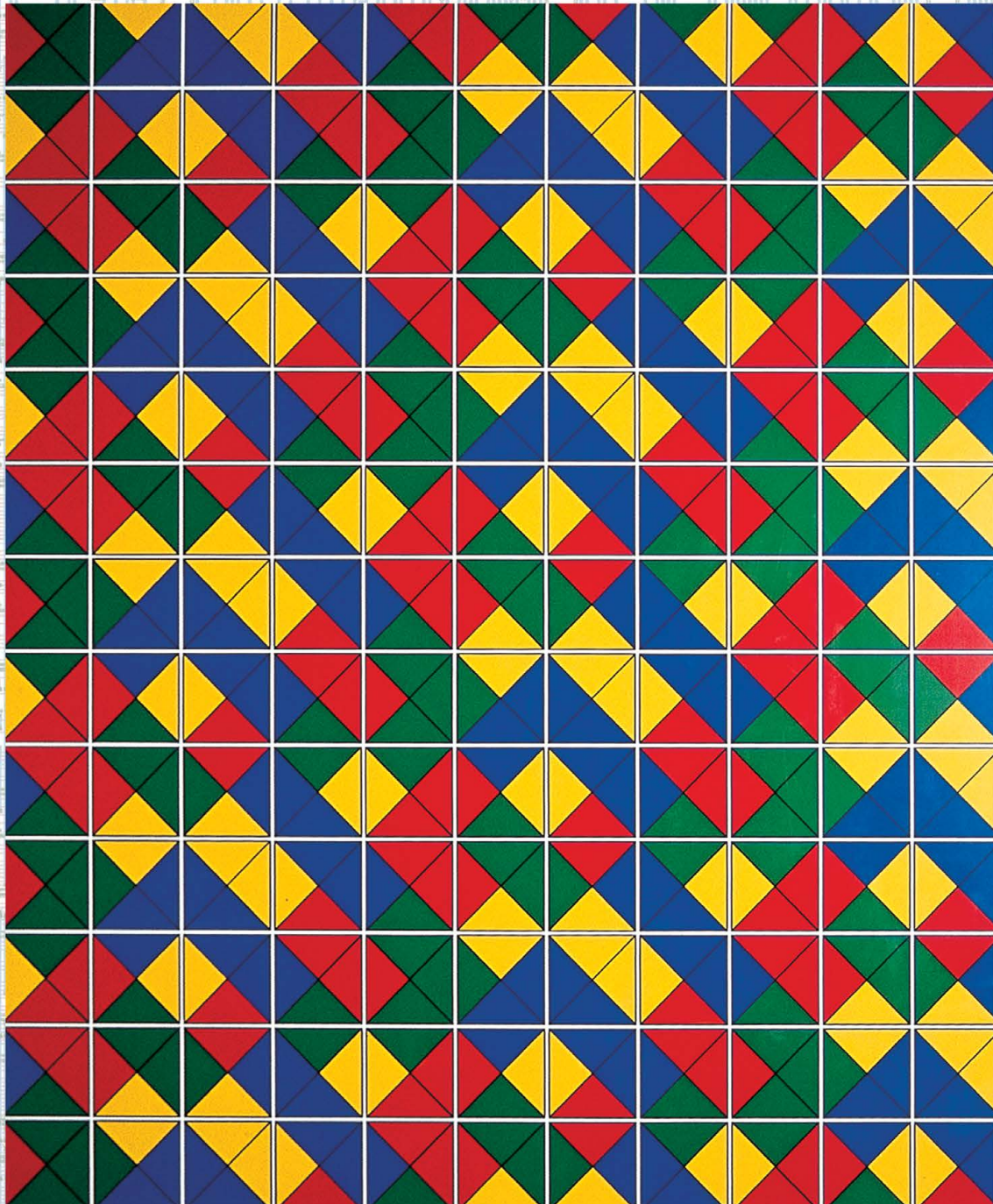




คอมบินาทอริก

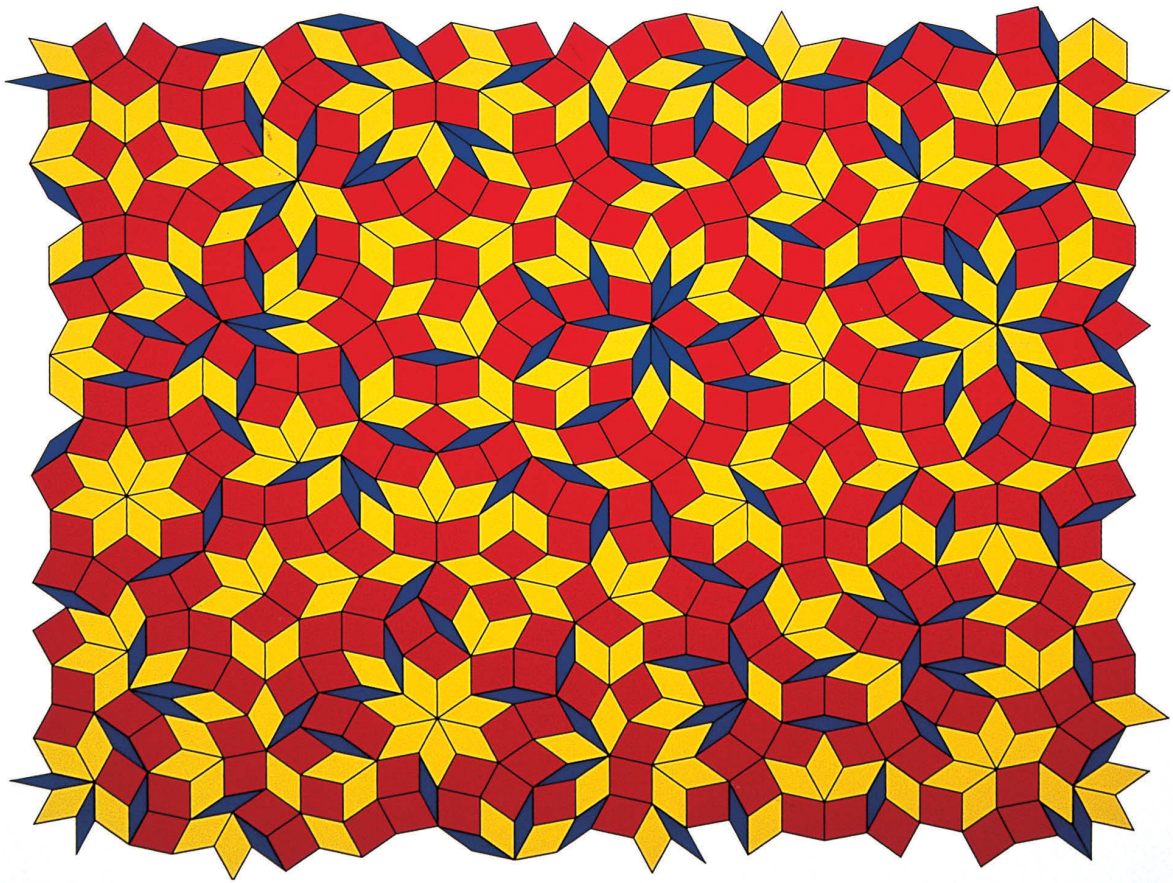
(การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ สัมประสิทธิ์ทวินาม หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก หลักรังนกฟิรา
ฟังก์ชันก่อกำเนิด ความสัมพันธ์เวียนเกิด เทคนิคเชิงการนับ)



โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอน.

คอมบินาทอริก

(การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ สัมประสิทธิ์ทวินาม หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก หลักการเงนทพิราบ
ฟังก์ชันก่อกำเนิด ความสัมพันธ์เวียนเกิด เทคนิคเชิงการนับ)



โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.



**มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา
ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา
กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.)**

ความเป็นมา

ประเทศไทยส่งนักเรียนเข้าแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศครั้งแรกในปี พ.ศ. 2532 ที่ประเทศเยอรมนี โดยความร่วมมือระหว่างสมาคมวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ และสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา (พระยศในขณะนั้น) ได้พระราชทานเงินส่วนพระองค์จำนวนหนึ่งเพื่อเป็นค่าใช้จ่าย

การคัดเลือกนักเรียนเพื่อไปแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ครั้งที่ 30 สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้จัดคณะกรรมการมหาวิทยาลัยจำนวนหนึ่งมาช่วยเฟ้นหาและคัดเลือกนักเรียนเป็นเวลาประมาณสองเดือน เพื่อให้ได้นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาเพิ่มเติมครอบคลุมหลักสูตรที่จะใช้แข่งขัน ซึ่งอยู่ในระดับชั้นปีที่ 1-2 ของมหาวิทยาลัย จากผลสำเร็จในปีแรก ทำให้รัฐบาลเห็นความสำคัญจึงได้จัดสรรงบประมาณให้กับโครงการนี้ผ่านสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2533 เป็นต้นมา สมทบกับเงินพระราชทานเป็นรายปีจากสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ เพื่อสนับสนุนการส่งนักเรียนไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศ 5 สาขา จนถึงปัจจุบันรวม 14 ปี นักเรียนไทยได้ทำชื่อเสียงได้เหรียญทองรวม 17 เหรียญ เหรียญเงิน 53 เหรียญ เหรียญทองแดง 93 เหรียญ และเกียรติคุณประกาศ 35 ราย รวมทั้งสิ้น 198 รางวัล จากจำนวนนักเรียนที่ส่งไปแข่งขัน 276 คน (72%)

อย่างไรก็ตาม จากการที่ประเทศไทยดำเนินการจัดส่งนักเรียนเข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ โอลิมปิกระหว่างประเทศ ตั้งแต่ พ.ศ.2532 จนถึงปัจจุบัน ทำให้เห็นว่ามาตรฐานการศึกษาด้านคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ของไทยยังต่ำกว่ามาตรฐานสากล การเตรียมตัวของนักเรียนยังใช้เวลาน้อยเกินไป

เพื่อให้การส่งเสริมและสนับสนุน โครงการจัดส่งผู้แทนประเทศไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้นสมเด็จพระเจ้า พี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ จึงมีพระดำริให้จัดตั้งมูลนิธิ สอวน. และได้รับอนุมัติจากกระทรวงมหาดไทยเมื่อวันที่ 12 ตุลาคม 2542 โดยมีวัตถุประสงค์หลัก 2 ประการ

วัตถุประสงค์

1. ส่งเสริมให้นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายทั่วประเทศที่มีความสามารถทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ มีโอกาสได้รับการพัฒนาศักยภาพทางด้านคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ฟิสิกส์ และชีววิทยา ตามความถนัดทั้งด้านทฤษฎีและทักษะด้านปฏิบัติ ให้สามารถคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหาที่ซับซ้อนได้ โดยจัดให้มีศูนย์อบรมทั่วประเทศเป็นการเพิ่มเวลาฝึกอบรม เพื่อช่วยให้นักเรียนมีความพร้อมที่จะเข้ารับการคัดเลือกไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศให้ได้ผลดียิ่งขึ้น ตามพระดำริของสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอเจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ องค์ประธานมูลนิธิ สอวน.
2. เพื่อนำประสบการณ์ที่ได้จากการแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมาพัฒนามาตรฐานคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ศึกษาของไทยให้สูงขึ้นเทียบเท่าระดับสากล

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.

มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.) ได้ร่วมมือกับคณาจารย์มหาวิทยาลัยของรัฐ 20 แห่ง และกระทรวงศึกษาธิการ ดำเนินการจัดตั้งศูนย์ สอวน. ในภูมิภาค 12 ศูนย์ และในกรุงเทพฯ 1 ศูนย์ (5 โรงเรียน) เพื่อพัฒนาศักยภาพทางปัญญาของนักเรียนที่มีความพร้อมในด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์จากทั่วประเทศ เพื่อให้นักเรียนได้มีความรู้ความสามารถเทียบเท่ามาตรฐานสากล และพร้อมที่จะสอบคัดเลือกเป็นผู้แทนประเทศไทยไปร่วมการแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศในสาขาวิชาต่างๆ ได้ และเพื่อขยายผลจากประสบการณ์ที่ได้เข้าแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมาพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยให้สูงขึ้นเทียบเท่าสากล

ในการอบรมนักเรียนของศูนย์ สอวน. มูลนิธิ สอวน. ได้พิจารณาเห็นว่าตำราที่มีความสมบูรณ์ของเนื้อหาตามหลักสูตรของ สอวน. จะช่วยพัฒนาศักยภาพของนักเรียนในศูนย์ สอวน. ให้สูงขึ้นได้ นอกจากนั้นตำราเรียนในวิชาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีความสมบูรณ์ถูกต้องยังขาดแคลน นักเรียนและครูสามารถนำตำราที่พัฒนาขึ้นมาไปใช้เป็นหนังสืออ้างอิงประกอบการเรียนการสอนได้อีกด้วย มูลนิธิ สอวน. จึงได้มี “โครงการจัดทำตำราส่งเสริมพัฒนาศักยภาพของนักเรียนด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์” ขึ้น เพื่อผลิตตำราคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ชีววิทยาและฟิสิกส์ที่มีเนื้อหาหลักสูตรตามมาตรฐานสากล โดยมีวัตถุประสงค์

1. เพื่อเป็นที่ระลึกในมหามงคลสมัยที่สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ ทรงเจริญพระชนมายุ 80 พรรษา ซึ่งพระองค์ทรงมีพระมหากรุณาธิคุณต่อโครงการจัดส่งผู้แทนประเทศไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศและทรงสนับสนุนการดำเนินงานเพื่อพัฒนามาตรฐานการศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยอย่างหาที่สุดมิได้

2. เพื่อผลิตหนังสือคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ชีววิทยาและฟิสิกส์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายถึงระดับชั้นปีที่ 1 ของคณะวิทยาศาสตร์ในมหาวิทยาลัยให้มีคุณภาพเทียบเท่าสากล เรียบเรียงโดยคณาจารย์จากมหาวิทยาลัยของรัฐที่มีประสบการณ์สูงและที่มีส่วนร่วมในการฝึกอบรมนักเรียนในค่าย สอวน. ค่าย สสวท. และควบคุมนักเรียนไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศ เนื้อหาในหนังสือเน้นกระบวนการคิดแบบวิทยาศาสตร์ เพื่อฝึกฝนให้นักเรียนสามารถคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหาที่ซับซ้อนทั้งในเชิงทฤษฎีและประยุกต์ได้โดยจัดพิมพ์บนกระดาษอาร์ตอย่างดีและมีภาพสีประกอบคำบรรยาย

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของมูลนิธิ สอวน. มีเป้าหมายในการผลิตตำราคณิตศาสตร์ รวม 5 เล่ม คอมพิวเตอร์ 3 เล่ม เคมี 4 เล่ม ชีววิทยา 5 เล่ม และฟิสิกส์ 3 เล่ม โดยหนังสือชุดแรกจะนำขึ้นทูลเกล้าถวายในวันที่ 6 มิถุนายน 2547 ซึ่งเป็นวันประชุมสามัญประจำปี พ.ศ. 2547 ของคณะกรรมการบริหาร และสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ เสด็จเป็นองค์ประธานที่ประชุม ส่วนที่เหลือคาดว่าจะจัดพิมพ์ให้แล้วเสร็จภายในปี พ.ศ. 2547 นี้ นอกจากนั้นคณะกรรมการโครงการผลิตตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน. มีเป้าหมายจะผลิตตำราที่มีคุณภาพสูงนี้ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยคณาจารย์จากมหาวิทยาลัย เพื่อวางรากฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์พื้นฐานและเพื่อสร้างแรงบันดาลใจและความสนใจทางด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์แก่เยาวชนอีกด้วย หากได้รับความอนุเคราะห์ช่วยเหลือด้านงบประมาณจากภาครัฐและเอกชน

คณะจัดทำหนังสือคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์หวังว่าโครงการตำราคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ของมูลนิธิ สอวน. จะมีส่วนร่วมในการปฏิรูปการเรียนรู้และยกระดับมาตรฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยให้เทียบเท่ากับระดับสากลเพื่อสนองพระดำริของสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์

คำขอบคุณ คณะกรรมการดำเนินงานโครงการตำราฯ ขอขอบคุณพิพิธภัณฑสถาน Deutsches Museum, Munich ที่อนุญาตให้ประธานคณะกรรมการฯ เข้าถ่ายภาพในพิพิธภัณฑสถาน เพื่อนำมาเผยแพร่เพื่อการศึกษา

คณะกรรมการโครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.

คณะกรรมการที่ปรึกษา

1. ศาสตราจารย์ นายแพทย์ จรัส สุวรรณเวลา	รองประธานมูลนิธิ สอวน.
2. รองศาสตราจารย์ ดร.กำจัด มงคลกุล	กรรมการมูลนิธิฯ
3. ดร. คุณหญิงกษมา วรวรรณ ณ อยุธยา	กรรมการมูลนิธิฯ
4. รองศาสตราจารย์ ดร. คุณหญิงสุมณฑา พรหมบุญ	กรรมการมูลนิธิฯ
5. นายเชาว์ อรรถมานะ (อดีต)	กรรมการมูลนิธิฯ
6. นายสมนึก พิมลเสถียร	กรรมการมูลนิธิฯ
7. นายสุนทร อรุณานนท์ชัย	กรรมการมูลนิธิฯ
8. รองศาสตราจารย์บุญรักษา สุนทรธรรม	กรรมการมูลนิธิฯ

คณะกรรมการดำเนินงานโครงการตำราฯ

1. ศาสตราจารย์ศักดิ์ ศิริพันธุ์ (ราชบัณฑิต) เลขานุการมูลนิธิ สอวน.	ประธาน
2. รองศาสตราจารย์เย็นใจ สมวิเชียร	รองประธาน
3. รองศาสตราจารย์ ดร. ณรงค์ ปั่นนัม	กรรมการ (วิชาคณิตศาสตร์)
4. รองศาสตราจารย์ยืน ภู่วรวรรณ	กรรมการ (วิชาคอมพิวเตอร์)
5. รองศาสตราจารย์ ดร. พินิติ รตะนานุกูล	กรรมการ (วิชาเคมี)
6. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วุทธิพันธุ์ ประชุมฤทธิ์	กรรมการ (วิชาฟิสิกส์)
7. ศาสตราจารย์อักษร ศรีเปล่ง	กรรมการ (วิชาชีววิทยา ประเภทพืช)
8. รองศาสตราจารย์ ดร. อุษณีย์ ยศยิ่งยวด	กรรมการ (วิชาชีววิทยา ประเภทสัตว์)

คณะผู้เขียนวิชาคณิตศาสตร์

1. รองศาสตราจารย์ ดร. ณรงค์ ปั่นนัม	ประธานคณะกรรมการ
2. ศาสตราจารย์ กิตติคุณยุพิน พิพิธกุล	อนุกรรมการ
3. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อุษณีย์ ลีวัฒน์	อนุกรรมการ
4. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิตติยา ปภาพจน์	อนุกรรมการ
5. รองศาสตราจารย์ ดร. ณวิวรรณ รัตนประเสริฐ	อนุกรรมการ
6. รองศาสตราจารย์ ดร.วิเชียร เลหาโกศล	อนุกรรมการ
7. ดร. ภัททรา เรืองสินทรัพย์	อนุกรรมการ
8. นายวัชรพล พิมพ์เสริญ	อนุกรรมการ
9. ดร. จริยา อู่ยะเสถียร	
10. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ไพศาล นาคมหาชาติสินธุ์	

คำนำ

คอมบินาทอริก(Combinatorics) เป็นสาขาของวิชาคณิตศาสตร์ที่ศึกษาการแจกแจง การจัดหมู่ และการเรียงสับเปลี่ยนของเซตภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด รวมถึงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับวิธีการเหล่านั้น ความรู้ในวิชาคอมบินาทอริกนี้นอกจากจะเป็นประโยชน์โดยตรงต่อการศึกษาคณิตศาสตร์บริสุทธิ์แล้ว ยังมีประโยชน์ต่อการศึกษาและการทำงานวิจัยในด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์หลายสาขา

ตำราคอมบินาทอริกเล่มนี้ ผู้เขียนได้เรียบเรียงขึ้นด้วยวัตถุประสงค์หลักเพื่อใช้เป็นตำราประกอบการเรียนการสอนวิชาคอมบินาทอริกสำหรับมูลนิธิ สอวน. เนื้อหาในตำราเล่มนี้แบ่งเป็น 7 บท ได้แก่ การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ สมบัติทวินาม หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก หลักการนับ ฟังก์ชันก่อกำเนิด ความสัมพันธ์เวียนเกิด และเทคนิคเชิงการนับ กล่าวได้ว่าครอบคลุมตั้งแต่ความรู้เบื้องต้นไปจนถึงความรู้ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการแก้ปัญหาในการแข่งขันคณิตศาสตร์หลากหลายระดับได้ จึงเหมาะแก่นักเรียนระดับมัธยมศึกษาที่มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก รวมถึงนิสิตและนักศึกษาในมหาวิทยาลัย

การศึกษาคณิตศาสตร์ให้ประสบผลสำเร็จนั้น ส่วนหนึ่งเป็นผลจากการได้หมั่นคิดวิเคราะห์โจทย์แบบฝึกหัดด้วยตนเองอย่างสม่ำเสมอโดยไม่ย่อท้อ ผู้อ่านจึงไม่ควรละเลยแบบฝึกหัดท้ายหัวข้อและแบบฝึกหัดท้ายบทที่มีระดับความยากตั้งแต่พื้นฐานไปจนถึงโจทย์แข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ทักษะที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยตนเองย่อมเสริมสร้างรากฐานอันแข็งแกร่งในการศึกษาคณิตศาสตร์ต่อไปในอนาคต

ผู้เขียนรู้สึกซาบซึ้งและใคร่ขอกราบขอบพระคุณครูบาอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้แก่ผู้เขียนจนก่อเกิดเป็นตำราอันจะยังประโยชน์ให้แก่ผู้อ่านทุกท่านเพื่อดำรงซึ่งความรู้เหล่านี้สืบต่อไป

ที่ปรึกษา

ดร. จริยา อู่ยยะเสถียร

Ph.D. (Applied Mathematics) University of Colorado at Denver

ผู้เขียน

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ไพศาล นาคมหาลาสินธุ์

Ph.D. (Physics) University of California at Los Angeles

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วิภาณ ลีวศิริติยกุล

Ph.D. (Mathematics) Cornell University

ISBN :974-93536-5-2

สงวนลิขสิทธิ์

จัดพิมพ์โดย มูลนิธิ สอวน.

พิมพ์ครั้งที่ 2 พ.ศ.2552 (2009)

ออกแบบปก หน้าที่รองปกและหน้านำบท

โดย ศาสตราจารย์ศักดิ์ ศิริพันธุ์

ศิลปกรรม: นายปรีชา นัตระกูล

พิมพ์ที่ บริษัทด้านสุทธาการพิมพ์ จำกัด

แยกสี เฟลท บริษัทอีเล็ฟเว่นคัลเลอร์ส จำกัด

บทที่ 1 การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่

1.1	หลักพื้นฐานการนับ	1
1.2	การเรียงสับเปลี่ยน	8
1.3	การเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม	16
1.4	การจัดหมู่	24
1.5	หลักหนึ่งต่อหนึ่งและหลักหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง	36
1.6	การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ที่มีของซ้ำ	42
1.7	การแจกของ	50
	แบบฝึกหัด เรื่องการเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่	61

บทที่ 2 สัมประสิทธิ์ทวินาม

2.1	ทฤษฎีบททวินาม	67
2.2	รูปสามเหลี่ยมปาสกาล	72
2.3	สัมประสิทธิ์อเนกนามและทฤษฎีบทอเนกนาม	77
2.4	ทฤษฎีบททวินามสำหรับเลขชี้กำลังใด ๆ	79
	แบบฝึกหัด เรื่องสัมประสิทธิ์ทวินาม	84

บทที่ 3 หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก

3.1	หลักการเบื้องต้น	91
3.2	ปัญหาเกี่ยวกับหลักการเพิ่มเข้าและตัดออก	99
	แบบฝึกหัด เรื่องหลักการเพิ่มเข้าและตัดออก	102

บทที่ 4 หลักรั้งนกพิราบ

4.1	หลักรั้งนกพิราบอย่างง่าย	107
4.2	หลักรั้งนกพิราบทั่วไป	112
	แบบฝึกหัด เรื่องหลักรั้งนกพิราบ	117

บทที่ 5 ฟังก์ชันก่อกำเนิด

5.1	ฟังก์ชันก่อกำเนิดสามัญ	123
5.2	ปัญหาเกี่ยวกับฟังก์ชันก่อกำเนิด	129
5.3	ฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียล	132
	แบบฝึกหัด เรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด	137

บทที่ 6 ความสัมพันธ์เวียนเกิด

6.1	ปัญหาความสัมพันธ์เวียนเกิด	141
6.2	สมการเวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์	148
6.3	สมการเวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์	154
6.3	ระบบสมการเวียนเกิด	159
	แบบฝึกหัด เรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด	164

บทที่ 7 เทคนิคเชิงการนับ

7.1	การนับสองทาง	167
7.2	ภาวะคู่หรือคี่	173
7.3	หลักค่าสุดขีด	179
7.4	ตัวเรียง	184

บรรณานุกรม	193
------------	-----

ดัชนี	194
-------	-----

บัญชีสัญลักษณ์	196
----------------	-----



*SCHOLA
STEGANOGRAPHICA
P. GASPAR SCHOTTI
SOC: IESU.*

*Combinatio
Tabellarum
Steganogra-
phicarum.*

*Sumptibus
Iohannis Andreæ Endteri,
et Wolfgangi Iunioris Hæred:
Anno M.DC.LXV.*

การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่

1.1 หลักพื้นฐานการนับ

ชีวิตประจำวันของเรามักเกี่ยวข้องกับการนับจำนวนเหตุการณ์ในลักษณะเช่น การเรียงสิ่งของให้มีรูปแบบตามต้องการ การแบ่งกลุ่มสิ่งของภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด หรือการแจกของภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด เป็นต้น เราอาจพบคำถามที่เกี่ยวข้องกับการนับดังตัวอย่างต่อไปนี้

“มีกี่วิธีในการจัดเด็กผู้ชาย 5 คนและเด็กผู้หญิง 3 คนเข้าแถว โดยไม่มีเด็กผู้หญิงยืนติดกัน”

“มีกี่วิธีในการแบ่งคน 10 คนเป็นสามกลุ่ม ที่มีจำนวนสมาชิกในกลุ่มเท่ากับ 4, 3 และ 2 ตามลำดับ และมีหนึ่งคนที่ไม่ได้จัดเข้ากลุ่ม”

คำถามสองคำถามข้างต้นเป็นตัวอย่างง่าย ๆ ของปัญหาการนับที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่เรียกว่า การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation) และ การจัดหมู่ (Combination) ก่อนที่จะศึกษาการเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ในหัวข้อต่อไป ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงหลักสำคัญสองข้อที่เป็นพื้นฐานในปัญหาการนับทุกปัญหาก่อน

หลักการบวก (The Addition Principle)

ให้ $k \geq 1$ ถ้ามีเหตุการณ์ $E_1, E_2, \dots, E_k$ ซึ่งไม่มีส่วนร่วมทุกคู่ โดย

เหตุการณ์ E_1 เกิดได้ n_1 วิธี

เหตุการณ์ E_2 เกิดได้ n_2 วิธี

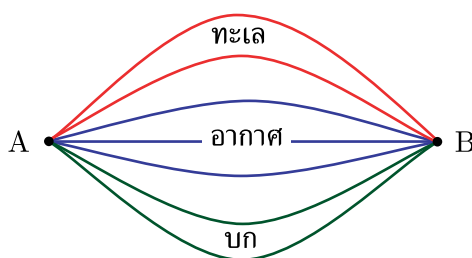
$\vdots$

เหตุการณ์ E_k เกิดได้ n_k วิธี

แล้วจำนวนวิธีที่จะเกิดอย่างน้อยหนึ่งเหตุการณ์จาก $E_1, E_2, \dots, E_k$ คือ $n_1 + n_2 + \dots + n_k$

ตัวอย่าง 1.1.1 ถ้าเราสามารถเดินทางจากเมือง A ไปเมือง B ได้ทั้งทางบก ทางทะเล และทางอากาศ โดยทางทะเลมี 2 เส้นทาง ทางบกมี 3 เส้นทาง และทางอากาศมี 2 เส้นทาง จงหาจำนวนเส้นทางทั้งหมดในการเดินทางจากเมือง A ไปเมือง B

วิธีทำ พิจารณาแผนภาพแสดงเส้นทางต่างๆ จากเมือง A ไปเมือง B



เนื่องจากการเดินทางทางบก ทางทะเล และทางอากาศจากเมือง A ไปเมือง B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่มีส่วนร่วมกัน โดยหลักการบวก จึงได้จำนวนเส้นทางจากเมือง A ไปเมือง B เท่ากับ $2 + 3 + 2 = 7$ ■

เราสามารถเขียนหลักการบวกโดยอาศัยความรู้เรื่องเซตได้ดังนี้

ให้ $k \geq 1$ ถ้ามี $A_1, A_2, \dots, A_k$ เป็นเซตจำกัดที่ไม่มีส่วนร่วมทุกคู่

กล่าวคือ $A_i \cap A_j = \emptyset$ สำหรับ $i, j = 1, 2, \dots, k$ และ $i \neq j$ แล้ว

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|$$

ตัวอย่าง 1.1.2 จงหาจำนวนคู่อันดับ (x, y) ซึ่ง x และ y เป็นจำนวนเต็มและ $x^2 + y^2 \leq 5$

วิธีทำ เราสามารถแบ่งปัญหานี้เป็น 6 กรณีที่ไม่มีส่วนร่วมกันได้คือ กรณี $x^2 + y^2 = 0, 1, \dots, 5$ นั่นคือ สำหรับแต่ละ $i = 0, 1, \dots, 5$ ให้

$$S_i = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = i\}$$

สามารถตรวจสอบได้ว่า

$$S_0 = \{(0, 0)\}$$

$$S_1 = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$$

$$S_2 = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

$$S_3 = \emptyset$$

$$S_4 = \{(0, 2), (0, -2), (2, 0), (-2, 0)\}$$

$$S_5 = \{(1, 2), (1, -2), (2, 1), (2, -1), (-1, 2), (-1, -2), (-2, 1), (-2, -1)\}$$

ดังนั้น โดยหลักการบวก จึงได้จำนวนคู่อันดับ (x, y) ทั้งหมดเท่ากับ $1 + 4 + 4 + 0 + 4 + 8 = 21$ ■

หลักการคูณ (The Multiplication Principle)

ถ้าสามารถแยกเหตุการณ์ E เป็น r เหตุการณ์ย่อย $E_1, E_2, \dots, E_r$ ที่มีลำดับ โดย

เหตุการณ์ E_1 เกิดได้ n_1 วิธี

เหตุการณ์ E_2 เกิดได้ n_2 วิธี

$\vdots$

เหตุการณ์ E_r เกิดได้ n_r วิธี

แล้วจำนวนวิธีที่จะเกิดเหตุการณ์ E คือ $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$

ตัวอย่าง 1.1.3 ในการเดินทางจากเมือง A ไปเมือง D จะต้องผ่านเมือง B และเมือง C ถ้าทราบว่า มี 2 เส้นทางจากเมือง A ไปเมือง B มี 4 เส้นทางจากเมือง B ไปเมือง C และมี 3 เส้นทางจากเมือง C ไปเมือง D จงหาจำนวนเส้นทางในการเดินทางจากเมือง A ไปเมือง D



วิธีทำ เนื่องจากแต่ละเส้นทางจาก A ไป D ประกอบด้วย 3 เส้นทางย่อยคือ

เส้นทางจาก A ไป B ตามด้วยเส้นทางจาก B ไป C และท้ายสุดจึงเป็นเส้นทางจาก C ไป D ตามลำดับ

ดังนั้น โดยหลักการคูณ จำนวนเส้นทางทั้งหมดจาก A ไป D เท่ากับ $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ ■

เราสามารถเขียนหลักการคูณโดยอาศัยความรู้เรื่องเซตได้ดังนี้

ให้ $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r = \{(a_1, a_2, \dots, a_r) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, r\}$ เป็นผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตจำกัด $A_1, A_2, \dots, A_r$ แล้ว

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_r|$$

ให้ $n, k \in \mathbb{N}$ จำนวนที่เขียนในรูป $a_1 a_2 \dots a_n$ โดยที่ $a_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$ เรียกว่า เลขฐาน k ที่มี n หลัก จำนวนหลักก็คือจำนวนเลขโดดนั่นเอง บางครั้ง อาจเขียนเลขฐาน k ที่มี n หลักในรูป $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

เลขฐานสองที่มี 3 หลักมีทั้งหมด $2^3 = 8$ ตัว ได้แก่ $\{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}$ ถ้ากำหนดจำนวนนับ n และ k ใดๆ เราอาจตั้งคำถามว่ามีเลขฐาน k ที่มี n หลักได้ทั้งหมดกี่ตัว ซึ่งจะแสดงให้เห็นในตัวอย่างต่อไป

ตัวอย่าง 1.1.4 จงหาว่ามีเลขฐาน k ที่มี n หลักทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ ในการสร้างเลขฐาน k ในรูป $a_1a_2\cdots a_n$ ที่มี n หลัก ทำได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

เลือก a_1 จากเซต $\{0, 1, \dots, k-1\}$ ทำได้ k วิธี

เลือก a_2 จากเซต $\{0, 1, \dots, k-1\}$ ทำได้ k วิธี

$\vdots$

เลือก a_n จากเซต $\{0, 1, \dots, k-1\}$ ทำได้ k วิธี

ดังนั้น โดยหลักการคูณ จำนวนเลขฐาน k ที่มีความยาว n ทั้งหมดคือ k^n ■

ตัวอย่าง 1.1.5 จงหาจำนวนตัวหารบวกทั้งหมดของ 600

วิธีทำ แยกตัวประกอบของ 600 ได้ดังนี้

$$600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$$

จำนวนเต็มบวก m จะเป็นตัวหารของ 600 ก็ต่อเมื่อ $m = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ โดยที่ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวก และ

$$0 \leq a \leq 3, 0 \leq b \leq 1 \text{ และ } 0 \leq c \leq 2$$

ดังนั้น จำนวนวิธีในการสร้างชุดของตัวเลข (a, b, c)

โดยที่ $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1\}$ และ $c \in \{0, 1, 2\}$ เท่ากับ $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ ■

ข้อสังเกต โดยอาศัยหลักการคูณ เราสามารถสรุปกรณีทั่วไปได้ดังนี้

ถ้าจำนวนนับ n เขียนในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะได้เป็น

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

โดยที่ p_i เป็นจำนวนเฉพาะที่ต่างกันและ α_i เป็นจำนวนเต็มบวก

แล้วจำนวนตัวหารบวกทั้งหมดของ n เท่ากับ

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

ในตัวอย่างข้างต้น เราได้เห็นการใช้หลักการบวกและหลักการคูณเพียงอย่างเดียวอย่างหนึ่งการใช้การแก้ปัญหาคำนวณบางปัญหา แต่บ่อยครั้งที่การแก้ปัญหานั้นซับซ้อนต้องประยุกต์ใช้หลักทั้งสองร่วมกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.1.6 ให้ $A = \{1, 2, \dots, 100\}$ และให้ $S = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in A, a < b \text{ และ } a < c\}$

จงหาจำนวนสมาชิกของ S

วิธีทำ ปัญหานี้แบ่งย่อยเป็นกรณีที่ไม่มีส่วนร่วมกันได้โดยการพิจารณากรณีเมื่อ $a = 1, 2, \dots, 99$

สำหรับแต่ละ $a \in \{1, 2, \dots, 99\}$ เราเลือก b ได้ $100 - a$ วิธี และเลือก c ได้ $100 - a$ วิธี เช่นกัน

โดยหลักการคูณ จึงเลือก b และ c ตามเงื่อนไขที่ต้องการได้ $(100 - a)^2$ วิธี

เนื่องจาก a มีค่าได้ตั้งแต่ 1 จนถึง 99 โดยหลักการบวก จึงได้

$$|S| = 99^2 + 98^2 + \dots + 1^2 = \frac{1}{6} \cdot 99 \cdot 100 \cdot 199 = 328350 \quad \blacksquare$$

จะเห็นว่าหลักการบวกและหลักการคูณนั้นเป็นสิ่งที่เห็นได้ชัดจนมักจะถูกละเลย ในความเป็นจริงแล้วหลักทั้งสองเป็นหลักพื้นฐานสำคัญในการแก้ปัญหาคำนวณ ดังจะเห็นต่อไปว่า ไม่ว่าจะเป็นปัญหาคำนวณที่ซับซ้อนเพียงใด จะแก้ได้ด้วยการแยกเป็นปัญหาย่อยที่ง่ายกว่าเสมอ และสามารถรวมจำนวนวิธีจากปัญหาย่อยเหล่านี้เข้าด้วยกันโดยหลักการบวกหรือหลักการคูณ

แบบฝึกหัด 1.1

1. สนามกีฬามีประตูเข้าออก 6 ประตู ชายคนหนึ่งจะเลือกเข้าออกจากสนามกีฬาได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้า
 - 1.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 1.2 เข้าประตูใดจะออกประตูนั้นไม่ได้
 - 1.3 เข้าประตูใดต้องออกประตูนั้น
2. จากข้อที่แล้ว ถ้ามีชาย 2 คน จะเข้าออกสนามกีฬาได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้า
 - 2.1 แต่ละคนเมื่อเข้าประตูใด แล้วจะออกประตูเดิมไม่ได้
 - 2.2 แต่ละคน เมื่อเข้าประตูใด แล้วจะต้องออกประตูนั้น แต่ทั้ง 2 คน จะใช้วิธีเหมือนกันไม่ได้
 - 2.3 แต่ละคนต้องเข้าออกด้วยวิธีที่แตกต่างกัน
3. นาย ก, ข และ ค ต้องการขึ้นลิฟท์ที่มีทั้งหมด 3 ตัว มีกี่วิธีที่นาย ก และนาย ข ขึ้นด้วยกัน แต่นาย ค ขึ้นคนเดียว
4. มีตู้ไปรษณีย์ 5 ตู้ มีจดหมาย 4 ฉบับ จะมีกี่วิธีในการทิ้งจดหมายใส่ตู้ ถ้า
 - 4.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 4.2 ห้ามทิ้งตู้เดียวกันทั้ง 4 ฉบับ
 - 4.3 ไม่มีฉบับใดอยู่ตู้เดียวกัน
5. มีกิ้งไม้ 3 กิ่ง มีนก 6 ตัว นกจะมีวิธีการจับกิ่งไม้ได้ทั้งหมดกี่วิธี
6. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอกลีต่าง ๆ กัน อยู่ 6 ลูก ต้องการหยิบออกมา 3 ลูก โดยหยิบทีละลูก จะทำได้กี่วิธี ถ้า
 - 6.1 ใส่คืนก่อนหยิบลูกต่อไป
 - 6.2 ไม่ใส่คืนก่อนหยิบลูกต่อไป
7. มีหนังสือ 10 เล่มที่ต่างกัน นำไปแจกให้เด็ก 4 คน ได้กี่วิธี
8. ทอดลูกเต๋าที่แตกต่างกัน 2 ลูก จงหาจำนวนวิธีที่จะ
 - 8.1 ขึ้นหน้าต่างกัน
 - 8.2 ขึ้นหน้า 6 อย่างน้อย 1 ลูก
9. หยิบไพ่ 2 ใบ จากสำรับหนึ่ง ซึ่งมี 52 ใบ โดยหยิบทีละใบแบบไม่ใส่คืน จงหาจำนวนวิธีที่
 - 9.1 ใบแรกเป็น A และใบที่ 2 ไม่ใช่ Q
 - 9.2 ใบแรกเป็นโพดำ และใบที่ 2 ไม่ใช่ Q

10. ต้องการสร้างจำนวนเต็มบวกที่มี 3 หลัก จากตัวเลข 0 – 9 และต้องเป็นจำนวนคี่ จะสร้างได้กี่จำนวน ถ้า
 - 10.1 ใช้เลขซ้ำกันได้
 - 10.2 ใช้เลขซ้ำกันไม่ได้
11. ต้องการสร้างจำนวนเต็มบวกที่มี 3 หลัก จากตัวเลข 0 – 9 และเป็นจำนวนคู่ จะสร้างได้กี่จำนวน ถ้า
 - 11.1 ใช้เลขซ้ำกันได้
 - 11.2 ใช้เลขซ้ำกันไม่ได้
12. จำนวนคู่ที่มีค่าอยู่ระหว่าง 3,000 – 7,000 และเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน มีทั้งหมดกี่จำนวน
13. จำนวนเต็มที่มีค่าระหว่าง 6,500 ถึง 9,999 ที่ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกันมีทั้งหมดกี่จำนวน
14. จำนวนเต็มบวกที่มี 3 หลัก และมีเลข 5 ปรากฏอย่างน้อยหนึ่งตัว มีทั้งหมดกี่จำนวน
15. สร้างจำนวนเต็มบวกที่มี 5 หลัก จากเลข 0 – 9 โดยไม่ใช่เลขซ้ำกัน และสลับเลขคู่กับเลขคี่ได้กี่จำนวน
16. ต้องการสร้างจำนวนเต็มบวกที่มี 4 หลัก จากตัวเลข 0 – 9 ให้แต่ละหลักไม่ซ้ำกัน และหารด้วย 2 หรือ 5 ลงตัว จะสร้างได้กี่จำนวน และมีกี่จำนวนซึ่งมีค่าไม่เกิน 6,500
17. ต้องการสร้างจำนวนเต็มบวกที่มี 4 หลัก จากตัวเลข 0 – 9 โดยให้มีค่าอยู่ระหว่าง 4,500 และ 9,500 จะสร้างไว้กี่จำนวน ถ้า
 - 17.1 เลขแต่ละหลักซ้ำกันได้
 - 17.2 เลขแต่ละหลักซ้ำกันไม่ได้
18. ต้องการสร้างเลข 3 หลัก จากเลข 0 – 9 โดยให้แต่ละหลักซ้ำกันได้ และจำนวนนั้นหารด้วย 3 ลงตัว จะสร้างได้กี่จำนวน
19. จากเลข 1 – 1000 มีกี่จำนวน ซึ่งตัวเลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกันเลย
20. ต้องการสร้างจำนวนคี่ที่มีค่าน้อยกว่า 3,500 จะสร้างได้ทั้งหมดกี่จำนวน โดยที่เลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน
21. ต้องการสร้างเลข 3 หลัก จากเลข 0 – 9 โดยให้แต่ละหลักไม่ซ้ำกัน และจำนวนนั้นหารด้วย 3 ลงตัว จะสร้างได้กี่จำนวน
22. ให้ $X = \{1, 2, \dots, 100\}$ และให้ $S = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in X, a < b \text{ และ } a < c\}$ จงหาจำนวนสมาชิกของเซต S

1.2 การเรียงสับเปลี่ยน

ในตอนต้นของหัวข้อที่แล้ว เราได้กล่าวถึงปัญหาต่อไปนี้ “มีวิธีในการจัดเด็กผู้ชาย 5 คนและเด็กผู้หญิง 3 คนเข้าแถว โดยไม่มีเด็กผู้หญิงยืนติดกัน” ซึ่งเป็นตัวอย่างของปัญหาของการเรียงของที่แตกต่างกันภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดซึ่งรู้จักกันในชื่อ การเรียงสับเปลี่ยน(permutation)

ให้ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ เป็นเซตของของที่แตกต่างกัน n สิ่ง และให้ r เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $0 \leq r \leq n$ การเรียงสับเปลี่ยนที่ละ r สิ่งของเซต A คือการนำของ r สิ่งจากเซต A มาเรียงลำดับ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.2.1 ให้ $A = \{a, b, c, d\}$ จงหาการเรียงสับเปลี่ยนที่ละ 3 สิ่งของเซต A

วิธีทำ การเรียงสับเปลี่ยนที่ละ 3 สิ่งของเซต A มีดังนี้

$abc,$	$acb,$	$bac,$	$bca,$	$cab,$	$cba,$
$abd,$	$adb,$	$bad,$	$bda,$	$dab,$	$dba,$
$acd,$	$adc,$	$cad,$	$cda,$	$dac,$	$dca,$
$bcd,$	$bdc,$	$cbd,$	$cdb,$	$dbc,$	$dcb,$

จะเห็นว่าการเรียงสับเปลี่ยนที่แตกต่างกัน 24 วิธี

ให้ P_r^n แทนจำนวนวิธีที่แตกต่างกันในการเรียงสับเปลี่ยนที่ละ r สิ่งจาก n สิ่ง จากตัวอย่าง 1.2.1 จะเห็นว่า $P_3^4 = 24$ ต่อไปจะหาสูตรสำหรับ P_r^n โดยอาศัยหลักการคูณ ดังนี้



การเรียงสับเปลี่ยนของ r สิ่งจากเซต A ทำได้ใน r ขั้นตอน ดังนี้

- ขั้นที่ 1 เลือกของหนึ่งชิ้นจากเซต A วางลงในตำแหน่งที่ 1
- ขั้นที่ 2 เลือกของหนึ่งชิ้นจากที่เหลือจากเซต A วางลงในตำแหน่งที่ 2
- ⋮
- ขั้นที่ $r-1$ เลือกของหนึ่งชิ้นจากที่เหลือจากเซต A วางลงในตำแหน่งที่ $r-1$
- ขั้นที่ r เลือกของหนึ่งชิ้นจากที่เหลือจากเซต A วางลงในตำแหน่งที่ r

ในขั้นที่ 1 เลือกได้ n วิธี, ขั้นที่ 2 เลือกได้ $n-1$ วิธี, ..., ขั้นที่ r เลือกได้ $n-r+1$ วิธี

ดังนั้น โดยหลักการคูณ จึงได้จำนวนวิธีที่แตกต่างกันในการเรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่งจาก n สิ่ง เท่ากับ

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

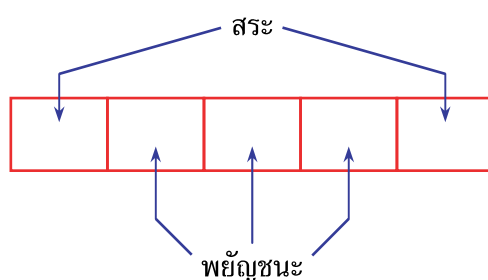
โดยอาศัยสัญลักษณ์ แฟกทอเรียล(factorial) คือ $n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$ และ $0! = 1$ จะได้

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ข้อสังเกต $P_0^n = 1$ และจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งที่แตกต่างกันคือ $P_n^n = n!$

ตัวอย่าง 1.2.2 ให้ $E = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$ เป็นเซตของตัวอักษรภาษาอังกฤษทั้ง 26 ตัว จงหาจำนวนคำทั้งหมดที่ประกอบด้วยตัวอักษร 5 ตัวจากเซต E โดยที่ตัวอักษรตัวแรกและตัวสุดท้ายเป็นสระที่แตกต่างกัน และตัวอักษรที่เหลืออีกสามตัวเป็นพยัญชนะที่แตกต่างกัน

วิธีทำ พิจารณาการสร้างคำที่ประกอบด้วยตัวอักษร 5 ตัวตามเงื่อนไขที่กำหนด



มีสระ 5 ตัวและพยัญชนะ 21 ตัวในเซต E เราสร้างคำตามต้องการได้โดยขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 เลือกตัวอักษร 2 ตัวจากเซตของสระคือ $\{a, e, i, o, u\}$ มาวางในตำแหน่งหัวและท้าย

ขั้นที่ 2 เลือกตัวอักษร 3 ตัวจากเซตของพยัญชนะทั้ง 21 ตัว มาวางในตำแหน่งที่ 2, 3 และ 4

ในขั้นที่ 1 ทำได้ P_2^5 วิธี และในขั้นที่ 2 ทำได้ P_3^{21} วิธี

โดยหลักการคูณ จึงสร้างคำได้ทั้งหมด $P_2^5 \cdot P_3^{21} = (5 \cdot 4) \cdot (21 \cdot 20 \cdot 19) = 159600$ คำ

■

ตัวอย่าง 1.2.3 มีชาย 7 คนและหญิง 3 คน จงหาจำนวนวิธีในการจัดแถวคนทั้งหมดตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1. หญิงทั้ง 3 คนยืนติดกัน
2. หญิงทั้ง 3 คนยืนแยกกันหมดและผู้ที่ยืนในตำแหน่งหัวและท้ายแถวเป็นผู้ชาย

วิธีทำ

1. เนื่องจากผู้หญิงต้องยืนติดกันหมด จึงถือเสมือนหนึ่งว่าผู้หญิงทั้ง 3 คนเป็นกลุ่มเดียว

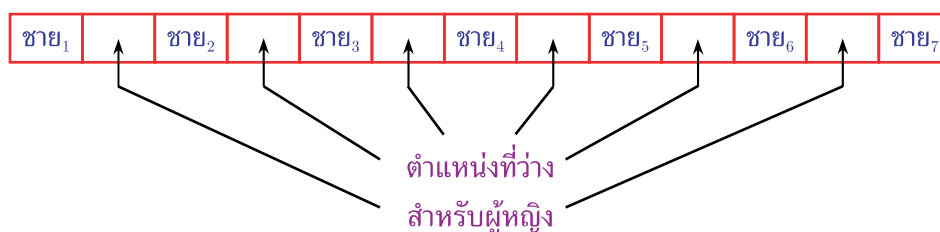
จำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนชาย 7 คนและผู้หญิงอีก 1 กลุ่ม คือ $(7 + 1)!$

เนื่องจากผู้หญิงสามารถเปลี่ยนตำแหน่งกันภายในกลุ่มได้ $3!$ วิธี

จึงได้จำนวนวิธีจัดแถวตามต้องการ เท่ากับ $8!3! = 241920$ วิธี

2. ขั้นแรก เรียงสับเปลี่ยนผู้ชายทั้ง 7 คนก่อน ซึ่งทำได้ $7!$ วิธี

ในแต่ละวิธีของการเรียงสับเปลี่ยนผู้ชาย จะมี 6 ตำแหน่งให้ผู้หญิง 3 คนเข้าไปแทรกได้



ผู้หญิงคนที่หนึ่งเลือกได้ 6 ตำแหน่ง ผู้หญิงคนที่สองเลือกได้ 5 ตำแหน่ง

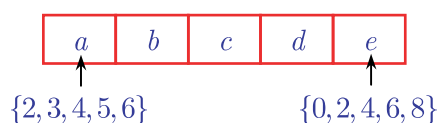
และผู้หญิงคนที่ 3 เลือกได้ 4 ตำแหน่ง

โดยหลักการคูณ จึงมีวิธีการจัดแถวเท่ากับ $7!(6 \cdot 5 \cdot 4) = 604800$ วิธี

ตัวอย่าง 1.2.4 จงหาว่ามีจำนวนเต็มคู่ที่จำนวนที่มีค่าอยู่ระหว่าง 20000 และ 70000 และไม่มีเลขโดดซ้ำกัน

วิธีทำ จำนวนเต็มคู่ที่อยู่ระหว่าง 20000 และ 70000 ต้องเป็นเลข 5 หลัก

จึงสมมติให้จำนวนเต็มคู่ที่มีสมบัติตามต้องการตัวหนึ่งคือ $abcde$



จะเห็นว่า $a \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ และ $e \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$

เนื่องจาก $\{2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{2, 4, 6\}$ จึงแบ่งปัญหาออกเป็นสองกรณีที่ไม่มีส่วนร่วมกัน ดังนี้

กรณีที่ 1: $a \in \{2, 4, 6\}$

เลือก a ได้ 3 วิธี ทำให้เลือก e ได้เพียง $5 - 1 = 4$ วิธี

เหลือเลขโดดอีก $10 - 2 = 8$ ตัว ซึ่งเลือกมา 3 ตัวเรียงเป็น bcd ได้ P_3^8 วิธี

โดยหลักการคูณ จึงมีจำนวนเต็มคู่ในกรณีนี้เท่ากับ $3 \cdot 4 \cdot P_3^8 = 4032$ จำนวน

กรณีที่ 2: $a \in \{3, 5\}$

เลือก a ได้ 2 วิธี และเลือก e ได้ 5 วิธี

เหลือเลขโดดอีก $10 - 2 = 8$ ตัว ซึ่งเลือกมา 3 ตัวเรียงเป็น bcd ได้ P_3^8 วิธี

โดยหลักการคูณ จึงมีจำนวนเต็มคู่ในกรณีนี้เท่ากับ $2 \cdot 5 \cdot P_3^8 = 3360$ จำนวน

โดยหลักการบวก จึงมีจำนวนเต็มคู่ตามต้องการเท่ากับ $4032 + 3360 = 7392$ จำนวน ■

ตัวอย่าง 1.2.5 ให้ S เป็นเซตของจำนวนนับที่เลขโดดเป็นสมาชิกในเซต $\{1, 3, 5, 7\}$ และไม่มีเลขในหลักใดซ้ำกัน

1. จงหา $|S|$

2. จงหา $\sum_{n \in S} n$

วิธีทำ

1. แบ่งเซต S เป็น 4 เซตย่อยที่ไม่มีส่วนร่วมกัน แต่ละเซตประกอบด้วย

เลข 1 หลัก ได้แก่ 1, 3, 5, 7

เลข 2 หลัก ได้แก่ 13, 15, ...

เลข 3 หลัก ได้แก่ 135, 137, ...

เลข 4 หลัก ได้แก่ 1357, 1375, ...

และหา $|S|$ ได้โดยหลักการบวก

ดังนั้น สำหรับ $i = 1, 2, 3, 4$ พิจารณาเซต S_i ที่ประกอบด้วยเลข i หลักที่มีเลขโดดเป็นสมาชิกในเซต $\{1, 3, 5, 7\}$ และไม่มีเลขในหลักใดซ้ำกัน

จึงได้ $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ และโดยหลักการบวก

$$|S| = \sum_{i=1}^4 |S_i| = P_1^4 + P_2^4 + P_3^4 + P_4^4 = 4 + 12 + 24 + 24 = 64$$

2. ให้ $\alpha = \sum_{n \in S} n$ เห็นได้ว่าเป็นการยากที่จะหาค่า α โดยการหาผลบวกของสมาชิกทั้ง 64 ตัวในเซต S ตรงๆ จึงจะหาผลบวกของเลขโดดที่สะท้อนแทน นั่นคือ

ให้ α_1 เป็นผลบวกของเลขหลักหน่วยของสมาชิกทุกตัวในเซต S

ให้ α_2 เป็นผลบวกของเลขหลักสิบของสมาชิกทุกตัวในเซต S

ให้ α_3 เป็นผลบวกของเลขหลักร้อยของสมาชิกทุกตัวในเซต S

ให้ α_4 เป็นผลบวกของเลขหลักพันของสมาชิกทุกตัวในเซต S

และหาค่า α ได้จาก

$$\alpha = \alpha_1 + 10\alpha_2 + 100\alpha_3 + 1000\alpha_4$$

ค่า α_1 หาได้จากผลรวมของเลขหลักหน่วยของสมาชิกทุกตัวในเซต S_1, S_2, S_3, S_4

ในเซต S_1 ผลรวมของเลขหลักหน่วยคือ $1 + 3 + 5 + 7$

ในเซต S_2 สำหรับแต่ละเลขหลักหน่วย 1, 3, 5, 7 จะมีสมาชิกของ S อยู่ P_1^3 ตัวที่ลงท้ายด้วยเลขนั้น ผลรวมของเลขหลักหน่วยของสมาชิกใน S_2 คือ $P_1^3(1 + 3 + 5 + 7)$

ในเซต S_3 สำหรับแต่ละเลขหลักหน่วย 1, 3, 5, 7 จะมีสมาชิกของ S อยู่ P_2^3 ตัวที่ลงท้ายด้วยเลขนั้น ผลรวมของเลขหลักหน่วยของสมาชิกใน S_3 คือ $P_2^3(1 + 3 + 5 + 7)$

ในเซต S_4 สำหรับแต่ละเลขหลักหน่วย 1, 3, 5, 7 จะมีสมาชิกของ S อยู่ P_3^3 ตัวที่ลงท้ายด้วยเลขนั้น ผลรวมของเลขหลักหน่วยของสมาชิกใน S_4 คือ $P_3^3(1 + 3 + 5 + 7)$

โดยหลักการบวก จึงได้

$$\alpha_1 = (1 + P_1^3 + P_2^3 + P_3^3)(1 + 3 + 5 + 7) = 256$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\alpha_2 = (P_1^3 + P_2^3 + P_3^3)(1 + 3 + 5 + 7) = 240$$

$$\alpha_3 = (P_2^3 + P_3^3)(1 + 3 + 5 + 7) = 192$$

$$\alpha_4 = (P_3^3)(1 + 3 + 5 + 7) = 96$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + 10\alpha_2 + 100\alpha_3 + 1000\alpha_4 \\ &= 256 + 2400 + 19200 + 96000 \\ &= 117856 \end{aligned}$$

■

แบบฝึกหัด 1.2

1. เลือกตัวอักษร 2 ตัว จากคำว่า NEWS มาเรียงเป็นคำใหม่ โดยไม่คำนึงถึงความหมาย จะทำได้กี่วิธี และจงเขียนวิธีทั้งหมดที่เป็นไปได้
2. ร้านค้าแห่งหนึ่งขายสินค้า 5 ชนิด ถ้าตู้โชว์หน้าร้านสามารถแสดงสินค้าได้เพียง 3 ชนิด จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่ร้านค้าแห่งนั้นจะแสดงสินค้าได้
3. จงหาจำนวนวิธีในการสลับตัวอักษรในคำว่า HYPERBOLA โดยให้ขึ้นต้นด้วยสระ และลงท้ายด้วยพยัญชนะ
4. มีตำแหน่งว่างอยู่ 5 ตำแหน่งต่างกัน เป็นตำแหน่งเฉพาะชาย 3 ตำแหน่ง เป็นตำแหน่งเฉพาะหญิง 2 ตำแหน่ง มีผู้สมัครงาน 10 คน เป็นชาย 6 คน หญิง 4 คน จะมีกี่วิธีในการเลือกคนเข้าทำงานทั้ง 5 ตำแหน่งนี้
5. จากข้อที่แล้ว ถ้าเป็นตำแหน่งเฉพาะชาย 2 ตำแหน่ง เป็นตำแหน่งเฉพาะหญิง 1 ตำแหน่ง อีก 2 ตำแหน่งไม่จำกัดเพศ จะจัดคนเข้าทำงานได้กี่วิธี
6. มีธง 5 ผืน ที่มีสีแตกต่างกัน นำมาสร้างสัญญาณโดยการยกธงอย่างน้อย 1 ผืน จะได้สัญญาณที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่สัญญาณ
7. จากตัวเลข 1, 2, 3, 4 จะสร้างจำนวนเต็ม 4 หลักได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่จำนวน โดยที่เลขแต่ละหลักต้องไม่ซ้ำกัน และเมื่อนำจำนวนทั้งหมดที่สร้างได้มาบวกกัน จะได้ผลลัพธ์เท่าไร
8. เลือกตัวอักษร 4 ตัว จากคำว่า EQUATION มาสร้างเป็นคำใหม่โดยไม่คำนึงถึงความหมายได้กี่วิธี เมื่อต้องการให้
 - 8.1 ขึ้นต้นและลงท้ายด้วยสระ
 - 8.2 ประกอบด้วยสระเท่านั้น
 - 8.3 ประกอบด้วยพยัญชนะทั้ง 3 ตัว
 - 8.4 I และ U ต้องไม่ปรากฏพร้อมกัน
9. มีพยัญชนะภาษาอังกฤษตัวใหญ่ไม่ซ้ำกัน 7 ตัว อักษรภาษาอังกฤษตัวเล็กที่เป็นสระไม่ซ้ำกัน 3 ตัว และเป็นพยัญชนะไม่ซ้ำกัน 5 ตัว ถ้าต้องการสร้างคำที่ประกอบด้วยตัวอักษรที่ไม่ซ้ำกัน 4 ตัว โดยต้องขึ้นต้นด้วยอักษรตัวใหญ่ และที่เหลือเป็นอักษรตัวเล็ก และมีสระอย่างน้อย 1 ตัว จะสร้างได้ทั้งหมดกี่คำ

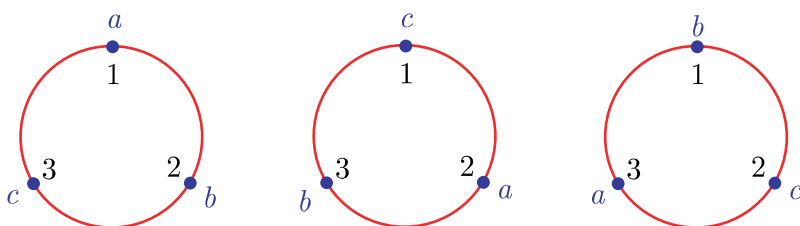
10. ครอบครัวหนึ่งประกอบด้วย พ่อ แม่ และลูก 3 คน ต้องการเข้าแถวหน้ากระดานเพื่อถ่ายรูป จะมีวิธีการยืนที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี เมื่อต้องการให้
 - 10.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 10.2 พ่อและแม่ยืนติดกัน
 - 10.3 พ่อและแม่แยกกัน
 - 10.4 ลูกทั้ง 3 คน ยืนแยกกันหมด
11. ต้องการสลับอักษรในคำว่า EQUATION โดยไม่ให้พยัญชนะอยู่ติดกัน จะสลับได้กี่วิธี
12. ชั้นวางหนังสือชั้นหนึ่งประกอบด้วย หนังสือคณิตศาสตร์ 3 เล่ม ฟิสิกส์ 3 เล่ม และเคมี 2 เล่ม โดยที่หนังสือทุกเล่มแตกต่างกันหมด ต้องการเรียงหนังสือทั้งหมดบนชั้น จะทำได้กี่วิธี ถ้า
 - 12.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 12.2 หนังสือคณิตศาสตร์ต้องอยู่ติดกันหมด
 - 12.3 หนังสือคณิตศาสตร์ต้องอยู่แยกกันหมด
 - 12.4 วิชาเดียวกันต้องอยู่ติดกัน
 - 12.5 หนังสือคณิตศาสตร์ต้องอยู่ติดกันหมด และหนังสือฟิสิกส์อยู่แยกกันหมด
13. ม้านั่งวางเรียงกันเป็นแถวยาว 9 ตัว ถ้าต้องการให้ชาย 4 คน ไปนั่งบนม้านั่งเหล่านี้ จะมีวิธีนั่งที่แตกต่างกันกี่วิธี ถ้า
 - 13.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 13.2 ชายทั้งสี่นั่งติดกัน
 - 13.3 ชายทั้งสี่นั่งแยกกันหมด
14. ต้องการสลับอักษรในคำว่า MAGNITUDE โดยต้องการให้มีอักษร 3 ตัว คั่นระหว่าง G กับ T จะสลับได้ทั้งหมดกี่วิธี
15. มีรถสีแดง 3 คัน สีฟ้า 2 คัน และสีขาว 2 คัน โดยที่รถทุกคันแตกต่างกันหมด ถ้าต้องการจอดรถทั้งหมดเรียงเป็นแถวยาว จะมีวิธีการจอดกี่วิธี ถ้าต้องการให้
 - 15.1 รถคันที่อยู่หัวและท้ายของแถวเป็นสีเดียวกัน
 - 15.2 รถคันที่อยู่หัวและท้ายของแถวเป็นคนละสีกัน
16. มีสามภรรยา 4 คู่ เข้าไปนั่งชมภาพยนตร์บนเก้าอี้แถวหนึ่ง ซึ่งมี 9 ตัว โดยที่สามภรรยาทุกคู่ต้องนั่งติดกันเสมอ จะมีวิธีเลือกนั่งได้ทั้งหมดกี่วิธี
17. โต๊ะยาวตัวหนึ่งมีเก้าอี้วางอยู่ 2 ข้าง ๆ ละ 4 ตัว คน 8 คน นั่งรับประทานอาหารที่โต๊ะนี้ได้กี่วิธี ถ้ามีอยู่ 2 คน ไม่ยอมนั่งติดกัน
18. จากข้อที่แล้ว ถ้า 2 คนนั้นไม่ยอมนั่งติดกันและไม่ยอมนั่งตรงข้ามกัน จะจัดได้กี่วิธี

19. ชาย 6 คน หญิง 6 คน ยืนเรียงเป็นแถวตรงได้กี่วิธี ถ้า
 - 19.1 ชายและหญิงยืนสลับกันคนต่อคน
 - 19.2 ชายและหญิงยืนสลับกันทีละ 2 คน
 - 19.3 ชายและหญิงยืนสลับกันทีละ 3 คน
 - 19.4 ชายหญิงคู่หนึ่งต้องยืนติดกันเสมอ
 - 19.5 ชายหญิงคู่หนึ่งต้องยืนแยกกันเสมอ
 - 19.6 ชายยืนติดกันหมด
 - 19.7 หญิงยืนแยกกันหมด
 - 19.8 หญิงไม่ยืนติดกันหมด
 - 19.9 ชายยืนติดกันหมด และหญิงยืนติดกันหมด
 - 19.10 มีชาย 3 คน ต้องยืนติดกันเสมอ
 - 19.11 มีชาย 3 คน ต้องยืนแยกกันเสมอ
 - 19.12 มีชายคนหนึ่งไม่ยอมยืนติดกับชายคนอื่น ๆ
 - 19.13 ชายยืนแยกกันหมด และมีหญิงคู่หนึ่งยืนติดกันเสมอ
 - 19.14 ชายยืนแยกกันหมด และมีชายหญิงคู่หนึ่งยืนติดกันเสมอ
 - 19.15 ชายและหญิงยืนสลับกันคนต่อคน และชายหญิงคู่หนึ่งยืนติดกันเสมอ
 - 19.16 ชายและหญิงยืนสลับกันทีละ 2 คน และชายหญิงคู่หนึ่งยืนติดกันเสมอ
 - 19.17 ชายและหญิงยืนสลับกันคนต่อคน และชายหญิงคู่หนึ่งยืนแยกกันเสมอ
 - 19.18 คนที่ยืนหัวแถวและท้ายแถวต้องเป็นเพศเดียวกัน

1.3 การเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม

การเรียงสับเปลี่ยนในหัวข้อที่แล้วเป็นการเรียงสิ่งของเป็นเส้นตรง ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของเป็นวงปิด ซึ่งเรียกว่า การเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม(circular permutation)

พิจารณาปัญหาการเรียงของ 3 ชิ้นที่ต่างกัน คือ a, b, c ลงในตำแหน่ง 3 ตำแหน่งบนเส้นรอบวงของวงกลม ให้ตำแหน่งทั้งสามมีหมายเลข 1, 2 และ 3 กำกับอยู่ ดังแสดงในรูป



จะเห็นว่าการเรียง a, b, c ในรูปข้างบนก็คือการเรียงสับเปลี่ยน

$$abc, cab, bca$$

ตามลำดับ ในกรณีเช่นนี้ การเรียงสับเปลี่ยนของเป็นวงกลมไม่มีอะไรแตกต่างจากการเรียงสับเปลี่ยนของเป็นเส้นตรง แต่การเรียงสับเปลี่ยนของเป็นวงกลมจะน่าสนใจในกรณีที่ไม่มีตัวเลขกำกับแต่ละตำแหน่งบนวงกลม นั่นคือ มีเพียงตำแหน่งสัมพัทธ์บนวงกลมเท่านั้นที่จะแยกแยะแต่ละตำแหน่งออกจากตำแหน่งอื่นๆ จึงเห็นได้จากรูปข้างบนว่าเมื่อไม่มีหมายเลขกำกับตำแหน่ง เราสามารถหมุนการเรียงสับเปลี่ยนวิธีใดวิธีหนึ่ง ให้ตรงกับอีก 2 วิธีที่เหลือได้ จึงกล่าวว่าการเรียงสับเปลี่ยนทั้ง 3 วิธีนั้นเหมือนกัน ในกรณีทั่วไป เมื่อเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของกลุ่มหนึ่งเป็นวงกลม เราจะกล่าวว่าการเรียงสับเปลี่ยนสองวิธีเหมือนกันเมื่อสามารถหมุนวิธีหนึ่งไปเป็นอีกวิธีหนึ่งได้

ให้ A เป็นเซตของของที่แตกต่างกัน n สิ่ง การเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมทีละ r สิ่ง (โดยที่ $0 \leq r \leq n$) ของเซต A คือการนำของ r สิ่งจากเซต A มาเรียงเป็นวงกลม ให้ Q_r^n เป็นจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมทีละ r สิ่งของเซต A เราจะหาสูตรสำหรับ Q_r^n โดยเริ่มต้นพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้