| = 4$ ฉะนั้น $|u - v|$ เท่ากับ

ก. $2\sqrt{13}$

ข. 22

ค. 12

ง. $2\sqrt{3}$

จ. $3\sqrt{4}$

วิธีทำตรง

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2u \cdot v$$

แทนค่า

$$16 = 9 + 25 + 2u \cdot v$$

$$\therefore 2u \cdot v = -18$$

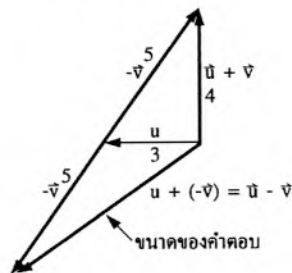
$$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2u \cdot v$$

แทนค่า

$$|u - v|^2 = 3^2 + 5^2 + 18 = 52$$

$$\therefore |u - v| = \sqrt{52}$$

วิธีลัด วาดรูปตามสเกลแล้ววัดค่า



ขั้นตอน

1. วาด Δ มุมฉาก 3-4-5 เสียก่อน

2. เขียนเวกเตอร์ทิศตรงข้ามกับด้านที่ยาว 5 มา 5 หน่วย (จะได้เป็นเวกเตอร์ $-v$)

3. วัดค่า $|u - v|$

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 2

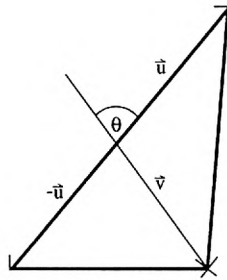
2.1 กำหนดให้ $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{34}$ และ $|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{13}$ จงหาขนาดของ $\vec{v}$ และมุม θ ระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง

- ก. $|\vec{u}| = 5$ $\theta = 60^\circ$ ข. $|\vec{u}| = 4$ $\theta = 45^\circ$
 ค. $|\vec{u}| = 3$ $\theta = 30^\circ$ ง. $|\vec{u}| = 4$ $\theta = 60^\circ$
 จ. $|\vec{u}| = 5$ $\theta = 90^\circ$

เฉลย ข้อ ง.

ขั้นตอน

1. วาดรูป $\vec{u}$ ขนาด 3 หน่วยและวาด $-\vec{u}$ ซึ่งจะมีขนาดเท่ากัน แต่ทิศตรงข้าม



2. ใช้วงเวียน (ควรนำเข้าห้องสอบด้วย) โดยให้ปลายลูกศรวกเตอร์ $\vec{u}$ เป็นจุดศูนย์กลาง วาดวงกลมรัศมี $\sqrt{34}$ และใช้วงเวียนวาดวงกลมโดยจุดศูนย์กลางอยู่ที่ปลายลูกศรวกเตอร์ $-\vec{u}$ รัศมี $\sqrt{13}$

3. จากจุดตัดของวงกลมลากไปยังจุดต่อระหว่าง $\vec{u}$ และ $-\vec{u}$ จะได้เป็นเวกเตอร์ $\vec{v}$ วัดขนาดและมุม ตอบคำถามโจทย์

3. ให้หาค่า $\int_{-5/2}^{5/2} \sqrt{25 - 4x^2} dx$

- ก. $\frac{25}{2} \pi$ ข. $\frac{15}{4} \pi$
 ค. $\frac{27}{4} \pi$ ง. $\frac{25}{4} \pi$
 จ. ไม่มีข้อถูก

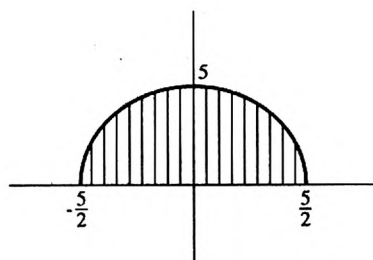
วิธีตรง ให้ $x = \frac{5}{2} \sin \theta \quad \therefore dx = \frac{5}{2} \cos \theta d\theta$

ช่วง $x = -\frac{5}{2} \quad \therefore \theta = -\frac{\pi}{2}$

ช่วง $x = \frac{5}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ว่า} \quad \int_{-5/2}^{5/2} \sqrt{25 - 4x^2} dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{25 - 25 \sin^2 \theta} \cdot \frac{5}{2} \cos \theta d\theta \\
 &= 25 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{25}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\
 &= \frac{25}{2} \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{25\pi}{4}
 \end{aligned}$$

วิธีลัด ดูกราฟ $y = \sqrt{25 - 4x^2} \quad \therefore y^2 = 25 - 4x^2$
 $y^2 + (2x)^2 = 25$



$x = 0, y = 5$ (-5 ใช้ไม่ได้ $\therefore y = \sqrt{25 - 4x^2} \quad \therefore y > 0$ เสมอ)

$y = 0, x = \frac{5}{2}$ หรือ $-\frac{5}{2}$ ซึ่งจะได้รูปครึ่งวงรี

$\int y dx = A \quad \therefore$ หาพื้นที่วงรี ก็สามารถตอบคำถามโจทย์ได้

พ.ท.วงรี $= \pi ab$

a : ความยาวครึ่งแกนเอก

b : ความยาวครึ่งแกนโท

$$\text{พ.ท.วงรี} = \pi (5) \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{2} \pi$$

$$\text{จากรูปเป็นรูปครึ่งวงรี} \therefore \text{พ.ท.ครึ่งวงรี} = \frac{25\pi}{4}$$

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 3

1. จงหาค่า $\int_{-1}^1 \sqrt{4 - 4x^2} dx$

ก. $\frac{\pi}{4}$

ข. $\frac{\pi}{2}$

ค. π

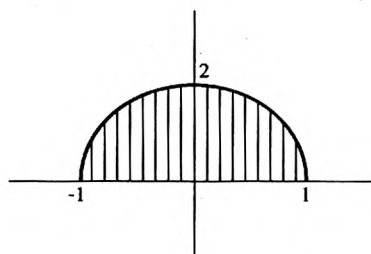
ง. 2π

จ. 4π

เฉลย

ข้อ ค.

แนะ เขียนแล้วจะได้รูปวงรี



$$\text{พ.ท.วงรี} = \pi ab$$

$$= \pi (2)(1) = 2\pi$$

$$\therefore \text{พ.ท. ครึ่งวงรี} = \pi$$

4. กำหนดค่า $y = \frac{9x^7}{x^2+1}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ก. $\frac{45x^8 + 63x^6}{x^4 + 2x^2 + 1}$

ข. $\frac{63x^6 + 2x}{x^2 + 1}$

$$\text{ค. } \frac{63x^6 - 18x^8}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{ง. } \frac{18x^8 - 63x^6}{x^2 + 1}$$

จ. ไม่มีข้อใดถูก

เฉลย

ข้อ ค.

$$\begin{aligned} \text{วิธีตรง} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{9x^7}{x^2 + 1} \right) = \frac{9(x^2 + 1)7x^6 - 9x^7(2x)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{63x^8 + 63x^6 - 18x^8}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{45x^8 + 63x^6}{x^4 + 2x^2 + 1} \end{aligned}$$

วิธีลัด เนื่องจากกำลังสูงสุดเศษ คือ พจน์ $9x^7$, กำลังสูงสุดของส่วนคือ x^2 , $\therefore$ กำลังสูงสุดพหุนามตรรกยะคือ $9x^5$

Differentiation ของ $9x^5$ ได้ $45x^4$ ดูกำลังสูงสุดของพหุนามตรรกยะของแต่ละตัวเลือก

$$\text{ก. } 45x^4$$

$$\text{ข. } 63x^4 \text{ (คิดโดย } \frac{63x^6}{x^2})$$

$$\text{ค. } 63x^2 \text{ (คิดโดย } \frac{63x^6}{(x^2)^2})$$

$$\text{ง. } 18x^6 \text{ (คิดโดย } \frac{18x^8}{x^2})$$

คำตอบที่ถูกต้อง คือ ข้อ ก.

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 4

$$4.1 \text{ จงหา } \frac{dy}{dx} \text{ เมื่อ } y = \frac{x^2 - 3}{x + 4}$$

$$\text{ก. } \frac{3x^2 + 8x + 1}{(x + 4)^2}$$

$$\text{ข. } \frac{8x^2 + 3x + 1}{(x + 4)^2}$$

$$\text{ค. } \frac{x^2 + 3x + 8}{(x + 4)^2}$$

$$\text{ง. } \frac{x^2 + 8x + 3}{(x + 4)^2}$$

$$\text{จ. } \frac{3x^2 + x + 8}{(x + 4)^2}$$

เฉลย

ง.

4.2 จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของ $\frac{x^5 - x + 2}{x^3 + 7}$

ก. $\frac{2x^7 + 35x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 7}{(x^3 + 7)^2}$

ข. $\frac{4x^7 + 2x^4 + 35x^3 + 7x^2 - 6}{(x^3 + 7)^2}$

ค. $\frac{6x^7 - 35x^4 + 7x^2 - 6x + 2}{(x^3 + 7)^2}$

ง. $\frac{8x^7 - 2x^4 + 6x^2 + 35x + 4}{(x^3 + 7)^2}$

จ. $\frac{10x^7 - 4x^4 - 35x^3 + 2x + 1}{(x^3 + 7)^2}$

เฉลย ข้อ ก.

5. $Z = e^{x/y} \sin\left(\frac{x}{y}\right) + e^{y/x} \cos(y/x)$ จงหาค่า $\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y}$

ก. $\frac{x}{y}$

ข. $-\frac{x}{y} \cos\left(\frac{x}{y}\right)$

ค. 0

ง. $\frac{x}{y} \sin\left(\frac{x}{y}\right)$

จ. 1

วิธีตรง

$$x \frac{\partial Z}{\partial x} = x \left[\frac{1}{y} \cdot e^{x/y} \left(\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \cos\left(\frac{x}{y}\right) \right) - \frac{y}{x^2} e^{y/x} \left(1 + \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \sin\left(\frac{y}{x}\right) \right) \right]$$

$$y \frac{\partial Z}{\partial y} = y \left[-\frac{x}{y^2} \left(e^{x/y} \sin\left(\frac{x}{y}\right) + e^{x/y} \cos\left(\frac{x}{y}\right) \right) + \frac{1}{x} e^{y/x} \left(1 + \cos\left(\frac{y}{x}\right) - e^{y/x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) \right) \right]$$

$$\therefore x \frac{\partial Z}{\partial x} + y \frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$

วิธีลัด มอง $Z = f\left(\frac{x}{y}\right)$ (เพราะสามารถจัดให้เข้ารูปได้)

$$\therefore x \frac{\partial Z}{\partial x} = x f'\left(\frac{x}{y}\right) \frac{1}{y} = \frac{x}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\text{และ} \quad y \frac{\partial z}{\partial y} = y f' \left(\frac{x}{y} \right) - \frac{1}{y^2} = -\frac{x}{y} f' \left(\frac{x}{y} \right)$$

$$\therefore \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 5

5.1 Z ในข้อใดที่ทำให้ $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

ก. $Z = \frac{y}{x+y}$

ข. $Z = xe^{x/y} + ye^{x/y}$

ค. $Z = \sin x \cos y$

ง. $Z = x^2 + y^2 + xy + 1$

จ. ไม่มีข้อใดถูก

เฉลย ข้อ ก.

แนว $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ จะสามารถจัดให้ $Z = f\left(\frac{x}{y}\right)$ ได้ในข้อ ก.

$$Z = \frac{y}{x+y} = \frac{y \left(\frac{1}{y} \right)}{(x+y) \left(\frac{1}{y} \right)} = \frac{1}{\frac{x}{y} + 1}$$

5.2 ถ้า $Z = xe^{y/x}$ จงหา $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$

ก. 0

ข. Z

ค. $e^{y/x}$

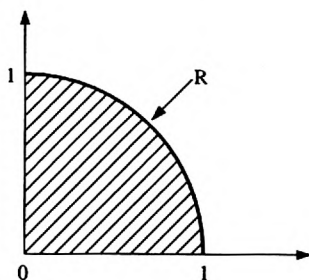
ง. x

จ. y

เฉลย ข้อ ข.

แนว พิจารณา $Z = x f\left(\frac{y}{x}\right)$

6. หาค่า $\iint y^2 dx dy$ เมื่อ R เป็นอาณาเขตเส้นประตามรูป



ก. $\frac{\pi}{8}$

ข. $\frac{\pi}{4}$

ค. $\frac{\pi}{16}$

ง. $\frac{\pi}{2}$

จ. $\frac{2\pi}{3}$

วิธีทำตรง

$$\iint y^2 dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \sin^2 \theta dr d\theta$$

(เปลี่ยนพิกัดคาร์ทีเซียนเป็นพิกัดเชิงขั้ว $x \Rightarrow r \cos \theta$, $y \Rightarrow r \sin \theta$, $dx dy \Rightarrow r dr d\theta$)

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \sin^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right] d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} d\theta - \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \theta \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{16} \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}$$

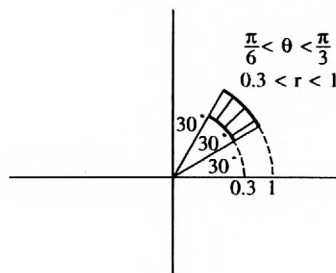
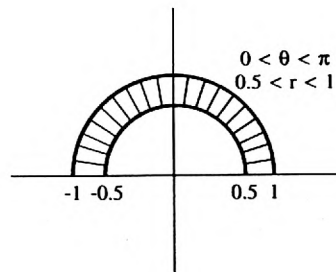
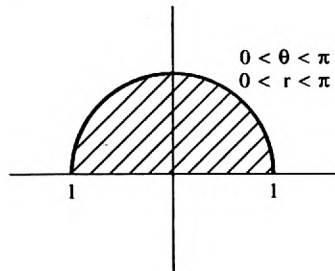
วิธีลัด

$$\iint y^2 dx dy = \frac{1}{2} \left[\iint y^2 dx dy + \iint x^2 dx dy \right]$$

เนื่องจาก x และ y สมมาตรกัน $= \frac{1}{2} \iint (y^2 + x^2) dx dy$

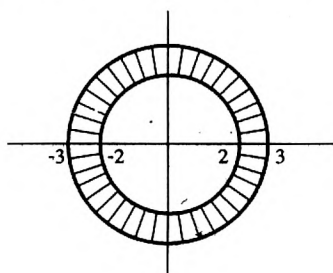
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \iint r^2 r \, dr \, d\theta \quad (\because x^2 + y^2 = r^2) \\
 \text{(กำหนดขอบเขตตามรูป)} \quad &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_{r=0}^1 \\
 &= \frac{\pi}{16}
 \end{aligned}$$

หมายเหตุ กรณีที่ขอบเขตเป็นอย่างอื่นให้สังเกตดังนี้



โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 6

6.1 จงหาค่า $\iint x^2 dx dy$ ในบริเวณ R ซึ่งกำหนดตามรูป

ก. $\frac{64\pi}{5}$

ข. $\frac{65\pi}{4}$

ค. $\frac{56\pi}{4}$

ง. $\frac{54\pi}{6}$

จ. $\frac{46\pi}{5}$

เฉลย ข้อ ข.

$$\text{แนว} \quad \iint x^2 dx dy = \frac{1}{2} x^2 y^2 dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \theta \left| \frac{\theta - \theta_2}{\theta - \theta_1} \frac{r^4}{4} \right|_{r=r_1}^{r=r_2}$$

แทนค่า

$$\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = 2\pi \text{ (รอบวงกลม)}$$

$$r_1 = 2 \quad r_2 = 3 \text{ (รัศมีภายในและรัศมีภายนอก)}$$

$$= \frac{1}{2} (2\pi - 0) \left(\frac{81 - 16}{4} \right)$$

$$= \frac{65\pi}{4}$$

7. ผลรวมของอนุกรมอนันต์ $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots$

ก. 1

ข. $\frac{1}{4}$

ค. $\frac{1}{2}$

ง. $\frac{3}{4}$

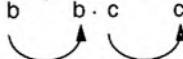
จ. $\frac{2}{3}$

วิธีตรง

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 \cdot 5} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} \right) \\ \frac{1}{5 \cdot 9} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) \\ \frac{1}{9 \cdot 13} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{9}} + \cancel{\frac{1}{9}} - \cancel{\frac{1}{13}} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} \right) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

วิธีลัด กรณี $\frac{1}{a \cdot b} + \frac{1}{b \cdot c} + \frac{1}{c \cdot d} + \dots$



- ข้อสังเกต
1. ตัวท้ายของพจน์หน้าต้องเท่ากับตัวหน้าของพจน์ถัดไป
 2. ผลต่าง $b - a, c - b, d - c, \dots$ คงที่

สูตร ผลรวมอนันต์พจน์ $S_{\infty} = \left| \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(b-a)} \right|$

แทนค่า จะได้ $\frac{1}{4}$ ($a = 1, b = 5$)

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 7

7.1 ลำดับกระบัง' 37 ผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{119 \cdot 120}$

มีค่าเท่ากับ

ก. $\frac{7}{60}$

ข. $\frac{7}{120}$

ค. $\frac{9}{60}$

ง. $\frac{9}{120}$

จ. $\frac{6}{70}$

เฉลย ข้อ ก.

แนะ แบ่งเป็น 2 อนุกรม คือ

$$A = \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \dots$$

และ $B = \frac{1}{121 \cdot 122} + \frac{1}{122 \cdot 123} + \frac{1}{123 \cdot 124} + \dots$

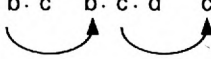
แล้วหาค่า $A - B$ จะได้ตามโจทย์

7.2 ลำดับกระบัง' 36 ผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$ มีค่าเท่ากับ

ก. $\frac{1}{2}$ ข. 1 ค. 2 ง. 3 จ. $3\frac{1}{2}$

เฉลย ข้อ ก.

หมายเหตุ กรณี $\frac{1}{a \cdot b \cdot c} + \frac{1}{b \cdot c \cdot d} + \frac{1}{c \cdot d \cdot e} + \dots$



ข้อสังเกต เลขตัวกลางของพจน์หน้า ต้องเท่ากับเลขตัวหน้าของพจน์ถัดไป

สูตร ผลบวกอนันต์พจน์ $S_{\infty} = \frac{1}{a \cdot b} \left(\frac{1}{c-a} \right)$

8. จงหาค่า $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx$ (ไม่มีตัวเลือก เป็นแบบเติมคำ)

วิธีตรง

$$\sin^6 x = (\sin^2 x)^3 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^3$$

$$= \frac{1}{8} (1 - 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x - \cos^3 2x)$$

$$\therefore \int \sin^6 x \, dx = \int \left[\frac{1}{8} (1 - 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x - \cos^3 2x) \right] dx$$

$$= \frac{1}{8} \int dx - \frac{3}{8} \int \cos 2x \, dx + \frac{3}{8} \int \cos^2 2x \, dx$$

$$- \frac{1}{16} \int \cos^2 2x \, d \sin 2x$$

$$= \frac{1}{8} \int dx - \frac{3}{16} \int d \sin 2x + \frac{3}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx$$

$$- \frac{1}{16} \int \cos^2 2x \, d \sin 2x$$

$$= \frac{1}{8} \int dx - \frac{3}{16} \int dx - \frac{3}{16} \int d \sin(2x) + \frac{3}{64} \int dx$$

$$+ \frac{1}{16} \int d \sin 4x - \frac{1}{16} \int d \sin 2x + \frac{1}{16} \int \sin^2$$

$$2x \, d \sin 2x$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx = \frac{5}{16} \int_0^{\pi/2} dx - \frac{4}{16} \int_0^{\pi/2} d \sin 2x + \frac{3}{64} \int_0^{\pi/2} dx$$

$$+ \frac{1}{16} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2x \, d \sin 2x$$

$$= \frac{5}{16} \left[x \right]_0^{\pi/2} - \frac{4}{16} \left[\sin 2x \right]_0^{\pi/2}$$

$$+ \frac{3}{64} \left[\sin 4x \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{48} \left[\sin^3 2x \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{5}{16} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} (\sin \pi - \sin 0) + \frac{3}{4} (\sin 2\pi$$

$$- \sin 0) + \frac{1}{48} (\sin^3 \pi - \sin^3 0)$$

$$= \frac{5\pi}{32}$$

วิธีลัด สูตรคือ

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n)} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นเลขคู่} \\ &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n)} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นเลขคี่}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ (เพราะเป็นเลขคู่)} \\ &= \frac{5}{32} \pi\end{aligned}$$

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 8

8.1 จงหาค่า $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx$, $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x \, dx$

เฉลย

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{16} \pi$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^8 x \, dy = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35}{256} \pi$$

8.2 จงหาค่า $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \, dx$, $\int_0^{\pi/2} \cos^9 x \, dx$

เฉลย

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \, dx = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^9 x \, dy = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{384}{945}$$

9. จงหาค่า $\int \frac{1}{1 + \sin x} \, dx$

วิธีตรง ให้

$$Z = \tan \frac{x}{2} \therefore \sin x = \frac{2Z}{1+Z^2}; \, dx = \frac{2}{1+Z^2} = dZ$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int \frac{1}{1+\sin x} dx &= \int 1 + \frac{2Z}{1+Z^2} \cdot \frac{2}{1+Z^2} dZ \\
 &= \int \frac{1}{Z^2+2Z+1} dZ \\
 &= \int \frac{2}{(Z+1)^2} dZ \\
 &= \int \frac{2}{(Z+1)^2} d(Z+1) \\
 &= -2 (Z+1)^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\text{แทนค่ากลับจะได้} = \frac{-2}{\tan \frac{x}{2} + 1} + c$$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีลัด} \quad \int \frac{1}{1+\sin x} dx &= \int \frac{1}{1+\sin x} \cdot \frac{1-\sin x}{1-\sin x} dx = \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} dx \\
 &= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x - \tan x \sec x dx \\
 &= \tan x - \sec x + c
 \end{aligned}$$

(แม้ว่ารูปคำตอบจะไม่เหมือนกันแต่เป็นคำตอบเดียวกัน)

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 9

$$9.1 \text{ จงหา } \int \frac{1}{1+\cos x} dx$$

เฉลย $-\cot x + \operatorname{cosec} x + c$

หมายเหตุ การคูณทั้งเศษและส่วนของค่าบางค่าเพื่อให้สะดวกแก่การอินทิเกรตมีอยู่บ่อย ๆ เช่น

$$\int \frac{dx}{e^x+1} \text{ คูณทั้งเศษและส่วนด้วย } e^{-x}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = -\int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = -\ln(1+e^{-x}) + c$$

$$\int \frac{dx}{x+x^{1/3}} \text{ คูณทั้งเศษและส่วนด้วย } x^{-1/3}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int \frac{dx}{x+x^{1/3}} &= \int \frac{x^{-1/3}}{x^{2/3}+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^{2/3}+1)}{x^{2/3}+1} \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^{2/3}+1) + c\end{aligned}$$

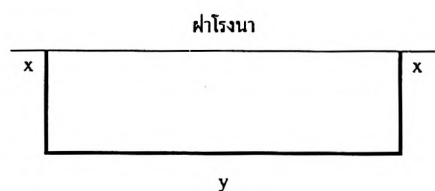
9.2 จงหาค่า $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+3} dx$

เฉลย $\ln(e^{2x}+3)^{2/3} - \frac{1}{3}x + c$

10. ชาวนาต้องการกั้นคอกเลี้ยงสัตว์เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยด้านหนึ่งติดกับโรงนา ถ้าเขามีลวดตาข่ายยาว 60 ฟุต คอกเลี้ยงสัตว์ที่ชาวนาจะกั้นจะมีพื้นที่มากที่สุดเท่ากับ

- ก. 450 ตารางฟุต ข. 400 ตารางฟุต
ค. 350 ตารางฟุต ง. 300 ตารางฟุต
จ. 250 ตารางฟุต

วิธีทำตรง



$$\begin{aligned}\text{พื้นที่} \quad A &= xy \\ \text{และ} \quad 2x + y &= 60 \text{ (ตามโจทย์)} \\ y &= 60 - 2x \\ \therefore A &= x(60 - 2x) \\ \frac{dA}{dx} &= 60 - 4x \\ \text{ให้} \quad \frac{dA}{dx} &= 0 \\ \text{หาค่าสูงสุด} \therefore 60 - 4x &= 0\end{aligned}$$

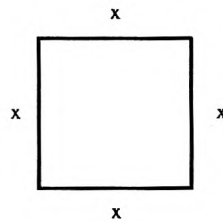
$$x = 15$$

แทนค่า

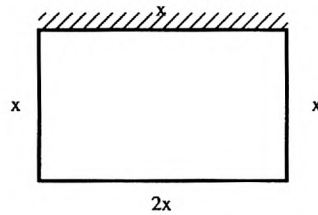
$$x = 15, A = 450 \text{ ตารางฟุต}$$

วิธีลัด เมื่อต้องการกันออก ให้ได้พื้นที่มากที่สุด

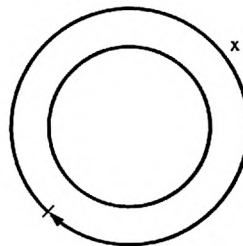
- กรณีที่ไม่มีฝาโรงนา จะเป็นรูป □ จัตุรัส



- กรณีที่มีฝาโรงนา จะเป็นรูป □ ผืนผ้า $x, 2x$



- กรณีไร้ระบุงรูปทรง ต้องเป็นรูปวงกลม เส้นรอบวงเท่ากับ x



ในโจทย์ข้อนี้ เข้ากรณีที่ 2

$$\therefore x + 2x + x = 60$$

$$4x = 60$$

$$x = 15$$

เกิด □ ผืนผ้าขนาด $15 \times 30 = 450$ ตารางฟุต

11. รากสมการ $Z^2 - (j + 2)Z + (3 + j) = 0$ มีค่า

- ก. $2 - 3j, 2 + 3j$ ข. $1 + 2j, 1 - j$
 ค. $1 - 2j, 1 + j$ ง. $1 - j, 1 + 2j$
 จ. $2 + j, 2 - j$

วิธีตรง เนื่องจากเป็นสมการควอดราติก

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

โดย $a = 1, b = -(j + 2), c = 3 + j$

$$Z = \frac{(2 + j) \pm \sqrt{(-(2 + j))^2 - 4(1)(3 + j)}}{2(1)}$$

$$= \frac{2 + j \pm \sqrt{4 + 4j + j^2 - 12 - 4j}}{2}$$

$$= \frac{(2 + j) \pm \sqrt{-9}}{2}$$

$$= \frac{2 + j \pm 3j}{2}$$

$$Z = 1 + 2j, 1 - j$$

วิธีลัด เนื่องจากรากคำตอบเป็น $Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

และ $Z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\therefore Z_1 + Z_2 = \frac{-b}{a}$$

ซึ่ง $b = -(j + 2), a = 1$

$$\therefore \frac{-b}{a} = j + 2$$

จากตัวเลือกผลบวกคำตอบเท่ากับ $j + 2$ มีเฉพาะข้อ ง. เท่านั้น

12. กำหนดให้ $y^2 + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x^2} - 3 = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีตรง ใช้การหาอนุพันธ์แบบ Implicit

$$\frac{d}{dx} \left(y^2 + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x^2} - 3 \right) = \frac{d}{dx} (0)$$

$$2y \frac{dy}{dx} + (-1)(x+y)^{-2} \left(1 + \frac{dy}{dx} \right) - (-2)(x)^{-3} = 0$$

$$2y y' + -(x+y)^{-2} + -(x+y)^{-2} y' + 2x^{-3} = 0$$

$$2y y' - (x+y)^{-2} y' = (x+y)^{-2} - 2x^{-3}$$

$$[2y - (x+y)^{-2}] y' = (x+y)^{-2} - 2x^{-3}$$

$$y' = \frac{(x+y)^{-2} - 2x^{-3}}{2y - (x+y)^{-2}}$$

วิธีลัด ใช้การหาอนุพันธ์แบบ Partial derivative

ให้ $Z = y^2 + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x^2} + 3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = - \frac{\partial Z / \partial x}{\partial Z / \partial y}$$

$$= \frac{[-(x+y)^{-2} + 2x^{-3}]}{2y - (x+y)^{-2}}$$

โจทย์ทบทวน

เทคนิคที่ 12

จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ

1. $y^3 + 2xy - 12 = 0$

2. $e^x \sin y + e^y \sin x = 1$

3. $x^3 - x^2 y + xy^2 - y^3 = 1$

4. $xy - e^x \sin y = 0$

5. $\tan(x^2 + y^2) - \arctan y/x = 0$

เฉลย

$$1. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{3y^2 + x}$$

$$2. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-e^x \sin y + e^y \cos x}{e^x \cos y + e^y \sin x}$$

$$3. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - 2xy + 3y^2}$$

$$4. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x \sin y - y}{x - e^x \cos y}$$

$$5. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{x - 2y}$$

13. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}$

วิธีตรง ใช้ L' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

ใช้สูตร $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่ออยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

วิธีลัด พิจารณา x^3 เป็น polinomial e^x เป็น exponential เพิ่ม

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$$

ข้อควรจำ เมื่อ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{ฟังก์ชัน polinomial}}{\text{ฟังก์ชัน polinomial}}$

$$\text{กรณี 1 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots}$$

$\frac{a_n}{b_n}$ (กำลังของเศษและส่วนเท่ากับผลเฉลยเท่ากับผลหารสัมประสิทธิ์)

$$\text{กรณี 2 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots}$$

$$= \infty \text{ เมื่อ } n > m$$

$$= 0 \text{ เมื่อ } n < m$$

$$\text{เมื่อ } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{เอกซ์โพเนนเชียล}}{\text{โพลิโนเมียล (หรือลอการิทึม)}}$$

กรณี 1 เอกซ์โพเนนเชียล เพิ่ม (a^x ; $a > 1$)
ได้ผลเฉลยเป็น ∞

กรณี 2 เอกซ์โพเนนเชียล ลด (a^x ; $0 < a < 1$)
ได้ผลเฉลยเป็น 0

$$\text{เช่น } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^{10}} = \infty \text{ และ } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(0.8)^x}{x^{15}} = 0$$

$$\text{เมื่อ } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{โพลิโนเมียล (หรือลอการิทึม)}}{\text{เอกซ์โพเนนเชียล}}$$

กรณี 1 เอกซ์โพเนนเชียลเพิ่ม (a^x ; $a > 1$)
ได้ผลเฉลยเป็น 0

กรณี 2 เอกซ์โพเนนเชียลลด (a^x ; $0 < a < 1$)
ได้ผลเฉลยเป็น ∞

$$\text{เมื่อ } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{โพลิโนเมียล}}{\text{ลอการิทึม}}$$

กรณี 1 ลอการิทึมเพิ่ม ($\log_a x^n$; $a > 1$)
ได้ผลเฉลยเป็น ∞

กรณี 2 ลอการิทึมลด ($\log_a x^n$; $0 < a < 1$)

ได้ผลเฉลยเป็น $-\infty$

$$\text{เช่น } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\ln x} = \alpha; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\log_{0.1} x} = -\infty$$

เมื่อ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{ลอการิทึม}}{\text{พหุนาม}}$

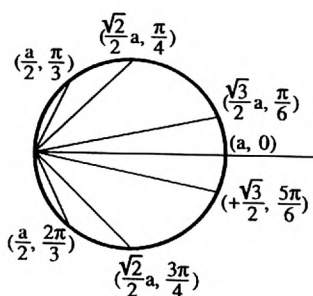
ได้ผลเฉลยเป็น 0

(ทุกข้อพหุนามกำหนดโดย $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$; $n > 1$)

14. จงเขียนกราฟ $r = a \cos \theta$ และ $r = a(1 + \cos \theta)$ พอยสังเขป

วิธีตรง ทาค่า r ที่ θ ต่าง ๆ

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	a	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	0	$-\frac{1}{2}a$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$-a$



วิธีลัด จาก

$$r = a \cos \theta$$

$$r^2 = ar \cos \theta \quad (\text{คูณ } r \text{ ตลอดสมการ})$$

ใช้ความสัมพันธ์

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

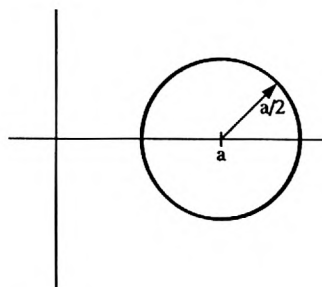
$$\therefore r^2 = ar \cos \theta$$

$$x^2 + y^2 = ax$$

$$(x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2) + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

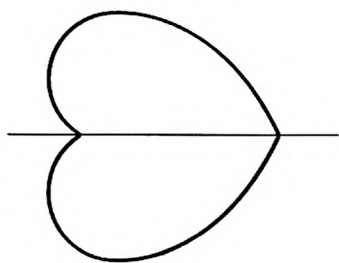
$$(x - a)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

เป็นวงกลมศูนย์กลางที่ $(a, 0)$ รัศมี $\frac{a}{2}$ หน่วย



θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$
r	2a	1.86 a	1.7 a	1.5 a	a	0.5 a	0.28 a	0.13 a

π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
0	-0.13 a	-0.28 a	-0.5 a	-a	-1.5 a	-1.7 a	-1.8 a	-2 a



วิธีลัด ดูรูปแบบกราฟด้านหลังเล่มในหัวข้อสรุปสูตร เนื่องจากโจทย์ให้วาดโดยสังเขป คือ ต้องการดูลักษณะกราฟมีไซสเกล

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{4x}$$

วิธีตรง

$$y = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{4x}$$

$$\ln y = 4x \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

$$\ln y = \frac{4 \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{4 \frac{d}{dx} \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{d}{dx} \frac{1}{x}}$$

$$= 4 \left[\frac{-2}{x^2} \right] [-x^2]$$

$$\ln y = 8$$

$$y = e^8$$

วิธีลัด สูตร $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$

แทนค่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{4x} = e^{2 \cdot 4} = e^8$





เมตริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์และการ แก้สมการเชิงเส้น

1. เมตริกซ์

เป็นเรื่องที่ข้อสอบออกไม่ยากนัก โดยจุดประสงค์ของผู้ออกสอบต้องการวัดความรู้ในเรื่องเหล่านี้

1. ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์จัตุรัสขนาดต่างๆ ($n \times n$)
2. กฎของดีเทอร์มิแนนต์
3. อินเวอร์สเมตริกซ์ (มักออกไม่เกินขนาด 3×3)
4. โคแฟกเตอร์, แอดจอยท์ (ออกไม่มากนัก)
5. แรงค์ของเมตริกซ์
6. ค่าไอเกนแวลู และไอเกนเวกเตอร์ของเมตริกซ์
7. การใช้เมตริกซ์แก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้น

2. ดีเทอร์มิแนนต์

กรณีเมตริกซ์ขนาด 2×2 ในเบื้องต้นขอแนะนำวิธีคูณทแยง โดย

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

เรียกวิธีการนี้ว่า (Sarrus' rule)

ตัวอย่าง

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \therefore |A_1| = (4)(5) - (3)(1) = 17$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \therefore |A_2| = (-1)(3) - (4)(2) = -9$$

กรณีเมทริกซ์ขนาด 3×3 การคูณทแยงยังคงใช้ได้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \therefore |A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

ตัวอย่าง

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \therefore |A_1| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = (1)(1)(-1) + (2)(1)(-1) + (0)(0)(0) - (-1)(1)(0) - (0)(1)(1) - (-1)(0)(2)$$

$$|A_1| = -3$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \therefore |A_2| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$