



หนังสือชุดเทคนิคการเขียนคณิตศาสตร์



ลำดับและอนุกรม

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ประกอบด้วย

- ⊗ ลำดับ
- ⊗ ลำดับเลขคณิต
- ⊗ ลำดับเรขาคณิต
- ⊗ ลิมิตของลำดับ
- ⊗ อนุกรม
- ⊗ อนุกรมเลขคณิต
- ⊗ อนุกรมเรขาคณิต
- ⊗ อนุกรมอนันต์
- ⊗ อนุกรมอื่นที่ควรทราบ
- ⊗ แบบทดสอบลำดับและอนุกรม

กวียา นาวประทีป

วศ.บ.เกียรตินิยม (จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย), M.S., M.A. (University of Michigan, USA)

เทคนิคการเขียนคณิตศาสตร์ : ลำดับและอนุกรม

เขียนโดย กวียา เนาวประทีป

ISBN (E-book) 2025-1024-0051-8

จำหน่ายอีบุ๊ก พฤศจิกายน 2568

ราคา 75 บาท

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ (ฉบับเพิ่มเติม) พ.ศ. 2558

เนื้อหา รูปเล่ม และภาพประกอบในหนังสือเล่มนี้เป็นลิขสิทธิ์ของสำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์
ห้ามคัดลอก ยกเว้นได้รับอนุญาต

บรรณาธิการ กวียา เนาวประทีป

ปก/รูปเล่ม ฝ่ายศิลปกรรม สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

จัดทำโดย

พจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

เลขที่ 45 ซอยจรัญสนิทวงศ์ 40 ถนนจรัญสนิทวงศ์

แขวงบางยี่ขัน เขตบางพลัด กรุงเทพฯ 10700

โทรศัพท์ : 0-2433-7755-7 โทรสาร : 0-2433-7703

จัดจำหน่ายในรูปแบบสิ่งพิมพ์อิเล็กทรอนิกส์โดย

บริษัท เกรท มีเดีย เอเจนซี จำกัด

85 ซอยบรมราชชนนี 75 แขวงบางระมาด เขตตลิ่งชัน กรุงเทพฯ 10170

โทร. 0-2433-7755-7, 086-330-6425

คำนำ

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า เป้าหมายของการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 นั้นมุ่งพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม ทั้งยังสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่นๆ ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข

และเพื่อให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จและบรรลุเป้าหมายในการเรียนกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ผู้เขียนจึงได้จัดทำหนังสือ **เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : ลำดับและอนุกรม** เล่มนี้ขึ้นมา เพื่อให้ผู้เรียนรู้จักเทคนิคในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ให้เก่งได้ด้วยตนเอง ด้วยการนำไปอ่านและฝึกทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบที่มีอยู่อย่างหลากหลาย เฉพาะเรื่องที่ตนสนใจหรือที่ยังไม่เข้าใจอย่างถ่องแท้ให้เข้าใจมากยิ่งขึ้น และยังสามารถนำไปใช้เสริมกับการเรียนกวดวิชาตามสถาบันต่างๆ อีกทั้งครู-อาจารย์ผู้สอนก็สามารถนำไปใช้ประกอบการเรียนการสอนได้ด้วย

หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เรียน ครู-อาจารย์ผู้สอน ได้ตามสมควร หากมีข้อบกพร่องหรือผิดพลาดประการใดผู้เขียนต้องขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

ด้วยความปรารถนาดี
กวิยา เนาวประทีป
kawiya@physicscenter.com

คำนำสำนักพิมพ์

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า การเรียนการสอนในปัจจุบัน กระทรวงศึกษาธิการ ได้ประกาศใช้หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ที่มีความเหมาะสมชัดเจนทั้งเป้าหมายของหลักสูตรในการมุ่งพัฒนาคุณภาพของผู้เรียนทุกคน ซึ่งเป็นกำลังของชาติ โดยได้มีการกำหนดมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดในรายวิชาไว้อย่างชัดเจน เหมาะสำหรับการเรียนการสอนในแต่ละระดับชั้น

สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์ได้เล็งเห็นความสำคัญของการเรียนการสอนในกลุ่ม **สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์** ซึ่งได้มีการกำหนดเป้าหมายสำคัญของการพัฒนาคุณภาพผู้เรียนให้สามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเอง นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาชีวิตและใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ดังนั้นทางสำนักพิมพ์ฯ จึงได้จัดทำหนังสือ **เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์** เฉพาะเรื่องขึ้น เพื่อให้ผู้เรียนที่ยังไม่เข้าใจหลักคณิตศาสตร์บางเรื่องได้เลือกนำไปใช้ศึกษาด้วยตนเองให้เข้าใจได้อย่างถ่องแท้ เพราะมีการสรุปหลักในแต่ละเรื่อง มีแบบฝึกหัด และแบบทดสอบที่หลากหลายไว้ให้ลองทำพร้อมเฉลยแยกเล่มไว้ให้ตรวจสอบความถูกต้องได้ด้วยตนเอง

สำนักพิมพ์ฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้คงจะอำนวยประโยชน์ให้แก่ผู้เรียน ครู-อาจารย์ผู้สอน และผู้ที่สนใจในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี

ฝ่ายวิชาการ
สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

สารบัญ

1. ลำดับ	7
2. ลำดับเลขคณิต	11
3. ลำดับเรขาคณิต	20
4. ลิมิตของลำดับ	28
5. อนุกรม	35
6. อนุกรมเลขคณิต	41
7. อนุกรมเรขาคณิต	51
8. อนุกรมอนันต์	60
9. อนุกรมอื่นที่ควรทราบ	70
แบบทดสอบลำดับและอนุกรม	79

ลำดับและอนุกรม

1. ลำดับ



บทนิยาม

ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

- ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n จำนวนแรก คือ “ลำดับจำกัด”
- ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก คือ “ลำดับอนันต์”

จากบทนิยามจะได้

$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)$ เป็นลำดับจำกัด

$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$ เป็นลำดับอนันต์

$f(1)$ คือ พจน์แรกของลำดับ เขียนแทนด้วย a_1

$f(2)$ คือ พจน์ที่ 2 ของลำดับ เขียนแทนด้วย a_2

$f(3)$ คือ พจน์ที่ 3 ของลำดับ เขียนแทนด้วย a_3

$f(n)$ คือ พจน์ที่ n ของลำดับ เขียนแทนด้วย a_n

นั่นคือ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัด

และ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับอนันต์

การเขียนลำดับนอกจากจะเขียนโดยการแจกพจน์แล้วอาจจะเขียนเฉพาะพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไปพร้อมทั้งระบุสมาชิกในโดเมน

ตัวอย่างเช่น ลำดับ $a_n = 2n + 3$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots, 10$

$a_n = 2^n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

ในกรณีที่กำหนดลำดับโดยพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไป ถ้าไม่ได้ระบุสมาชิกในโดเมน ให้ถือว่าลำดับนั้นเป็นลำดับอนันต์

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียน 4 พจน์แรกของลำดับ $a_n = 1 - \frac{1}{10^n}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= 1 - \frac{1}{10^n} \\ \therefore a_1 &= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \\ a_2 &= 1 - \frac{1}{10^2} = \frac{99}{100} \\ a_3 &= 1 - \frac{1}{10^3} = \frac{999}{1,000} \\ a_4 &= 1 - \frac{1}{10^4} = \frac{9,999}{10,000} \\ \therefore 4 \text{ พจน์แรกของลำดับนี้ คือ } &\frac{9}{10}, \frac{99}{100}, \frac{999}{1,000}, \frac{9,999}{10,000} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัด 1, 3, 9, 27

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \therefore a_1 &= 1 = 3^0 = 3^{1-1} \\ a_2 &= 3 = 3^1 = 3^{2-1} \\ a_3 &= 9 = 3^2 = 3^{3-1} \\ a_4 &= 27 = 3^3 = 3^{4-1} \\ \therefore a_n &= 3^{n-1} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงเขียน 4 พจน์แรก ของลำดับต่อไปนี้

1) $a_n = n$

2) $a_n = \frac{1}{n}$

3) $a_n = n + 1$

4) $a_n = 2n + 1$

5) $a_n = 2^n$

6) $a_n = 5^{n-1}$

7) $a_n = 2 \times 3^{-n}$

8) $a_n = \frac{n}{n+1}$

9) $a_n = \frac{n}{5^{n-1}}$

10) $a_n = n(n+1)$

11) $a_n = (-1)^{n+1}$

12) $a_n = 1 - \frac{1}{10^n}$

13) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่บวก} \\ 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่บวก} \end{cases}$

14) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{5^n}$

15) $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$

2. จงเขียนลำดับจากฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $\{(x, y) \mid y = 5^x, x \in I^+\}$

2) $\{(x, y) \mid y = \left(\frac{2}{3}\right)^x, x \in I^+\}$

3) $\{(x, y) \mid y = \cos \frac{x\pi}{2}, x \in I^+\}$

4) $\{(x, y) \mid y = 1 + \frac{1}{x}, x \in I^+ \text{ และ } x \leq 20\}$

5) $\{(x, y) \mid y = (-\frac{1}{10})^x, x \in I^+\}$

6) $\{(x, y) \mid y = 3x - 1, x \in I^+ \text{ และ } x \leq 25\}$

3. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ

1) 1, 3, 5, 7, ...

2) 1, 4, 9, 16, ...

3) 1, 3, 7, 15, ...

4) $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \dots$

5) $2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, 4\frac{1}{4}, \dots$

6) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

7) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

8) $\frac{9}{10}, \frac{99}{100}, \frac{999}{1,000}, \frac{9,999}{10,000}, \dots$

9) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \dots$

10) $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{9}, \frac{4}{27}, \dots$

$$11) \quad 1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots$$

$$12) \quad 1, \frac{2}{5}, \frac{3}{25}, \frac{4}{125}, \dots$$

2. ลำดับเลขคณิต



บทนิยาม

ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับที่ผลต่างซึ่งได้จากพจน์ที่ $n + 1$ ลบด้วยพจน์ที่ n มีค่าคงตัว และเรียกค่าคงตัวนี้ว่า “ผลต่างร่วม” เขียนแทนด้วย d

$$\begin{aligned} \text{จากบทนิยามจะได้} \quad d &= a_{n+1} - a_n \\ \text{นั่นคือ} \quad a_{n+1} &= a_n + d \quad \text{เมื่อ } n \in I^+ \end{aligned}$$

รูปทั่วไปของลำดับเลขคณิต

กำหนด a_1 เป็นพจน์แรกของลำดับ

d เป็นผลต่างร่วม

ดังนั้น รูปทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots, a_1 + (n - 1)d$$

พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

$$\begin{aligned} \text{จากรูปทั่วไปจะได้} \quad a_1 &= a_1 + 0 \cdot d = a_1 + (1 - 1)d \\ a_2 &= a_1 + d = a_1 + (2 - 1)d \\ a_3 &= a_1 + 2d = a_1 + (3 - 1)d \\ a_4 &= a_1 + 3d = a_1 + (4 - 1)d \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \therefore a_n &= a_1 + (n - 1)d \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad a_n = a_1 + (n - 1)d$$

จะเห็นว่า ถ้า $d = 0$ จะได้ $a_n = a_1$ นั่นคือทุกพจน์ของลำดับจะมีค่าเท่ากัน เรียกลำดับนี้ว่า “ลำดับคงตัว”

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพจน์ที่ 30 ของลำดับเลขคณิต 1, 4, 7, ...

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \because a_1 &= 1, d = 3, n = 30 \\ \because a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ \therefore a_{30} &= a_1 + 29d \\ &= 1 + 29(3) \\ &= 88 \\ \therefore \text{พจน์ที่ 30 ของลำดับนี้คือ } 88 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 ลำดับเลขคณิต 5, 9, 13, ..., 101 มีกี่พจน์

วิธีทำ ให้ลำดับนี้มี n พจน์

$$\begin{aligned} \because a_1 &= 5, d = 4, a_n = 101 \\ \because a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ 101 &= 5 + (n - 1)(4) \\ 101 &= 4n + 1 \\ 4n &= 100 \\ \therefore n &= 25 \\ \therefore \text{ลำดับนี้มี } 25 \text{ พจน์} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 ลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่งมีพจน์แรกเท่ากับ 6 และพจน์ที่ 15 เท่ากับ -36 จงเขียน 4 พจน์แรกของลำดับเลขคณิตลำดับนี้

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \because a_1 &= 6, a_{15} = -36 \\ \because a_{15} &= a_1 + 14d \\ \text{แทนค่าได้ } -36 &= 6 + 14d \\ 14d &= -42 \\ d &= -3 \\ \therefore 4 \text{ พจน์แรกของลำดับเลขคณิตลำดับนี้คือ } 6, 6 + (-3), 6 + 2(-3), \\ &6 + 3(-3) \text{ หรือ } 6, 3, 0, -3 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 จำนวนเต็มระหว่าง 100 และ 500 ที่ 9 หารลงตัวมีกี่จำนวน

วิธีทำ จำนวนเต็มระหว่าง 100 และ 500 ที่ 9 หารลงตัวได้แก่ 108, 117, 126, ..., 495
ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่ $a_1 = 108$, $d = 9$ และ $a_n = 495$
ให้ลำดับนี้มี n พจน์

$$\begin{aligned}\therefore a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ 495 &= 108 + (n - 1)(9) \\ 495 &= 99 + 9n \\ 9n &= 396 \\ n &= 44\end{aligned}$$

$\therefore$ จำนวนเต็มระหว่าง 100 และ 500 ที่ 9 หารลงตัวมี 44 จำนวน

ตัวอย่างที่ 5 ถ้า 5, x , 15 เรียงเป็นลำดับเลขคณิตจงหา x

วิธีทำ $\therefore$ 5, x , 15 เรียงเป็นลำดับเลขคณิต

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } x - 5 &= 15 - x \\ 2x &= 5 + 15 \\ \therefore x &= \frac{5 + 15}{2} = 10\end{aligned}$$

ข้อสังเกต ถ้า a , b , c เป็นจำนวนจริงซึ่งเรียงเป็นลำดับเลขคณิตแล้ว

$$\text{จะได้ } b = \frac{a + c}{2}$$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนด a , b และ c แทนจำนวนจริง และถ้า 2, a , b , c , 14 เรียงเป็นลำดับเลขคณิตแล้ว จงหา $a + b + c$

วิธีทำ $\therefore$ 2, a , b , c , 14 เรียงเป็นลำดับเลขคณิต และลำดับนี้มี 5 พจน์ $a_1 = 2$, $a_5 = 14$

$$\begin{aligned}\therefore a_5 &= a_1 + 4d \\ 14 &= 2 + 4d \\ 4d &= 12 \\ d &= 3 \\ \therefore a &= 2 + 3 = 5 \\ b &= 5 + 3 = 8 \\ c &= 8 + 3 = 11\end{aligned}$$

$$\therefore a + b + c = 5 + 8 + 11 = 24$$