

# ตะลุยโจทย์ คณิต

ม.3 เข้า ม.4

(พร้อมลุยทุกสนามสอบ)

เนื้อหาละเอียด  
ครบถ้วน  
ครอบคลุมทุก  
สนามสอบ

- โรงเรียนเครือข่าย
- โรงเรียนดังประจำจังหวัด
- สอบโอลิมปิกวิชาการ
- สอบ ASMO
- สอบแข่งขันวัดทักษะ  
วิชาคณิตศาสตร์

แนวข้อสอบหลากหลาย  
พร้อมเฉลยละเอียดทุกข้อ

# คำนำ

นักเรียนหลายๆ คนที่ไม่ชอบวิชาคณิตศาสตร์ เพราะเป็นวิชาที่ค่อนข้างเข้าใจยาก จนทำให้บ่อยครั้งที่นักเรียนอาจจะไม่อยากเข้าห้องเรียนเลยทีเดียว ถ้ามีโอกาสก็เลือกที่จะไม่เรียน แต่คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่สำคัญและจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับเป็นพื้นฐานการคำนวณในทุกๆ วิชา

ดังนั้นทางเลือกในการแก้ปัญหานี้คือ นักเรียนต้องขยัน หมั่นทำโจทย์ปัญหา เพื่อเพิ่มทักษะให้ตัวเอง เมื่อเข้าใจ ทำได้ จะทำให้สนใจในวิชาคณิตศาสตร์ และมีความสุขในการเรียน

สำหรับหนังสือ “ตะลุยโจทย์ คณิต ม.3 เข้า ม.4” เล่มนี้ ได้เรียบเรียงขึ้น เพื่อเป็นแนวทางช่วยให้นักเรียนเกิดความมั่นใจ ความพร้อมในการเรียนและการสอบมากยิ่งขึ้น ผู้เขียนได้ใช้ประสบการณ์จากการสอนทั่วประเทศ รวบรวมโจทย์แข่งขันในสนามต่างๆ ตั้งแต่โจทย์ขั้นพื้นฐานไปจนถึงโจทย์ประยุกต์ และทำเฉลยอย่างละเอียดเพื่อให้นักเรียนได้ฝึกฝนได้ด้วยตนเอง

ผู้เขียนขอให้นักเรียนที่มีความขยันและตั้งใจ ได้สำเร็จสมดังที่ฝันไว้ ขอให้ นักเรียนโชคดีในทุกสนามสอบ

*สอบได้ สอบติด และพัฒนาตัวเองให้ดีขึ้นตลอดไป*



เพ็ญพร ตันประสาธ

# ประวัตินักเขียน

## อาจารย์เพ็ญพร ตันประสาธ (ครูแมว)

### การศึกษา

ปริญญาโท (MBA) คณะบริหารธุรกิจ สาขาการตลาด

มหาวิทยาลัยรามคำแหง

ปริญญาตรี (วท.บ.) คณะวิทยาศาสตร์ สาขาสถิติศาสตร์

มหาวิทยาลัยรามคำแหง



### ประสบการณ์ทางวิชาการและการสอน

- ๑ อาจารย์สอน คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ สถาบันในเครือตั้งตรงจิตร กรุงเทพฯ
- ๑ อาจารย์ใหญ่ สถาบันกวดวิชา Gifted Math
- ๑ ผู้ช่วยอาจารย์ใหญ่ สถาบันกวดวิชาแม็ทซ์เฮ้าส์ (Math House)
- ๑ ตัวคณิตศาสตร์ โครงการเพิ่มผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ภาปร. ราชวิทยาลัย นครปฐม
- ๑ ตัว O-NET โลก ดาราศาสตร์ และอวกาศ โรงเรียนอ้อมน้อยโสภณชนูปถัมภ์ สมุทรสาคร
- ๑ ตัว O-NET คณิตศาสตร์ โรงเรียนลาดปลาเค้าพิทยาคม กรุงเทพฯ
- ๑ ตัว O-NET คณิตศาสตร์ โรงเรียนปากเกร็ด นนทบุรี
- ๑ ตัว O-NET คณิตศาสตร์ โรงเรียนเทศบาลท่าโขลง 1 ปทุมธานี

### ผลงานที่ผ่านมา

- ๑ การวิจัยเกี่ยวกับการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการศึกษาในรูปแบบโครงการ  
กระทรวงศึกษาธิการ
- ๑ จัดทำหนังสือสรุปสูตรคณิตศาสตร์ ม.ปลาย
- ๑ เจ้าของเพจ Facebook “Krujaidee”
- ๑ เจ้าของเพจ Facebook “Msci Learning Center”

# สารบัญ

|            |                      |    |
|------------|----------------------|----|
| ● บทที่ 1  | จำนวนและตัวเลข       | 1  |
| ● บทที่ 2  | ระบบจำนวน            | 5  |
| ● บทที่ 3  | เศษส่วนและทศนิยม     | 16 |
| ● บทที่ 4  | อัตราส่วนและร้อยละ   | 22 |
| ● บทที่ 5  | พหุนาม               | 27 |
| ● บทที่ 6  | สมการและอสมการ       | 32 |
| ● บทที่ 7  | คู่อันดับและกราฟ     | 41 |
| ● บทที่ 8  | พาราโบลา             | 43 |
| ● บทที่ 9  | ความคล้าย            | 48 |
| ● บทที่ 10 | พีทาโกรัส            | 49 |
| ● บทที่ 11 | พื้นที่ผิวและปริมาตร | 53 |
| ● บทที่ 12 | วงกลม                | 60 |
| ● บทที่ 13 | อัตราส่วนตรีโกณมิติ  | 65 |
| ● บทที่ 14 | สถิติ                | 68 |
| ● บทที่ 15 | ความน่าจะเป็น        | 72 |

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| แนวข้อสอบชุดที่ 1     | 75  |
| แนวข้อสอบชุดที่ 2     | 82  |
| แนวข้อสอบชุดที่ 3     | 88  |
| แนวข้อสอบชุดที่ 4     | 94  |
| แนวข้อสอบชุดที่ 5     | 100 |
| แนวข้อสอบชุดที่ 6     | 108 |
| แนวข้อสอบชุดที่ 7     | 115 |
| เฉลยแนวข้อสอบชุดที่ 1 | 121 |
| เฉลยแนวข้อสอบชุดที่ 2 | 134 |
| เฉลยแนวข้อสอบชุดที่ 3 | 148 |
| เฉลยแนวข้อสอบชุดที่ 4 | 166 |
| เฉลยแนวข้อสอบชุดที่ 5 | 182 |
| เฉลยแนวข้อสอบชุดที่ 6 | 201 |
| เฉลยแนวข้อสอบชุดที่ 7 | 216 |

# บทที่ 1

## จำนวนและตัวเลข

### 1 จำนวน (Number)

เป็นปริมาณทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบค่าว่า มากกว่า น้อยกว่า หรือเท่ากัน

### 2 ตัวเลข (Numeral)

เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนจำนวนที่มนุษย์คิดค้นขึ้นมา มีความแตกต่างในแต่ละชาติ แต่ละภาษาต่างก็คิดขึ้นมาใช้ เช่น ในประเทศไทยจะมีตัวเลขไทยเป็นของตนเอง

#### 2.1 ตัวเลขฮินดูอารบิก

ระบบฮินดูอารบิก เป็นระบบที่ใช้ฐาน 10 มีเลขโดดที่ใช้ด้วยกันจำนวน 10 ตัว คือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 โดยที่ค่าของตัวเลขมีค่าขึ้นอยู่กับตำแหน่ง

เช่น ตัวเลข 42 คือ 2 อยู่ในตำแหน่งที่ 1 มีค่าเท่ากับ 2

4 อยู่ในตำแหน่งที่ 2 มีค่าเท่ากับ 40

#### 2.2 ตัวเลขอียิปต์

ชาวอียิปต์บันทึกจำนวนโดยใช้สัญลักษณ์ต่างๆ แทนจำนวน โดยรวมค่าสัญลักษณ์เหล่านั้นไม่คำนึงถึงตำแหน่ง ดังนั้น จำนวนเดียวกัน อาจจะเขียนสัญลักษณ์สลับที่เป็นแบบต่างๆ ได้ เช่น ๓ แทนค่าเท่ากับ สิบ หรือ ๓ II หรือ II ๓ หรือ I ๓I แทนค่าเท่ากับสิบสอง

#### 2.3 ตัวเลขโรมัน

ตัวเลขโรมัน จะเขียนตัวเลขแต่ละตัวไว้ ณ ตำแหน่งใดของค่าตัวเลขนั้นจะมีค่าคงที่เสมอ และเขียนแทนจากสัญลักษณ์ที่มีค่ามากไปยังสัญลักษณ์ที่มีค่าน้อย ค่าของจำนวนที่ได้จะมีค่าเท่ากับจำนวนที่มีค่ามากลบด้วยจำนวนที่มีค่าน้อย และจะเขียนสัญลักษณ์เพียงคู่เดียวในแต่ละหลักเท่านั้น เช่น IX มีค่าเท่ากับ  $10 - 1 = 9$

กรณีที่ต้องการค่าที่สูงขึ้นเลขโรมันจะเขียน บาร์ (ขีด) ไว้บนสัญลักษณ์ที่ต้องการเพิ่มค่าสูงขึ้น ซึ่งหมายถึงจำนวนนั้นจะมีค่าคูณด้วย 1,000 เช่น V มีค่าเท่ากับ 5 ถ้า  $\bar{V}$  มีค่าเท่ากับ  $5 \times 1,000 = 5,000$

### ตารางแสดงสัญลักษณ์ของตัวเลข

| เลขฮินดูอารบิก | 1 | 2  | 3   | 4  | 5   | 6   | 7    | 8    | 9   | 10 | 50 | 100 | 500 | 1,000 |
|----------------|---|----|-----|----|-----|-----|------|------|-----|----|----|-----|-----|-------|
| เลขไทย         | ๑ | ๒  | ๓   | ๔  | ๕   | ๖   | ๗    | ๘    | ๙   | ๑๐ | ๕๐ | ๑๐๐ | ๕๐๐ | ๑,๐๐๐ |
| เลขอียิปต์     | I | II | III | II | III | III | IIII | IIII | III |    |    |     |     |       |
|                |   |    |     | II | II  | III | III  | IIII | III | ∩  | ∩  | ∩   |     |       |
|                |   |    |     |    |     |     |      |      | III |    |    |     |     |       |
| เลขโรมัน       | I | II | III | IV | V   | VI  | VII  | VIII | IX  | X  | L  | C   | D   | M     |

### 3 ระบบจำนวนและเลขฐาน

เลขฐานสิบ (Decimal Number) ได้แก่ เลข 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

#### ตารางแสดงระบบจำนวนเลขฐานต่างๆ

| ระบบ<br>เลขฐาน | จำนวนตัวเลข |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----------------|-------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ฐานสอง         | 0           | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| ฐานหก          | 0           | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| ฐานแปด         | 0           | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |   |   |   |   |   |   |   |
| ฐานสิบ         | 0           | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |   |   |   |   |   |
| ฐานสิบหก       | 0           | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E |

จะใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษแทนจำนวนตัวเลขของฐานที่มีค่ามากกว่า 10 เช่น A หมายถึงเลข 11 การเขียนระบบจำนวนเลขฐานใดๆ ต้องเขียนชื่อฐานกำกับห้อยไว้ที่ท้ายจำนวนของเลขฐานนั้นๆ ยกเว้น ฐานสิบ

เช่น  $1101_2$  หมายถึง ระบบเลขฐานสอง หรือ  $1207_8$  หมายถึง ระบบเลขฐานแปด

## 4 การเปลี่ยนจำนวนเลขฐาน

การเปลี่ยนเลขฐาน คือ การแปลงระบบจำนวนของเลขฐานหนึ่งไปเป็นระบบจำนวนของเลขฐานหนึ่ง

### 4.1 การเปลี่ยนจำนวนเลขฐาน จากฐานอื่นๆ เป็นฐานสิบ

การเปลี่ยนเลขฐานอื่นมาเป็นฐานสิบโดยใช้วิธีการกระจาย โดยค่าของตำแหน่งจะเป็นเลขฐานอื่นๆ แทนเลข 10

#### ตัวอย่าง

จงเปลี่ยนเลขฐานสอง จำนวน  $1101_2$  ไปเป็นเลขฐานสิบ นำมาเขียนใหม่ในรูปของเลขยกกำลังจะได้

$$\begin{aligned} 1101_2 &= (1 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0) \\ &= 8 + 4 + 0 + 1 \end{aligned}$$

$$1101_2 = 13 \text{ ในระบบเลขฐานสิบ}$$

จงเปลี่ยนเลขฐานสิบหก จำนวน  $A01_{16}$  ไปเป็นเลขฐานสิบ

$$\begin{aligned} A01_{16} &= (A \times 16^2) + (0 \times 16^1) + (1 \times 16^0) \\ &= 10 \times 256 + 0 + 1 \\ &= 2560 + 1 \end{aligned}$$

$$A01_{16} = 2561 \text{ ในระบบเลขฐานสิบ}$$

### 4.2 การเปลี่ยนจำนวนเลขฐานสิบไปเป็นเลขฐานอื่นๆ

การเปลี่ยนเลขฐานสิบไปเป็นเลขฐานอื่น เช่น ฐานสอง ฐานแปด และฐานสิบหก เราจะใช้วิธีแปลงกลับ (Remainder Method) โดยการหารหาเศษแล้วเก็บเศษที่เหลือไว้ในการหารครั้งต่อไป ซึ่งต้องหารไปเรื่อยๆ จนกว่าผลหารจะเป็นศูนย์ และผลลัพธ์จากการหาร คือ เศษจะอ่านย้อนกลับขึ้นข้างบน

## ทวิช่วง

จงเปลี่ยนจำนวน  $65_{10}$  เป็นระบบเลขฐานสองเราจะใช้วิธีการตั้งหารเอาเศษ ดังนี้

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 65} \text{ เศษ } 1 \\
 2 \overline{) 32} \text{ เศษ } 0 \\
 2 \overline{) 16} \text{ เศษ } 0 \\
 2 \overline{) 8} \text{ เศษ } 0 \\
 2 \overline{) 4} \text{ เศษ } 0 \\
 2 \overline{) 2} \text{ เศษ } 0 \\
 \underline{1} \text{ เศษ } 1
 \end{array}$$

อ่านย้อนขึ้น

$$65_{10} = 1000001_2$$

จงเปลี่ยนจำนวน  $65_{10}$  เป็นระบบเลขฐานแปด

$$\begin{array}{r}
 8 \overline{) 65} \text{ เศษ } 1 \\
 8 \overline{) 8} \text{ เศษ } 0 \\
 \underline{1} \text{ เศษ } 1
 \end{array}$$

อ่านย้อนขึ้น

$$65_{10} = 101_8$$

จงเปลี่ยนจำนวน  $174_8$  เป็นระบบเลขฐานสิบเอ็ด

ขั้นที่ 1 เปลี่ยนจำนวน  $174_8$  เป็นเลขฐานสิบ

$$\begin{aligned}
 174_8 &= 1 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 4 \times 8^0 \\
 &= (1 \times 8^2) + (7 \times 8^1) + (4 \times 8^0) \\
 &= 64 + 56 + 4 \\
 &= 124_{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 11 \overline{) 124} \text{ เศษ } 3 \\
 11 \overline{) 11} \text{ เศษ } 0 \\
 \underline{1} \text{ เศษ } 1
 \end{array}$$

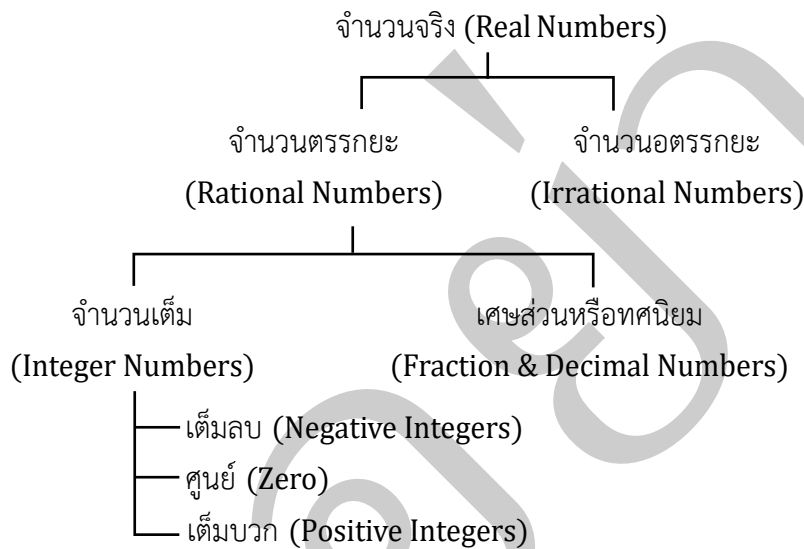
อ่านย้อนขึ้น

$$174_8 = 103_{11}$$

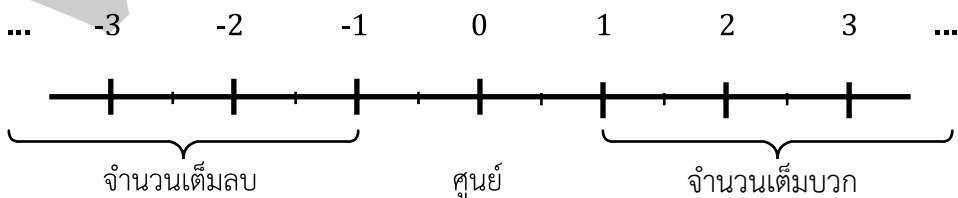
$\therefore$  จำนวน  $174_8$  เท่ากับ  $103_{11}$

# บทที่ 2

## ระบบจำนวน



- ① **จำนวนจริง** คือ จำนวนที่เป็นจำนวนตรรกยะ หรือจำนวนอตรรกยะ
- ② **จำนวนตรรกยะ** คือ จำนวนที่สามารถเขียนได้ในรูปของเศษส่วน โดยเศษและส่วนเป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ หรือเขียนอยู่ในรูปทศนิยมซ้ำได้ เช่น  $-7, -3, 0, 5, 8, 53, 1.333\dots$
- ③ **จำนวนอตรรกยะ** คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วน หรือทศนิยมซ้ำได้ เช่น  $\pi, 0.121221222\dots, 2.523531\dots$
- ④ **จำนวนเต็ม**



**จำนวนเต็มบวก** หมายถึง จำนวนนับตั้งแต่ 1 เป็นต้นไปไม่สิ้นสุด และจำนวนเต็มบวก หรือจำนวนนับที่มีค่าน้อยที่สุด คือ 1 แต่ไม่สามารถหาจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดได้

**จำนวนเต็มศูนย์** ไม่ใช่จำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ จะอยู่ตรงกลางระหว่าง  $-1$  กับ  $1$

**จำนวนเต็มลบ** เป็นจำนวนเต็มที่เกิดจากศูนย์ไปทางซ้ายและ  $-1$  เป็นจำนวนเต็มลบที่มีค่ามากที่สุด แต่ไม่สามารถหาจำนวนเต็มลบที่น้อยที่สุดได้

#### 4.1 สมบัติการบวกและการคูณจำนวนเต็มบวก

|                                      |                                                                                |
|--------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| สมบัติการสลับที่การบวกและการคูณ      | $a + b = b + a$<br>$a \times b = b \times a$                                   |
| สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการบวกและการคูณ | $(a + b) + c = a + (b + c)$<br>$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ |
| สมบัติการแจกแจง                      | $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$                               |
| สมบัติของศูนย์                       | $a + 0 = 0 + a = a$<br>$a \times 0 = 0 \times a = 0$                           |
| สมบัติของหนึ่ง                       | $1 \times a = a \times 1 = a$<br>$\frac{a}{1} = a$ เมื่อ $a$ แทนจำนวนใด ๆ      |

##### ① การบวกจำนวนเต็ม

1.1) การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก คือ การนำค่าสัมบูรณ์มาบวกกัน ผลลัพธ์ที่ได้เป็นจำนวนเต็มบวก

1.2) การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ คือ การนำค่าสัมบูรณ์มาบวกกัน ผลลัพธ์ที่ได้เป็นจำนวนเต็มลบ

1.3) การบวกจำนวนเต็มต่างชนิดกัน คือ การนำเอาจำนวนที่มีค่าสัมบูรณ์มากมาลบจำนวนที่มีค่าสัมบูรณ์น้อย ผลลัพธ์จะเป็นบวกหรือลบก็ขึ้นกับจำนวนที่มีค่าสัมบูรณ์มาก

##### ② การลบจำนวนเต็ม

การลบจำนวนเต็มหาได้จาก ตัวตั้ง - ตัวลบ = ตัวตั้ง + จำนวนตรงข้ามของตัวลบ

เช่น  $45 - 30 = 45 + (-30)$

③ การคูณจำนวนเต็ม : ให้นำตัวเลขมาคูณกัน ส่วนเครื่องหมายตามตาราง ดังนี้

|                  |       |                              |
|------------------|-------|------------------------------|
| บวก $\times$ บวก | = บวก | เช่น $5 \times 6 = 30$       |
| บวก $\times$ ลบ  | = ลบ  | เช่น $5 \times (-6) = -30$   |
| ลบ $\times$ บวก  | = ลบ  | เช่น $(-5) \times 6 = -30$   |
| ลบ $\times$ ลบ   | = บวก | เช่น $(-5) \times (-6) = 30$ |

④ การหารจำนวนเต็ม : ให้นำตัวเลขมาหารกัน ส่วนเครื่องหมายตามตาราง ดังนี้

|                |       |                            |
|----------------|-------|----------------------------|
| บวก $\div$ บวก | = บวก | เช่น $15 \div 3 = 5$       |
| บวก $\div$ ลบ  | = ลบ  | เช่น $15 \div (-3) = -5$   |
| ลบ $\div$ บวก  | = ลบ  | เช่น $(-15) \div 3 = -5$   |
| ลบ $\div$ ลบ   | = บวก | เช่น $(-15) \div (-3) = 5$ |

## 4.2 ค่าสัมบูรณ์

เมื่อ  $a$  เป็นจำนวนจริงใดๆ ค่าสัมบูรณ์ของ  $a$  หรือ  $|a|$  คือ ผลต่างของจำนวนนั้นกับ 0 ซึ่งจะเป็นบวกเสมอ เช่น  $|3| = 3$ ,  $|-10| = 10$

### สมบัติของค่าสัมบูรณ์

1)  $|x| = |-x|$

2)  $|xy| = |x||y|$

3)  $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

4)  $|x - y| = |y - x|$

5)  $|x|^2 = x^2$

6)  $|x + y| \leq |x| + |y|$

7) เมื่อ  $a$  เป็นจำนวนจริงบวก  $|x| < a$  หมายถึง  $-a < x < a$

$|x| \leq a$  หมายถึง  $-a \leq x \leq a$

8) เมื่อ  $a$  เป็นจำนวนจริงบวก  $|x| > a$  หมายถึง  $x < -a$  หรือ  $x > a$

$|x| \geq a$  หมายถึง  $x \leq -a$  หรือ  $x \geq a$

## 4.3 สมบัติของจำนวนนับ

- ① **ตัวประกอบ** คือ จำนวนนับซึ่งหารจำนวนนับใดๆ ได้ลงตัว เช่น ตัวประกอบของ 8 คือ 1, 2, 4, 8
- ② **จำนวนเฉพาะ** คือ จำนวนนับที่มากกว่า 1 ซึ่งมีเฉพาะ 1 และจำนวนนั้นหารลงตัว
- ③ **ตัวประกอบเฉพาะ** คือ ตัวประกอบซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะ เช่น  
ตัวประกอบของ 18 คือ 1, 2, 3, 6, 9, 18  
ตัวประกอบเฉพาะของ 18 คือ 2, 3
- ④ **ตัวประกอบร่วม** คือ จำนวนนับซึ่งสามารถหารจำนวนนับใดๆ ตั้งแต่ 2 จำนวนขึ้นไปลงตัว
- ⑤ **ตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.)** คือ ตัวประกอบร่วม ซึ่งมีค่ามากที่สุดของจำนวนนับตั้งแต่ 2 จำนวน

**ตัวอย่าง**

จงหา ห.ร.ม. ของ 56, 70 และ 98

วิธีหาตัวประกอบเฉพาะ

$$56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$$

$$70 = 2 \times 5 \times 7$$

$$98 = 2 \times 7 \times 7$$

ห.ร.ม. ของ 56, 70 และ 98 คือ  $2 \times 7 = 14$

วิธีหารสั้น

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 56 \quad 70 \quad 98} \\ \underline{28 \quad 35 \quad 49} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 28 \quad 35 \quad 49} \\ \underline{4 \quad 5 \quad 7} \end{array}$$

ห.ร.ม. ของ 56, 70 และ 98 คือ  $2 \times 7 = 14$

- ⑥ **พหุคูณ** คือ จำนวนนับซึ่งมีค่าเป็นจำนวนเท่าของจำนวนนับใดๆ เช่น 10 เป็นพหุคูณของ 5
- ⑦ **พหุคูณร่วม** คือ พหุคูณของจำนวนนับใดๆ ตั้งแต่ 2 จำนวนขึ้นไป

**ตัวอย่าง**

จงหาตัวคูณร่วมของ 4 และ 6

จำนวนนับที่มี 4 เป็นตัวประกอบ คือ 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ...

จำนวนนับที่มี 6 เป็นตัวประกอบ คือ 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, ...

จำนวนนับที่มีตัวประกอบร่วมของทั้ง 4 และ 6 คือ 12, 24, 36, ...

- ⑧ **ตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.)** คือ พหุคูณร่วมที่มีค่าน้อยที่สุดของจำนวนนับใดๆ ตั้งแต่ 2 จำนวนขึ้นไป

### ตัวอย่าง

จงหา ค.ร.น. ของ 12 และ 42

วิธีหาตัวประกอบเฉพาะ

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

ค.ร.น. ของ 12 และ 42 คือ

$$2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$$

วิธีหารสั้น

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 12 \quad 42} \\ \underline{\phantom{00} 12 \quad 42} \\ \phantom{00} 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 6 \quad 21} \\ \underline{\phantom{00} 6 \quad 21} \\ \phantom{00} 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 7 \\ \hline \end{array}$$

ค.ร.น. ของ 12 และ 42 คือ

$$2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$$

ถ้าจำนวนที่ต้องการหา ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ไม่มีตัวประกอบร่วม

$$\text{ห.ร.ม.} = 1$$

$$\text{ค.ร.น.} = \text{ผลคูณของจำนวนเหล่านั้นทั้งหมด}$$

ในกรณีจำนวนนับสองจำนวน ผลคูณของทั้งสองจำนวน = ห.ร.ม.  $\times$  ค.ร.น.

#### 4.4 การประยุกต์ของจำนวนเต็มและเลขยกกำลัง

① **การใส่วงเล็บ** โดยมีเครื่องหมายลบอยู่หน้าวงเล็บ ให้เปลี่ยนเครื่องหมายในวงเล็บเป็นเครื่องหมายตรงข้าม เช่น  $12 - 6 + 4 = 12 - (6 - 4)$

$$8 - 4 - 2 = 8 - (4 + 2)$$

② **การถอดวงเล็บ** โดยมีเครื่องหมายลบอยู่หน้าวงเล็บ ให้เปลี่ยนเครื่องหมายในวงเล็บเป็นเครื่องหมายตรงข้าม เช่น  $12 - (6 - 4) = 12 - 6 + 4 = 10$

$$8 - (4 + 2) = 8 - 4 - 2 = 2$$

③ **การบวก และการลบสัญกรณ์ทางวิทยาศาสตร์ ( $A \times 10^n$ )**

กรณีที่  $n$  เท่ากัน ให้นำ  $A$  มาบวกหรือลบกัน

กรณีที่  $n$  ไม่เท่ากัน ให้ทำให้  $n$  เท่ากัน แล้วจึงนำ  $A$  มาบวกหรือลบกัน

## ทวิคูณ

$$\begin{aligned}
 (6.3 \times 10^6) - (2.4 \times 10^4) &= (630 \times 10^4) - (2.4 \times 10^4) \\
 &= (630 - 2.4) \times 10^4 \\
 &= 627.6 \times 10^4 \\
 &= 6.276 \times 10^6
 \end{aligned}$$

## 4.5 รากที่สอง

- ① นิยามของรากที่สอง เมื่อ  $a$  แทนจำนวนจริงบวกใดๆ หรือ ศูนย์
  - 1) รากที่สองของ  $a$  คือ จำนวนจริงบวกที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับ  $a$  หรือ  $(\sqrt{a})^2 = a$
  - 2) รากที่สองของจำนวนจริงบวกใดๆ จะมีสองค่าเสมอ หรือ  $\sqrt{a} = \pm a$
  - 3) รากที่สองของศูนย์เท่ากับศูนย์ หรือ  $\sqrt{a} = 0$
- ② สมบัติของรากที่สอง
  - 1)  $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
  - 2)  $\sqrt{a^2} = |a|$  ;  $a \geq 0$
  - 3)  $(\sqrt{a})^2$  และ  $(-\sqrt{a})^2 = a$
  - 4)  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$  เมื่อ  $a, b \geq 0$
  - 5)  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$  เมื่อ  $a, b \geq 0$
- ③ สมบัติการสลับที่การบวกและการสลับที่การคูณ
  - 1)  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{b} + \sqrt{a}$
  - 2)  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{b} \times \sqrt{a}$
- ④ สมบัติการเปลี่ยนหมู่การบวกและการเปลี่ยนหมู่การคูณ
  - 1)  $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + \sqrt{c} = \sqrt{a} + (\sqrt{b} + \sqrt{c})$
  - 2)  $(\sqrt{a} \times \sqrt{b}) \times \sqrt{c} = \sqrt{a} \times (\sqrt{b} \times \sqrt{c})$
- ⑤ สมบัติการแจกแจง
  - 1)  $\sqrt{a} \times (\sqrt{b} + \sqrt{c}) = (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) + (\sqrt{a} \times \sqrt{c})$
  - 2)  $(\sqrt{b} + \sqrt{c}) \times \sqrt{a} = (\sqrt{b} \times \sqrt{a}) + (\sqrt{c} \times \sqrt{a})$

⑥ การบวกและการลบรากที่สอง

- กรณีที่ตัวเลขภายในรากเท่ากัน ให้นำตัวเลขหน้ารากมาบวกหรือลบกัน โดยตัวเลขภายในรากมีค่าเท่าเดิม เช่น  $8\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$
- กรณีที่ตัวเลขภายในรากไม่เท่ากัน ให้ทำตัวเลขภายในรากเท่ากันก่อน จึงนำตัวเลขหน้ารากมาบวกหรือลบกัน เช่น  $\sqrt{8} + \sqrt{50} = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

⑦ การคูณรากที่สอง ให้นำตัวเลขหน้ารากคูณกัน และนำตัวเลขภายในรากคูณกัน แล้วทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย เช่น  $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{3} = (2 \times 3) \times (\sqrt{5} \times \sqrt{3}) = 6\sqrt{15}$

⑧ การหารรากที่สอง ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย แล้วนำตัวเลขหน้ารากมาหารกัน และนำตัวเลขภายในรากมาหารกัน เช่น  $\frac{\sqrt{336}}{\sqrt{875}} = \frac{\sqrt{4 \times 4 \times 3 \times 7}}{\sqrt{5 \times 5 \times 5 \times 7}} = \frac{\sqrt{4^2 \times 3 \times 7}}{\sqrt{5^2 \times 5 \times 7}} = \frac{4\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}$

ตัวอย่าง

จงหาค่าของ  $\sqrt{46656}$  เป็นเท่าใด

วิธีทำ วิธีหารสั้นของจำนวน 46656

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 46656} \\ 6 \overline{) 7776} \\ 6 \overline{) 1296} \\ 6 \overline{) 216} \\ 6 \overline{) 36} \\ 6 \overline{) 6} \\ \underline{1} \end{array}$$

ดังนั้น  $\sqrt{46656} = \sqrt{6^6} = \sqrt{(6^3)^2} = 6^3 = 216$

4.6 รากที่ n ของจำนวนจริง

สมบัติของรากที่ n

1)  $(\sqrt[n]{a})^n = a$  เป็นจำนวนจริง เช่น  $(\sqrt[3]{-7})^3 = -7$

2)  $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ a & \text{เมื่อ } a < 0 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนคี่บวก} \\ |a| & \text{เมื่อ } a < 0 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนคู่บวก} \end{cases}$

$$3) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$$

$$4) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ เมื่อ } b \neq 0$$

### ตัวอย่าง

จงหาค่า  $\sqrt[4]{\frac{625}{81}}$

วิธีทำ 
$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\frac{625}{81}} &= \sqrt[4]{\frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{3 \times 3 \times 3 \times 3}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{5^4}{3^4}} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

#### 4.7 เลขยกกำลัง

ถ้า  $a$  เป็นจำนวนจริงใดๆ และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ ตัว}} \quad \text{และ} \quad \begin{array}{l} a \text{ เรียกว่า ฐาน (base)} \\ n \text{ เรียกว่า เลขชี้กำลัง (Exponent)} \end{array}$$

#### สมบัติของเลขยกกำลัง

กำหนด  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง,  $a, b \neq 0$  โดยที่  $m, n$  เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว

$$1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2) a^m \div a^n = a^{m-n}; a \neq 0$$

$$3) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$4) (a^m \cdot b^m)^n = a^{mn} \cdot b^{mn}$$

$$5) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$6) \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$7) a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \frac{1}{a^{-m}} = a^m$$

$$8) (-a)^n = \begin{cases} a^n; & n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ -a^n; & n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

$$9) a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \text{ (จำนวนที่ยกกำลัง } n \text{ แล้วเท่ากับ } a)$$

$$10) a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$11) \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|; & n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ a; & n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

$$12) a^0 = 1$$

### การหาค่าตัวแปรจากสมการเลขยกกำลัง

พยายามจัดฐานของเลขยกกำลังให้เท่ากัน แล้วสรุปโดยใช้หลัก

ถ้า  $a^x = a^y$  แล้ว  $x = y$  เมื่อ  $a \neq 0$  และ  $a \neq 1$

เช่น  $2^x = 32$

$$2^x = 2^5$$

ดังนั้น  $x = 5$

### 4.8 การจัดจำนวนจริงบวกให้อยู่ในรูปสัญกรณ์ทางวิทยาศาสตร์

จำนวนจริงบวก  $N$  ทุกจำนวนสามารถจัดได้ในรูปสัญกรณ์ทางวิทยาศาสตร์เป็น

$N = A \times 10^n$  โดยที่  $1 \leq A < 10$  และ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม

#### ตัวอย่าง

จงทำให้เป็นผลสำเร็จ  $(a^2 b^8)(2a^5 b^6)$

วิธีทำ  $(a^2 b^8)(2a^5 b^6) = (2a^{2+5})(b^{8+6})$   
 $= 2a^7 b^{14}$

จงทำให้เป็นผลสำเร็จ  $\frac{4x^4 y^6}{x^3 y^2}$

วิธีทำ  $\frac{4x^4 y^6}{x^3 y^2} = 4x^{4-3} y^{6-2}$   
 $= 4xy^4$

จงทำให้เป็นผลสำเร็จ  $\frac{(6x^2 y^7)(2x^4)}{14x^3 y^2}$

วิธีทำ  $\frac{(6x^2 y^7)(2x^4)}{14x^3 y^2} = \frac{(6 \times 2)x^{2+4-3} y^{7-2}}{14}$   
 $= \frac{12x^3 y^5}{14}$   
 $= \frac{6x^3 y^5}{7}$

## ตัวอย่าง

จงหาค่าของ  $[(3^2)^2 + (2^{-1})^{-2}]^2 \div \frac{34}{(5^2)^{-2}}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad & [(3^2)^2 + (2^{-1})^{-2}]^2 \div \frac{34}{(5^2)^{-2}} = [(3^2)^2 + (2^{-1})^{-2}]^2 \times \frac{(5^2)^{-2}}{34} \\ & = (81 + 4)^2 \times \frac{1}{(5^4)34} \\ & = 85^2 \times \frac{1}{(5^4)34} \\ & = \frac{17}{50}\end{aligned}$$

## ตัวอย่าง

จงหาคำตอบของ  $\frac{3(2^{n+1}) - 4(2^{n-2})}{2^n - 2^{n-1}}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad & \frac{3(2^{n+1}) - 4(2^{n-2})}{2^n - 2^{n-1}} = \frac{3[(2^n)(2^1)] - 4[(2^n)(2^{-2})]}{2^n - [(2^n)(2^{-1})]} \\ & = \frac{6(2^n) - 4(2^n)(\frac{1}{4})}{2^n - (2^n)(\frac{1}{2})} \\ & = \frac{(2^n)(6 - 1)}{2^n(1 - \frac{1}{2})} \\ & = \frac{5}{\frac{1}{2}} \\ & = (5)(2) \\ & = 10\end{aligned}$$

### ตัวอย่าง

ให้  $A = 2^{-2} \times [2^{-2} \times [2^{-2} \times (2^{-2})^{-1}]^{-2}]^{-2}$  และ  $B = 2^{-2} \div [2^{-2} \div [2^{-2} \div (2^{-2})^2]^2]^2$   
แล้วค่าของ  $A + B$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

**วิธีทำ** ให้  $m = 2^{-2}$  จะได้ว่า  $A = m \times [m \times [m \times m^{-2}]^{-2}]^{-2}$

(ทำในวงเล็บ จากด้านในออกด้านนอก)

$$A = m \times [m \times [m^{-1}]^{-2}]^{-2}$$

$$A = m \times [m \times m^2]^{-2}$$

$$= m \times m^{-6}$$

$$= m^{-5}$$

$$= (2^{-2})^{-5}$$

$$= 2^{10}$$

$$B = m \div [m \div [m \div m^2]^2]^2 \quad (\text{ทำในวงเล็บ จากด้านในออกด้านนอก})$$

$$B = m \div [m \div [m^{-1}]^2]^2$$

$$B = m \div [m \div m^{-2}]^2$$

$$= m \div [m^3]^2$$

$$= m \div m^6$$

$$= m^{-5}$$

$$= (2^{-2})^{-5}$$

$$= 2^{10}$$

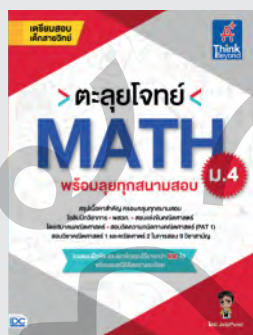
$$\text{ดังนั้น } A + B = 2^{10} + 2^{10} = 2(2^{10}) = 2^{11}$$

## หนังสือ ตะลุยโจทย์ คณิต ม.3 เข้า ม.4 (พร้อมลุยทุกสนามสอบ)

เตรียมความพร้อมในการเตรียมตัวสอบเข้าในระดับ ม.4  
ประกอบด้วยเนื้อหาและแนวข้อสอบมากกว่า 200 ข้อ  
โดยฝึกทำจากโจทย์ระดับง่ายไปจนถึงระดับยาก  
เพื่อให้น้องๆ ได้ฝึกคิดและทำโจทย์หลากหลาย  
มีเฉลยที่ละเอียดสามารถตรวจคำตอบได้ด้วยตนเอง

เหมาะสำหรับนักเรียนใช้เตรียมตัวสอบเข้าโรงเรียนสาธิต  
และโรงเรียนชื่อดังประจำจังหวัด การสอบโอลิมปิกวิชาการ  
การสอบ ASMO และการสอบแข่งขันวัดทักษะในวิชาคณิตศาสตร์ต่างๆ

**เตรียมความพร้อม ฝึกทำโจทย์  
ให้มีความมั่นใจในการสอบมากยิ่งขึ้น**



ตะลุยโจทย์ MATH ม.4  
(พร้อมลุยทุกสนามสอบ)

**เตรียมสอบคณิต  
ที่เด็กสายวิทย์ต้องมี!!!**

รวบข้อสอบมากกว่า 600 ข้อ  
พร้อมเฉลยวิธีคิดอย่างละเอียด  
พร้อมลุยทุกสนามสอบ!



ซื้อสะดวก ส่งถึงบ้านที่ Shopee และ Lazada หรือผ่านทาง  
ร้านหนังสือออนไลน์ [www.thinkbeyondbook.com](http://www.thinkbeyondbook.com)



thinkbeyond books

ISBN(eBook) 885-909-931-177-9



8 859099 311779

ราคา 220 บาท