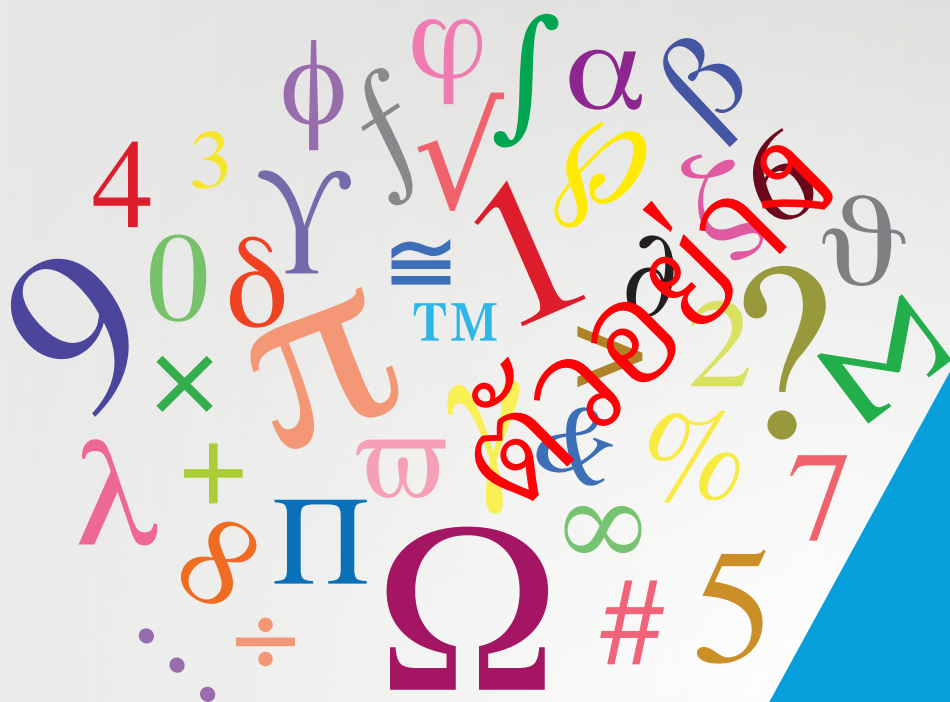




สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

คณิตศาสตร์เบื้องต้น: ทฤษฎีและการประยุกต์ใช้



ฉบับพิมพ์ครั้งที่ 3

ศาสตราจารย์ ดร.ศุภวัจน์ รุ่งสุริยะวิบูลย์
ดร.ปิยะวงศ์ ปัญจะเทวคุปต์

สารบัญ

	หน้า
สารบัญภาพ	(10)
คำนำ	(13)
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความสำคัญของคณิตศาสตร์ต่อการศึกษาวิชาเศรษฐศาสตร์	1
1.2 แบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์และคณิตศาสตร์	2
1.3 ดุลยภาพทางเศรษฐศาสตร์	4
1.4 เป้าหมายของหนังสือ	5
1.5 หนังสือคณิตศาสตร์ที่แนะนำ	6
1.6 ขอบเขตของเนื้อหา	7
บทที่ 2 คณิตศาสตร์กับความสัมพันธ์ทางเศรษฐศาสตร์	11
2.1 พื้นฐานเรื่องเซต	11
2.2 พื้นฐานเรื่องความสัมพันธ์	15
2.3 พื้นฐานเรื่องฟังก์ชัน	18
2.3.1 ลักษณะของฟังก์ชัน	19
2.3.2 ประเภทของฟังก์ชันตามลักษณะของเส้น	24
2.4 ส่วนประกอบของแบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์	33
2.4.1 ตัวแปร ค่าคงที่ และพารามิเตอร์	34
2.4.2 สมการ	35
2.5 ระบบสมการเชิงเส้นตรง	39
แบบฝึกหัดท้ายบท	43

	หน้า
บทที่ 3 การวิเคราะห์ดุลยภาพเชิงสถิตย์	47
3.1 แบบจำลองการวิเคราะห์จุดคุ้มทุน	47
3.2 แบบจำลองตลาดสินค้าและบริการ	50
3.2.1 ฟังก์ชันอุปสงค์	51
3.2.2 ฟังก์ชันอุปทาน	54
3.2.3 ดุลยภาพของตลาดสินค้าและบริการ	57
3.3 ผลของการจัดเก็บภาษีในตลาดแข่งขันสมบูรณ์	63
3.4 แบบจำลองเศรษฐกิจมหภาคอย่างง่าย	70
3.4.1 การวิเคราะห์ดุลยภาพแยกส่วนของตลาดผลผลิต	70
3.4.2 การวิเคราะห์ดุลยภาพแยกส่วนของตลาดเงิน	77
3.5 แบบจำลอง IS-LM	80
3.5.1 การวิเคราะห์ดุลยภาพแยกส่วนของตลาดผลผลิตและเส้น IS	80
3.5.2 ดุลยภาพทั่วไปของระบบเศรษฐกิจ	84
แบบฝึกหัดท้ายบท	89
บทที่ 4 พืชคณิตเมทริกซ์และการประยุกต์ใช้ในทฤษฎีเศรษฐศาสตร์	93
4.1 นิยามของเมทริกซ์	93
4.2 การปฏิบัติการระหว่างเมทริกซ์	98
4.2.1 การเท่ากันของเมทริกซ์	98
4.2.2 การบวกเมทริกซ์	98
4.2.3 การลบเมทริกซ์	99
4.2.4 การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์	99
4.2.5 การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์	100
4.3 ดีเทอร์มิแนนต์	102
4.4 เมทริกซ์ผกผัน	108
4.5 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยเมทริกซ์	113
4.6 การประยุกต์ใช้เมทริกซ์ในแบบจำลองดุลยภาพตลาดแบบแยกส่วน	119

	หน้า
4.7 การประยุกต์ใช้เมทริกซ์สำหรับวิเคราะห์ผลของภาษีต่อดุลยภาพตลาด	121
4.8 การประยุกต์ใช้เมทริกซ์ในแบบจำลองเศรษฐกิจมหภาคอย่างง่าย	125
4.9 การประยุกต์ใช้เมทริกซ์ในแบบจำลอง IS-LM	130
แบบฝึกหัดท้ายบท	134
บทที่ 5 อนุพันธ์และการประยุกต์ใช้ในทฤษฎีเศรษฐศาสตร์	139
5.1 นิยามของอนุพันธ์	139
5.2 สูตรการหาอนุพันธ์	144
5.2.1 อนุพันธ์อันดับสูง	148
5.3 อนุพันธ์กับแนวคิดเรื่องหน่วยสุดท้าย	149
5.3.1 อรรถประโยชน์	150
5.3.2 การผลิตในระยะสั้น	152
5.3.3 ต้นทุนการผลิต	153
5.3.4 รายรับการผลิต	157
5.4 ความยืดหยุ่น	161
5.4.1 ความยืดหยุ่นของอุปสงค์ต่อราคา	162
5.4.2 ความยืดหยุ่นของอุปทานต่อราคา	165
แบบฝึกหัดท้ายบท	168
บทที่ 6 การหาผลเลิศโดยไม่มีขอบเขตจำกัดในทฤษฎีเศรษฐศาสตร์	171
กรณีตัวแปรอิสระตัวเดียว	171
6.1 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน	172
6.2 แนวคิดการหาผลเลิศโดยไม่มีขอบเขตจำกัดกรณีตัวแปรอิสระตัวเดียว	174
6.3 การหาอรรถประโยชน์สูงสุด	181
6.4 การหาระดับการผลิตที่ทำให้เกิดผลผลิตสูงสุด	183
6.5 การหาระดับการผลิตที่ทำให้เกิดต้นทุนการผลิตต่ำที่สุด	189
6.6 การแสวงหากำไรสูงสุด	196

	หน้า
6.6.1 คุณภาพของหน่วยผลิตในตลาดแข่งขันอย่างสมบูรณ์	197
6.6.2 คุณภาพของหน่วยผลิตในตลาดแข่งขันอย่างไม่สมบูรณ์	207
6.7 การวิเคราะห์ผลกระทบของภาษีต่อการหากำไรสูงสุด	215
6.7.1 การหาอัตราภาษีที่รัฐได้รับรายได้รวมมากที่สุด	218
แบบฝึกหัดท้ายบท	225
บทที่ 7 การหาต้นทุนของฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัว	229
7.1 แนวคิดการหาต้นทุนของฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัว	229
7.2 อนุพันธ์ย่อย	232
7.3 ค่าเชิงอนุพันธ์	236
7.4 อนุพันธ์รวม	239
7.5 อนุพันธ์ของอิมพลิสิตฟังก์ชัน	241
7.6 การวิเคราะห์คุณภาพเชิงสถิติเปรียบเทียบ	243
7.6.1 การวิเคราะห์คุณภาพเชิงสถิติของแบบจำลองตลาดสินค้าและบริการ	244
7.6.2 การวิเคราะห์คุณภาพเชิงสถิติเปรียบเทียบของแบบจำลองรายได้ ประชากร	248
7.7 ฟังก์ชันอรรถประโยชน์และเส้นความพอใจเท่ากัน	248
7.8 ฟังก์ชันการผลิต	263
7.9 ฟังก์ชันการผลิตแบบ Cobb-Douglas	269
7.10 ความยืดหยุ่นเฉพาะ	277
แบบฝึกหัดท้ายบท	282
บทที่ 8 การหาพลเอกซ์โดยไม่มีขอบเขตจำกัดในทฤษฎีเศรษฐศาสตร์ กรณีตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัว	287
8.1 ค่าขีดสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระสองตัวแปร	287
8.2 เงื่อนไขการหาขีดสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระสองตัวแปร	288
8.3 เงื่อนไขการหาขีดสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระมากกว่าสอง ตัวแปร	295

	หน้า
8.4 หน่วยผลิตสามารถผลิตสินค้าได้หลายชนิด	302
8.4.1 กรณีหน่วยผลิตในตลาดแข่งขันอย่างสมบูรณ์	302
8.4.2 กรณีหน่วยผลิตในตลาดแข่งขันอย่างไม่สมบูรณ์	304
8.5 การแบ่งแยกราคาขาย	308
แบบฝึกหัดท้ายบท	313
 บทที่ 9 การหาผลเลิศโดยมีขอบเขตจำกัดในทฤษฎีเศรษฐศาสตร์	
กรณีตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัว	317
9.1 การหาผลเลิศโดยมีขอบเขตจำกัด	318
9.2 เงื่อนไขการหาค่าขีดสุดสัมพัทธ์โดยมีขอบเขตจำกัดของฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระสองตัวแปร	320
9.3 เงื่อนไขการหาค่าขีดสุดสัมพัทธ์โดยมีขอบเขตจำกัดของฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระมากกว่าสองตัวแปร	329
9.4 การประยุกต์ใช้เพื่อหาคุณภาพของหน่วยผลิต	337
9.4.1 หน่วยผลิตแสวงหาต้นทุนต่ำสุดจากการผลิตสินค้าจำนวนหนึ่ง	338
9.4.2 หน่วยผลิตแสวงหาผลผลิตมากที่สุดภายใต้ต้นทุนการผลิตจำนวนหนึ่ง	343
9.5 การประยุกต์ใช้เพื่อหาคุณภาพของผู้บริโภค	348
แบบฝึกหัดท้ายบท	360
 บทที่ 10 บริพันธ์และการประยุกต์ใช้ในทฤษฎีเศรษฐศาสตร์	363
10.1 นิยามของบริพันธ์	363
10.2 อินทิกรัลจำกัดเขต	367
10.3 ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันส่วนเพิ่มและฟังก์ชันผลรวม	373
10.4 ส่วนเกินผู้บริโภคและส่วนเกินหน่วยผลิต	377
10.5 ฟังก์ชันการสะสมทุน	382
แบบฝึกหัดท้ายบท	386
บรรณานุกรม	389

สารบัญภาพ

	หน้า
ภาพที่ 2.1 การจับคู่ของฟังก์ชัน	18
ภาพที่ 2.2 การจับคู่ของฟังก์ชันทั่วถึง	19
ภาพที่ 2.3 การจับคู่ของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง	19
ภาพที่ 2.4 การจับคู่ของฟังก์ชันประกอบ	20
ภาพที่ 2.5 ฟังก์ชันค่าคงที่	25
ภาพที่ 2.6 ฟังก์ชันเส้นตรง	25
ภาพที่ 2.7 ฟังก์ชันกำลังสอง	26
ภาพที่ 2.8 ฟังก์ชันกำลังสาม	27
ภาพที่ 2.9 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	28
ภาพที่ 2.10 ฟังก์ชันลอการิทึม	29
ภาพที่ 2.11 ฟังก์ชัน rectangular hyperbola	29
ภาพที่ 2.12 ฟังก์ชันยกกำลัง	30
ภาพที่ 3.1 การวิเคราะห์จุดคุ้มทุน	49
ภาพที่ 3.2 ส่วนกลับของฟังก์ชันอุปสงค์	52
ภาพที่ 3.3 ส่วนกลับของฟังก์ชันอุปทาน	55
ภาพที่ 3.4 ส่วนกลับของฟังก์ชันอุปทานกรณีต่างๆ	55
ภาพที่ 3.5 ดุลยภาพของตลาดสินค้าและบริการ	58
ภาพที่ 3.6 ดุลยภาพของตลาดภายหลังการเก็บภาษีต่อหน่วยสินค้า	64
ภาพที่ 3.7 ดุลยภาพของตลาดภายหลังการเก็บภาษีมูลค่าของสินค้า	68
ภาพที่ 3.8 เส้น LM ในตลาดเงิน	78
ภาพที่ 3.9 เส้น IS ในตลาดผลผลิต	82
ภาพที่ 3.10 ดุลยภาพทั่วไปของระบบเศรษฐกิจ	84

	หน้า
ภาพที่ 5.1 ความชันของฟังก์ชันที่ไม่เป็นเส้นตรง	140
ภาพที่ 5.2 ความชันของจุดบนเส้นโค้ง	141
ภาพที่ 5.3 ฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาค่าอนุพันธ์	142
ภาพที่ 5.4 ความสัมพันธ์ของประเภทรายรับกรณีตลาดแข่งขันอย่างสมบูรณ์	158
ภาพที่ 5.5 ความสัมพันธ์ของประเภทรายรับกรณีตลาดแข่งขันไม่สมบูรณ์	159
ภาพที่ 6.1 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์	172
ภาพที่ 6.2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์	175
ภาพที่ 6.3 ความสัมพันธ์ของค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสอง	176
ภาพที่ 6.4 จุดเปลี่ยนเว้า	177
ภาพที่ 6.5 ความสัมพันธ์ของอรรถประโยชน์รวมและอรรถประโยชน์ส่วนเพิ่ม	181
ภาพที่ 6.6 ความสัมพันธ์ของการผลิตในระยะสั้น	184
ภาพที่ 6.7 ต้นทุนการผลิตในระยะสั้น	190
ภาพที่ 6.8 ดุลยภาพของหน่วยผลิตในตลาดแข่งขันอย่างสมบูรณ์	199
ภาพที่ 6.9 ความสัมพันธ์ของเส้นต้นทุนและระดับราคาสินค้าในตลาด	201
ภาพที่ 6.10 ดุลยภาพของหน่วยผลิตในระยะยาวที่อยู่ในตลาดแข่งขันสมบูรณ์	205
ภาพที่ 6.11 ดุลยภาพของหน่วยผลิตในตลาดแข่งขันอย่างไม่สมบูรณ์	209
ภาพที่ 6.12 ดุลยภาพของหน่วยผลิตในระยะสั้นที่อยู่ในตลาดผูกขาด	210
ภาพที่ 6.13 ดุลยภาพของผู้ผูกขาดในระยะยาวที่ใช้โรงงานขนาดเล็กกว่าขนาดที่มีประสิทธิภาพสูงสุด	213
ภาพที่ 7.1 ฟังก์ชันประกอบด้วยตัวแปรอิสระจำนวน 2 ตัว	230
ภาพที่ 7.2 ผลกระทบทางตรงและทางอ้อม	239
ภาพที่ 7.3 เส้นความพอใจเท่ากัน	258
ภาพที่ 7.4 ความชันของเส้นความพอใจเท่ากัน	260
ภาพที่ 7.5 เส้นผลผลิตเท่ากัน	264
ภาพที่ 7.6 ความสัมพันธ์ระหว่างความยืดหยุ่นของการทดแทนทางเทคนิคและเส้นผลผลิตเท่ากัน	275

	หน้า
ภาพที่ 8.1 ค่าขีดสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระสองตัวแปร	288
ภาพที่ 9.1 ค่าขีดสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันภายใต้ขอบเขตจำกัด	318
ภาพที่ 9.2 กราฟปริภูมิเชิง 3 มิติของฟังก์ชันเป้าหมายและฟังก์ชันข้อกำหนด	321
ภาพที่ 9.3 ดุลยภาพของหน่วยผลิต	337
ภาพที่ 9.4 ดุลยภาพของหน่วยผลิตกรณีหน่วยผลิตแสวงหาต้นทุนต่ำสุด	339
ภาพที่ 9.5 ดุลยภาพของหน่วยผลิตกรณีหน่วยผลิตแสวงหาผลผลิตมากที่สุด	343
ภาพที่ 9.6 ดุลยภาพของผู้บริโภค	344
ภาพที่ 10.1 อินทิกรัลจำกัดเขตและพื้นที่ภายใต้เส้นกราฟ	369
ภาพที่ 10.2 ส่วนเกินผู้บริโภค	378
ภาพที่ 10.3 ส่วนเกินหน่วยผลิต	379
ภาพที่ 10.4 ฟังก์ชันการสะสมทุน	384

ตัวอย่าง

คำนำ

คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่มีความสำคัญและเป็นประโยชน์อย่างมากต่อการวิเคราะห์เพื่อแก้ปัญหาทางด้านเศรษฐศาสตร์ นักเศรษฐศาสตร์จำเป็นต้องมีความรู้และความเชี่ยวชาญในการนำหลักคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ร่วมกับทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์ในสาขาต่างๆ วิชาคณิตเศรษฐศาสตร์จึงถือเป็นวิชาที่มีความสำคัญสำหรับผู้ศึกษาวิชาเศรษฐศาสตร์ในแขนงต่างๆ เป็นอย่างมาก

ผู้เขียนได้แต่งตำราขึ้นเพื่อใช้เป็นหนังสือประกอบการเรียนการสอนในวิชาคณิตเศรษฐศาสตร์เบื้องต้น (Introductory Mathematical Economics) ของคณะเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ซึ่งในปัจจุบันวิชาคณิตศาสตร์เบื้องต้นได้ถูกบรรจุให้เป็นวิชาบังคับสำหรับการเรียนเศรษฐศาสตร์ในระดับปริญญาตรีของทุกมหาวิทยาลัย ตำราเล่มนี้จึงสามารถนำไปใช้ประกอบการเรียนการสอนในวิชาคณิตเศรษฐศาสตร์เบื้องต้นของมหาวิทยาลัยต่างๆ ได้

จากประสบการณ์ในการสอนวิชาคณิตเศรษฐศาสตร์ที่ผ่านมา ผู้เขียนพบว่านักศึกษาจะมีความกังวลใจเมื่อนึกถึงความยุ่งยากและซับซ้อนของการนำคณิตศาสตร์มาใช้ในการวิเคราะห์ทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์ ส่งผลทำให้นักศึกษาพยายามหลีกเลี่ยงการเรียนในวิชาดังกล่าว ผู้เขียนได้ตระหนักถึงปัญหาดังกล่าวจึงได้แต่งตำราเล่มนี้ขึ้นเพื่อให้ผู้อ่านที่มีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ไม่เข้มข้นสามารถเข้าใจถึงการนำเครื่องมือคณิตศาสตร์มาใช้กับทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์

ทั้งนี้เนื้อหาในแต่ละบทจะเริ่มต้นด้วยการทบทวนหลักคณิตศาสตร์พื้นฐานที่จำเป็นก่อนที่จะอธิบายถึงการประยุกต์ใช้ในทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์ ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าวิธีการดังกล่าวจะช่วยทำให้การเรียนวิชาคณิตเศรษฐศาสตร์เป็นไปอย่างง่ายขึ้น นอกจากนั้น ผู้เขียนได้ยกตัวอย่างต่างๆ ประกอบการอธิบายสำหรับเนื้อหาในแต่ละหัวข้อ รวมถึงได้รวบรวมแบบฝึกฝนไว้ในตอนท้ายของเนื้อหาในแต่ละหัวข้อ และยังได้บรรจุแบบฝึกหัดไว้ในตอนท้ายของแต่ละบทเพื่อให้ผู้อ่านได้ฝึกฝนการเรียนวิชาคณิตเศรษฐศาสตร์ให้ประสบความสำเร็จนั้น ผู้เรียนจะต้องหมั่นฝึกฝนทำแบบฝึกหัดอย่างสม่ำเสมอ อย่างไรก็ตาม คำตอบทางคณิตศาสตร์ที่คำนวณได้นั้นจะไม่มีคามหมายใดๆ เลยถ้าหากผู้เรียนวิชาคณิตเศรษฐศาสตร์ไม่สามารถอธิบายความหมายของคำตอบที่คำนวณได้ให้สอดคล้องกับหลักทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์ ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าตำราเล่มนี้จะเป็นประโยชน์แก่ผู้สนใจศึกษาวิชาเศรษฐศาสตร์ในแขนงต่างๆ รวมทั้งสามารถทำให้ผู้อ่านได้ตระหนักถึงความสำคัญและประโยชน์ของการนำหลักคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาทางด้านเศรษฐศาสตร์ต่างๆ

ในการจัดพิมพ์ครั้งที่ 2 นี้ ผู้เขียนได้เพิ่มเติมโจทย์ปัญหาการประยุกต์ใช้เพิ่มเติมในแต่ละบท เพื่อให้ผู้อ่านเข้าใจถึงการนำหลักคณิตศาสตร์ไปประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาทางด้านเศรษฐศาสตร์ให้มากยิ่งขึ้น

ผู้เขียนขอขอบคุณคณาจารย์ของคณะเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ทุกท่านที่ได้มีส่วนร่วมในการสอนวิชาคณิตศาสตร์เบื้องต้น ซึ่งได้ร่วมกันพัฒนาหัวข้อและเนื้อหาของวิชานี้ให้มีความเข้มข้นและมีมาตรฐาน อีกทั้งยังช่วยให้คณิตศาสตร์เบื้องต้นเป็นวิชาพื้นฐานที่สำคัญที่ทำให้นักศึกษาสามารถนำไปใช้ต่อยอดสำหรับการเรียนวิชาเศรษฐศาสตร์อื่นๆ ต่อไป นอกจากนี้แล้ว ผู้เขียนขอขอบคุณ นายกิตติพัฒน์ บัวอุบล และสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ที่ช่วยเหลือในเรื่องการออกแบบปก การจัดวางหน้า และการจัดพิมพ์หนังสือเล่มนี้ให้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

หากหนังสือเล่มนี้สามารถสร้างคุณประโยชน์อันใดขึ้นได้ ผู้เขียนขออุทิศให้กับบิดา มารดา ครอบครัว และครูบาอาจารย์ทุกท่านตั้งแต่อดีตจนปัจจุบัน สำหรับใช้บอกพร่องและข้อผิดพลาดต่างๆ ที่เกิดขึ้นในหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนขอน้อมรับไว้และจะได้ปรับปรุงแก้ไขให้ถูกต้องในโอกาสต่อไป

ศุภวัจน์ รุ่งสุริยะวิบูลย์

ปิยะวงศ์ ปัญจะเทวคุปต์

31 กรกฎาคม 2564

บทที่

5

อนุพันธ์และการประยุกต์ใช้ ในทฤษฎีเศรษฐศาสตร์

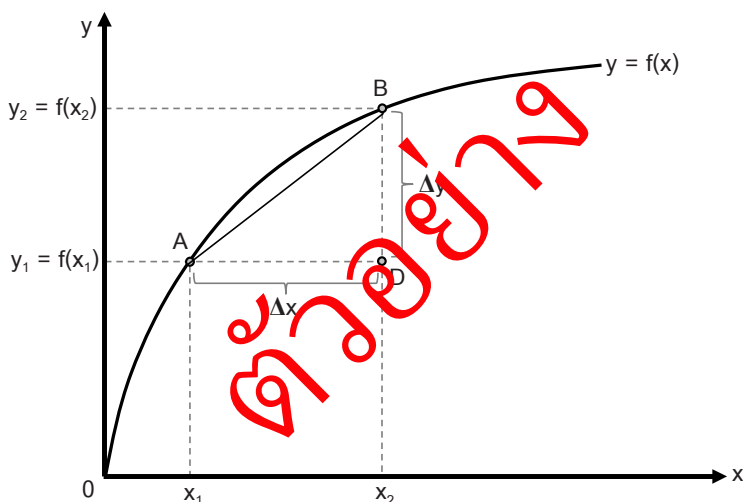
ในบทนี้จะอธิบายให้เห็นถึงเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญที่เรียกว่าอนุพันธ์ (derivative) และความสำคัญของการนำอนุพันธ์ไปประยุกต์ใช้เพื่อวิเคราะห์ปัญหาของแบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์ ในทางเศรษฐศาสตร์การตัดสินใจของหน่วยเศรษฐกิจใดๆ มักจะอาศัยแนวคิดหน่วยสุดท้ายหรือส่วนเพิ่ม (marginality) นั่นคือ หน่วยเศรษฐกิจจะตัดสินใจเลือกกระทำใดๆ โดยคำนึงถึงผลประโยชน์ที่จะได้รับเพิ่มขึ้นว่าสามารถให้ผลที่มากกว่าต้นทุนที่จะต้องเสียเพิ่มขึ้นจากการกระทำนั้นหรือไม่ กระบวนการในการหาผลประโยชน์ที่จะได้รับเพิ่มขึ้นและต้นทุนที่จะต้องเสียเพิ่มขึ้นนี้จะต้องอาศัยเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า การหาอนุพันธ์ โดยทั่วไปแล้วการวิเคราะห์แบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์ต่างๆ นั้นจะต้องอาศัยการหาอนุพันธ์ในการแก้ปัญหา เนื้อหาในบทนี้จะเริ่มต้นด้วยการทบทวนความหมายของอนุพันธ์และสูตรการหาอนุพันธ์ที่สำคัญของฟังก์ชัน หลังจากนั้นจะแสดงการนำอนุพันธ์ไปประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์แบบจำลองทางเศรษฐศาสตร์ต่างๆ อันประกอบไปด้วยอนุพันธ์กับแนวคิดเรื่องหน่วยสุดท้าย ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันรวมและฟังก์ชันหน่วยสุดท้ายต่างๆ และอนุพันธ์กับการหาค่าความยืดหยุ่น

5.1 นิยามของอนุพันธ์

พิจารณาฟังก์ชัน $y=f(x)$ ใดๆ ที่ประกอบด้วยตัวแปรอิสระ (independent variable) เพียงตัวเดียว ภาพที่ 5.1 แสดง $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นเส้นตรง (non-linear function) และมีคุณสมบัติความต่อเนื่อง (continuous) ความชันของฟังก์ชันระหว่างจุด A และ B สามารถคำนวณหาได้จากค่าสัดส่วนการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ระหว่างจุด A และ B ดังความสัมพันธ์ที่แสดงนี้

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \quad (5-1)$$

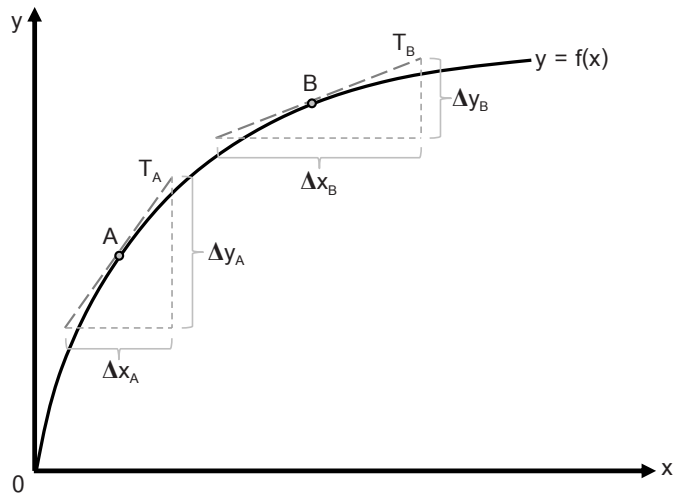
อย่างไรก็ตาม ค่าความชันที่คำนวณได้จากสมการ (5-1) นั้นแสดงถึงการหาค่าความชันของเส้นตรง AB มากกว่าการหาค่าความชันของเส้นโค้ง AB ถ้าหากเส้นโค้ง AB มีระยะห่างกันมากๆ ค่าความชันที่คำนวณได้จากสมการ (5-1) ก็จะมีค่าแตกต่างจากค่าจริงมาก แต่ถ้าหากเส้นโค้ง AB มีระยะห่างน้อย นั่นคือ จุด B อยู่ใกล้กับกับจุด A มากๆ ค่าความชันที่คำนวณได้จะมีค่าใกล้เคียงกับความชันของจุด A บนเส้นกราฟ ดังนั้น ในการหาค่าความชันของฟังก์ชันที่ไม่เป็นเส้นตรงนั้นจะพิจารณาค่าความชันที่คำนวณจากจุดใดๆ บนฟังก์ชันแทนที่การหาค่าความชันของส่วนโค้งบนเส้นกราฟ



ภาพที่ 5.1 ความชันของฟังก์ชันที่ไม่เป็นเส้นตรง

ภาพที่ 5.2 แสดงการหาค่าความชันของจุดใดๆ บนฟังก์ชันที่ไม่เป็นเส้นตรง ค่าความชันของจุดใดๆ สามารถหาได้ด้วยการลากเส้นตรงมาสัมผัส (tangent) ยังจุดที่ต้องการหาค่าความชัน หลังจากนั้นให้คำนวณหาสัดส่วนการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x หรือ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ณ จุดสัมผัส และกำหนดให้การเปลี่ยนแปลงของ x หรือ Δx มีขนาดเข้าใกล้ศูนย์ นั่นคือ $\Delta x \rightarrow 0$ โดยวิธีการดังกล่าวนี้ทางคณิตศาสตร์จะเรียกว่าเป็นการหาค่าลิมิต (limit) ของ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เมื่อ Δx เข้าใกล้ศูนย์ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$ จากภาพที่ 5.2 เส้น T_A และ T_B แสดงถึงเส้นสัมผัสของจุด A และ B บนเส้นกราฟ ตามลำดับ ค่าความชันของจุด A และ B สามารถหาได้จากค่าความชันของเส้นสัมผัส T_A และ T_B ซึ่งคำนวณได้จากค่า $\lim_{\Delta x_A \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y_A}{\Delta x_A} \right)$ และ $\lim_{\Delta x_B \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y_B}{\Delta x_B} \right)$ ตามลำดับ นั่นเอง



ภาพที่ 5.2 ความชันของจุดบนเส้นโค้ง

ภาพที่ 5.1 ยังแสดงให้เห็นถึงแนวคิดในการพัฒนาสูตรการคำนวณหาความชันของจุดใดๆ บนฟังก์ชันที่ไม่เป็นเส้นตรง พิจารณาการเปลี่ยนแปลงของค่าฟังก์ชันของจุด 2 จุดใดๆ บนฟังก์ชัน ในที่นี้พิจารณาจุด A หรือ ณ $x=x_1$ จะได้ $y_1=f(x_1)$ และจุด B หรือ ณ $x=x_2=x_1+h$ จะได้ $y_2=f(x_2)=f(x_1+h)$ โดยที่ $h=\Delta x$ คือ ค่าคงที่ใดๆ ที่มากกว่าศูนย์ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x_1 ถึง x_1+h สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{(x_1+h)-(x_1)} = \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \quad (5-2)$$

ทั้งนี้ อัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x+h$ ใดๆ สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-(x)} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (5-3)$$

ถ้าหาก h มีค่าน้อยมากหรือมีค่าเกือบเท่ากับศูนย์ นั่นคือ $h \rightarrow 0$ อัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของ y ณ จุด x ใดๆ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-(x)} \quad (5-4)$$

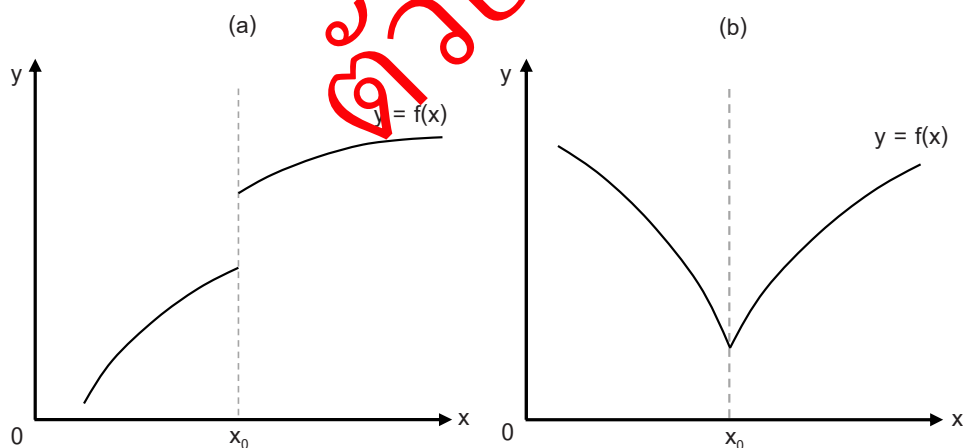
อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ที่จุด x ใดๆ บนเส้นฟังก์ชันนี้สามารถเรียกอีกอย่างได้ว่าอนุพันธ์ (derivative) โดยทั่วไปแล้วอนุพันธ์ของ $f(x)$ สามารถแสดงได้ด้วยสัญลักษณ์ต่างๆ ดังนี้ $f'(x)$ หรือ $\frac{dy}{dx}$ หรือ $\frac{d}{dx} f(x)$ หรือ y' ดังนั้น อนุพันธ์ของ $f(x)$ สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - (x)} \quad (5-5)$$

ในกรณีที่ต้องการเจาะจงตำแหน่งของอนุพันธ์ เช่น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ณ จุด $x=x_1$ สามารถแสดงได้ด้วยสัญลักษณ์ดังนี้ $f'(x)$ หรือ $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_1}$ เป็นต้น

ค่าอนุพันธ์ของ $f(x)$ นอกจากจะแสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ที่จุด x ใดๆ แล้วค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันยังแสดงถึงค่าความชัน (gradient) ของกราฟ $y=f(x)$ ณ จุดนั้นๆ อีกด้วย

ฟังก์ชัน $y=f(x)$ ใดๆ จะสามารถหาอนุพันธ์ได้ก็ต่อเมื่อฟังก์ชัน $y=f(x)$ มีคุณสมบัติความต่อเนื่อง (continuous) และไม่มีจุดใดจุดหนึ่งบนฟังก์ชันไม่เรียบหรือหักงอ ภาพที่ 5.3 แสดงฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้ ภาพที่ 5.3 (a) แสดงฟังก์ชัน $y=f(x)$ ไม่มีความต่อเนื่อง ณ จุด $x=x_0$ ในขณะที่ภาพที่ 5.3 (b) แสดงฟังก์ชัน $y=f(x)$ มีความต่อเนื่องแต่ไม่เรียบหรือหักงอ ณ จุด $x=x_0$



ภาพที่ 5.3 ฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาค่าอนุพันธ์

ตัวอย่าง 5.1 กำหนดให้ $y=x^2-2x+4$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง $x=1$ ถึง $x=2$ และอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของ y ณ $x=1$

อัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง $x=1$ ถึง $x=2$ หาได้ดังนี้

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 3}{1} = 1$$

คณิตเศรษฐศาสตร์เบื้องต้น: ทฤษฎีและการประยุกต์ใช้

คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่มีความสำคัญและเป็นประโยชน์อย่างมากต่อการวิเคราะห์เพื่อแก้ปัญหาทางด้านเศรษฐศาสตร์ นักเศรษฐศาสตร์จำเป็นต้องมีความรู้และความเชี่ยวชาญในการนำหลักคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ร่วมกับทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์ ตำราเล่มนี้ได้ทบทวนหลักคณิตศาสตร์พื้นฐานที่จำเป็นก่อนที่จะอธิบายถึงการประยุกต์ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์ ผู้เขียนได้ยกตัวอย่างต่างๆ ประกอบการอธิบายและได้รวบรวมแบบฝึกฝนไว้ในตอนท้ายสำหรับเนื้อหาในแต่ละหัวข้อ รวมทั้งได้บรรจุแบบฝึกหัดไว้ในตอนท้ายของแต่ละบทเพื่อให้ผู้อ่านได้ฝึกฝน ตำราเล่มนี้จะเป็นประโยชน์แก่ผู้สนใจศึกษาวิชาเศรษฐศาสตร์ในแขนงต่างๆ และช่วยให้ผู้อ่านได้ตระหนักถึงความสำคัญและประโยชน์ของการนำหลักคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาทางด้านเศรษฐศาสตร์ต่างๆ อีกทั้งตำราเล่มนี้เหมาะสำหรับใช้เป็นหนังสือประกอบการเรียนการสอนในวิชาคณิตเศรษฐศาสตร์เบื้องต้น (Introductory Mathematical Economics) ของมหาวิทยาลัยต่างๆ

ตัวอย่าง

ศาสตราจารย์ ดร.ศุภวัจน์ รุ่งสุริยะวิบูลย์

- ศาสตราจารย์ประจำคณะเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
- การศึกษา ปริญญาเอก Pennsylvania State University, USA.
- สาขาวิจัยที่สนใจ เศรษฐศาสตร์จุลภาคประยุกต์ เศรษฐมิติประยุกต์ การวัดประสิทธิภาพและผลิตภาพเศรษฐศาสตร์เกษตร พลังงาน และอุตสาหกรรม

ดร.ปิยะวงศ์ ปัญจะเทวคุปต์

- อาจารย์ประจำคณะเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
- การศึกษา ปริญญาเอก University of Florida, USA.
- สาขาวิจัยที่สนใจ ทฤษฎีเศรษฐศาสตร์จุลภาค เศรษฐศาสตร์การเงิน เศรษฐมิติประยุกต์

ISBN 978-616-602-002-1



9 786166 020021

ราคา 430 บาท

หมวดเศรษฐศาสตร์