



หนังสือชุดเทคนิคการเรียนคณิตศาสตร์



ระบบจำนวนจริง

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ประกอบด้วย

- ⊗ ระบบจำนวนจริง
- ⊗ สมบัติของจำนวนจริง
- ⊗ การแก้สมการตัวแปรเดียว
- ⊗ สมบัติของการไม่เท่ากัน
- ⊗ ช่วงของจำนวนจริงและการแก้สมการ
- ⊗ ค่าสัมบูรณ์
- ⊗ สัจพจน์ความสมบูรณ์
- ⊗ ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น
- ⊗ แบบทดสอบระบบจำนวนจริง

กวียา แนวประทีป

วศ.บ.เกียรตินิยม (จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย), M.S., M.A. (University of Michigan, USA)

เทคนิคการเขียนคณิตศาสตร์ : ระบบจำนวนจริง

เขียนโดย กวียา เนาวประทีป

ISBN (E-book) 2025-1024-0049-5

จำหน่ายอีบุ๊ก พฤศจิกายน 2568

ราคา 79 บาท

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ (ฉบับเพิ่มเติม) พ.ศ. 2558

เนื้อหา รูปเล่ม และภาพประกอบในหนังสือเล่มนี้เป็นลิขสิทธิ์ของสำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์
ห้ามคัดลอก ยกเว้นได้รับอนุญาต

บรรณาธิการ กวียา เนาวประทีป

ปก/รูปเล่ม ฝ่ายศิลปกรรม สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

จัดทำโดย

พจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

เลขที่ 45 ซอยจรัญสนิทวงศ์ 40 ถนนจรัญสนิทวงศ์

แขวงบางยี่ขัน เขตบางพลัด กรุงเทพฯ 10700

โทรศัพท์ : 0-2433-7755-7 โทรสาร : 0-2433-7703

จัดจำหน่ายในรูปแบบสิ่งพิมพ์อิเล็กทรอนิกส์โดย

บริษัท เกรท มีเดีย เอเจนซี จำกัด

85 ซอยบรมราชชนนี 75 แขวงบางระมาด เขตตลิ่งชัน กรุงเทพฯ 10170

โทร. 0-2433-7755-7, 086-330-6425

คำนำ

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า เป้าหมายของการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 นั้นมุ่งพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม ทั้งยังสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่นๆ ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข

และเพื่อให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จและบรรลุเป้าหมายในการเรียนกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ผู้เขียนจึงได้จัดทำหนังสือ **เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : ระบบจำนวนจริง** เล่มนี้ขึ้นมา เพื่อให้ผู้เรียนรู้จักเทคนิคในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ให้เก่งได้ด้วยตนเอง ด้วยการนำไปอ่านและฝึกทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบที่มีอยู่อย่างหลากหลาย เฉพาะเรื่องที่สนใจหรือที่ยังไม่เข้าใจอย่างถ่องแท้ให้เข้าใจมากยิ่งขึ้น และยังสามารถนำไปใช้เสริมกับการเรียนกวดวิชาตามสถาบันต่างๆ อีกทั้งครู-อาจารย์ผู้สอนก็สามารถนำไปใช้ประกอบการเรียนการสอนได้ด้วย

หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เรียน ครู-อาจารย์ผู้สอนได้ตามสมควร หากมีข้อบกพร่องหรือผิดพลาดประการใดผู้เขียนต้องขอภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

ด้วยความปรารถนาดี
กวิยา เนาวประทีป
kawiya@physicscenter.com

คำนำสำนักพิมพ์

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า การเรียนการสอนในปัจจุบัน กระทรวงศึกษาธิการ ได้ประกาศใช้หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ที่มีความเหมาะสมชัดเจนทั้งเป้าหมายของหลักสูตรในการมุ่งพัฒนาคุณภาพของผู้เรียนทุกคน ซึ่งเป็นกำลังของชาติ โดยได้มีการกำหนดมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดในรายวิชาไว้อย่างชัดเจน เหมาะสำหรับการเรียนการสอนในแต่ละระดับชั้น

สำนักพิมพ์ฟลิคส์เซ็นเตอร์ได้เล็งเห็นความสำคัญของการเรียนการสอนในกลุ่ม **สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์** ซึ่งได้มีการกำหนดเป้าหมายสำคัญของการพัฒนาคุณภาพผู้เรียนให้สามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเอง นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาชีวิตและใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอ ได้อย่างถูกต้องและชัดเจน เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ดังนั้นทางสำนักพิมพ์ฯ จึงได้จัดทำหนังสือ **เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์** เฉพาะเรื่องขึ้น เพื่อให้ผู้เรียนที่ยังไม่เข้าใจหลักคณิตศาสตร์บางเรื่องได้เลือกนำไปใช้ศึกษาด้วยตนเองให้เข้าใจได้อย่างถ่องแท้ เพราะมีการสรุปหลักในแต่ละเรื่อง มีแบบฝึกหัด และแบบทดสอบที่หลากหลายไว้ให้ลองทำพร้อมเฉลยแยกเล่มไว้ให้ตรวจสอบความถูกต้องได้ด้วยตนเอง

สำนักพิมพ์ฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้คงจะอำนวยประโยชน์ให้แก่ผู้เรียน ครู-อาจารย์ผู้สอน และผู้ที่สนใจในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี

ฝ่ายวิชาการ
สำนักพิมพ์ฟลิคส์เซ็นเตอร์

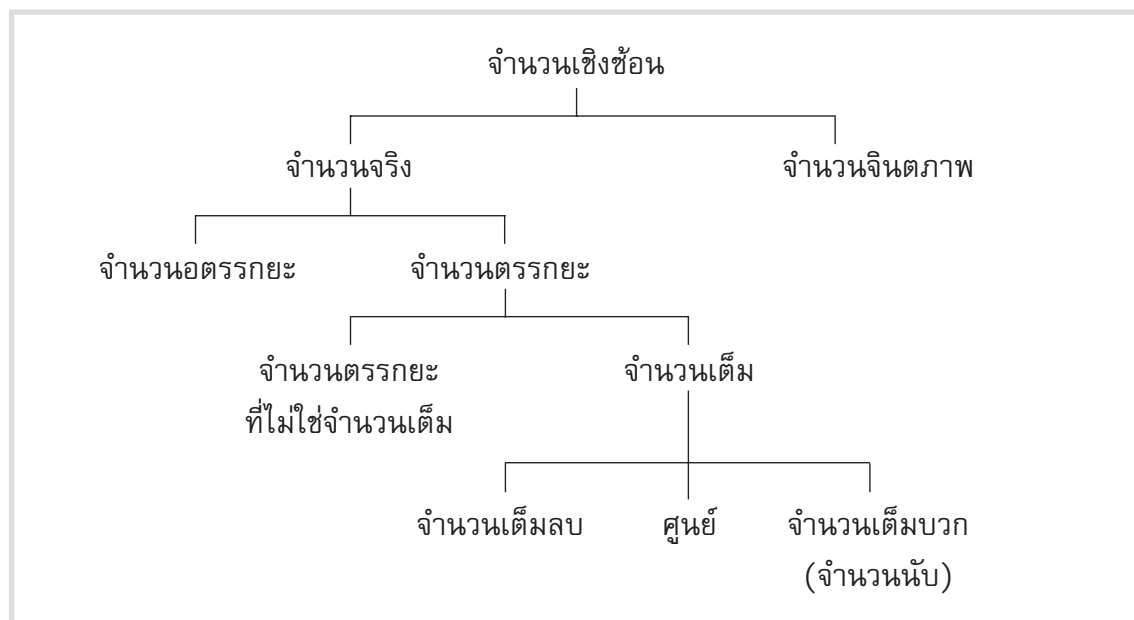
สารบัญ

1. ระบบจำนวนจริง	7
2. สมบัติของจำนวนจริง	10
3. การแก้สมการตัวแปรเดียว	15
4. สมบัติของการไม่เท่ากัน	30
5. ช่วงของจำนวนจริงและการแก้สมการ	32
6. ค่าสัมบูรณ์	62
7. สัจพจน์ความสมบูรณ์	77
8. ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น	82
แบบทดสอบระบบจำนวนจริง	91

ระบบจำนวนจริง

1. ระบบจำนวนจริง

แผนผังแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนชนิดต่าง ๆ



● ระบบจำนวนจริง

จากแผนผังแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนข้างต้น จะพบว่าระบบจำนวนจริงจะประกอบไปด้วย

1. **จำนวนอตรรกยะ** หมายถึง จำนวนที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็ม หรือทศนิยมซ้ำได้ ตัวอย่างเช่น $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$ หรือ π ซึ่งมีค่า 3.14159265...

2. **จำนวนตรรกยะ** หมายถึง จำนวนที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็ม หรือทศนิยมซ้ำได้ ตัวอย่างเช่น

$\frac{1}{2}$ เขียนแทนด้วย 0.5000...

$\frac{1}{3}$ เขียนแทนด้วย 0.3333... = $0.\dot{3}$

$\frac{4}{2}$ เขียนแทนด้วย 2.0000...

$\frac{1}{7}$ เขียนแทนด้วย 0.142857

● ระบบจำนวนตรรกยะ

จำนวนตรรกยะ ยังสามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. **จำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม** หมายถึง จำนวนที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วน หรือทศนิยมซ้ำได้ แต่ไม่เป็นจำนวนเต็ม ตัวอย่างเช่น $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$

2. **จำนวนเต็ม** หมายถึง จำนวนที่เป็นสมาชิกของเซต $I = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ เมื่อกำหนดให้ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม

● ระบบจำนวนเต็ม

จำนวนเต็มยังสามารถแบ่งออกได้อีกเป็น 3 ประเภทด้วยกัน



1. **จำนวนเต็มลบ** หมายถึง จำนวนที่เป็นสมาชิกของเซต I^- โดยที่

$$I^- = \{..., -4, -3, -2, -1\}$$

เมื่อ I^- เป็นเซตของจำนวนเต็มลบ

2. **จำนวนเต็มศูนย์ (0)**

3. **จำนวนเต็มบวก** หมายถึง จำนวนที่เป็นสมาชิกของเซต I^+ โดยที่

$$I^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

เมื่อ I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

จำนวนเต็มบวก เรียกได้อีกอย่างว่า “**จำนวนนับ**” ซึ่งเขียนแทนเซตของจำนวนนับได้ด้วยสัญลักษณ์ N โดยที่

$$N = I^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

● ระบบจำนวนเชิงซ้อน

นอกจากระบบจำนวนจริงที่กล่าวมาข้างต้นแล้ว ยังมีจำนวนอีกประเภทหนึ่ง ซึ่งได้จากการแก้สมการต่อไปนี้

$$x^2 = -1 \quad \therefore x = \sqrt{-1} = i$$

$$x^2 = -2 \quad \therefore x = \sqrt{-2} = \sqrt{2}i$$

$$x^2 = -3 \quad \therefore x = \sqrt{-3} = \sqrt{3}i$$

จะเห็นได้ว่า “ไม่สามารถจะหาจำนวนจริงใดที่ยกกำลังสองแล้วมีค่าเป็นลบ” เราเรียก $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$ หรือจำนวนอื่นๆ ในลักษณะนี้ว่า “จำนวนจินตภาพ” และเรียก $\sqrt{-1}$ ว่า “หนึ่งหน่วยจินตภาพ” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ i

ยูเนียนของเซตจำนวนจริงกับเซตจำนวนจินตภาพ คือ “เซตจำนวนเชิงซ้อน” (Complex numbers)

แบบฝึกหัดที่ 1

จงเขียนเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่เป็นจริง และเขียนเครื่องหมาย ✗ หน้าข้อความที่เป็นเท็จ

- _____ 1. 0 เป็นจำนวนเต็มบวก
- _____ 2. $\sqrt{(-9)^2}$ เป็นจำนวนเต็มลบ
- _____ 3. $-|-4|$ เป็นจำนวนเต็มบวก
- _____ 4. $\sqrt{9} + \sqrt{4}$ เป็นจำนวนเต็มบวก
- _____ 5. $\sqrt{4}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
- _____ 6. $-\frac{2}{9}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
- _____ 7. 0.1234 เป็นจำนวนตรรกยะ
- _____ 8. 3.1444... เป็นจำนวนอตรรกยะ
- _____ 9. 1.999... เป็นจำนวนเต็ม
- _____ 10. 3.173... เป็นจำนวนอตรรกยะ
- _____ 11. 3.232232223... เป็นจำนวนตรรกยะ
- _____ 12. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
- _____ 13. $\sqrt{\sqrt{16}}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
- _____ 14. $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนจริง เมื่อ x เป็นจำนวนจริง
- _____ 15. เมื่อ $x \geq 0$ แล้ว $\sqrt{x} \geq 0$

- _____ 16. เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว $\sqrt{x^2} = |x|$
- _____ 17. จำนวนที่เขียนได้ในรูป $\frac{a}{b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$ เรียกจำนวนนั้นว่า จำนวนตรรกยะ
- _____ 18. จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนที่ไม่สามารถจะเขียนได้ในรูป $\frac{a}{b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็มและ $b \neq 0$
- _____ 19. จำนวนที่เขียนได้ในรูปทศนิยมซ้ำ เป็นจำนวนตรรกยะ
- _____ 20. จำนวนที่เขียนในรูปทศนิยมไม่ซ้ำ เป็นจำนวนอตรรกยะ
- _____ 21. $\frac{\pi}{0}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
- _____ 22. $\frac{0}{\pi}$ เป็นจำนวนจริง
- _____ 23. มีจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุด
- _____ 24. มีจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุด
- _____ 25. มีจำนวนเต็มลบที่มีค่ามากที่สุด
- _____ 26. มีจำนวนเต็มลบที่มีค่าน้อยที่สุด
- _____ 27. มีจำนวนตรรกยะที่มีค่าน้อยที่สุด
- _____ 28. มีจำนวนตรรกยะที่มีค่ามากที่สุด
- _____ 29. มีจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุด ที่มีค่าน้อยกว่า 1,000
- _____ 30. มีจำนวนเต็มลบที่มีค่าน้อยที่สุด ที่มีค่ามากกว่า -1,000
- _____ 31. ถ้า $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว x เป็นจำนวนตรรกยะ
- _____ 32. ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
- _____ 33. มีจำนวนจริง x ที่ $\sqrt{x} < 0$
- _____ 34. ถ้า x เป็นจำนวนจริง แล้ว x ต้องเป็นจำนวนตรรกยะ หรืออตรรกยะ
- _____ 35. $\sqrt{|x|}$ เป็นจำนวนจริงเสมอ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

2. สมบัติของจำนวนจริง

● สมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง

กำหนด a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. สมบัติการสะท้อน $a = a$
2. สมบัติการสมมาตร ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
3. สมบัติการถ่ายทอด ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$

4. สมบัติของการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
5. สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

● สมบัติของการบวกในระบบจำนวนจริง

กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. สมบัติปิดของการบวก $a + b$ เป็นจำนวนจริง
2. สมบัติการสลับที่ของการบวก $a + b = b + a$
3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวก $a + (b + c) = (a + b) + c$
4. เอกลักษณ์การบวก $\because 0 + a = a = a + 0$
นั่นคือ ในระบบจำนวนจริงจะมี 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก
5. อินเวอร์สการบวก $\because a + (-a) = 0 = (-a) + a$
นั่นคือ ในระบบจำนวนจริง จำนวนจริง a จะมี $-a$ เป็นอินเวอร์สของการบวก

● สมบัติของการคูณในระบบจำนวนจริง

กำหนด a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. สมบัติปิดของการคูณ ab เป็นจำนวนจริง
2. สมบัติการสลับที่ของการคูณ $ab = ba$
3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ $a(bc) = (ab)c$
4. เอกลักษณ์การคูณ $\because 1 \cdot a = a = a \cdot 1$
นั่นคือ ในระบบจำนวนจริงมี 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ
5. อินเวอร์สการคูณ $\because a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$
นั่นคือ ในระบบจำนวนจริง จำนวนจริง a จะมี a^{-1} เป็นอินเวอร์สการคูณ
6. สมบัติของการแจกแจง

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(b + c)a = ba + ca$$

จากสมบัติของระบบจำนวนจริงที่ได้กล่าวไปแล้ว สามารถนำมาพิสูจน์เป็นทฤษฎีบทต่างๆ ได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1

กฎการตัดออกสำหรับการบวก

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ

ถ้า $a + c = b + c$ แล้ว $a = b$

ถ้า $a + b = a + c$ แล้ว $b = c$

ทฤษฎีบทที่ 2**กฎการตัดออกสำหรับการคูณ**เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆถ้า $ac = bc$ และ $c \neq 0$ แล้ว $a = b$ ถ้า $ab = ac$ และ $a \neq 0$ แล้ว $b = c$ **ทฤษฎีบทที่ 3**เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$a \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot a = 0$$

ทฤษฎีบทที่ 4เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$(-1)a = -a$$

$$a(-1) = -a$$

ทฤษฎีบทที่ 5เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$ **ทฤษฎีบทที่ 6**เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$a(-b) = -ab$$

$$(-a)b = -ab$$

$$(-a)(-b) = ab$$

เราสามารถนิยามการลบและการหารจำนวนจริงได้โดยอาศัยสมบัติของการบวกและการคูณในระบบจำนวนจริงที่ได้กล่าวไปแล้วข้างต้น

● การลบจำนวนจริง

บทนิยามเมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$a - b = a + (-b)$$

นั่นคือ $a - b$ คือ ผลบวกของ a กับอินเวอร์สการบวกของ b

● การหารจำนวนจริง

บทนิยาม

เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $b \neq 0$

$$\frac{a}{b} = a(b^{-1})$$

นั่นคือ $\frac{a}{b}$ คือ ผลคูณของ a กับอินเวอร์สการคูณของ b

แบบฝึกหัดที่ 2

จงเขียนเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่เป็นจริง และเขียนเครื่องหมาย X หน้าข้อความที่เป็นเท็จ

- _____ 1. จำนวนเต็มบวกมีสมบัติปิดสำหรับการบวก
- _____ 2. จำนวนเต็มลบมีสมบัติปิดสำหรับการบวก
- _____ 3. จำนวนเต็มมีสมบัติปิดสำหรับการบวก
- _____ 4. จำนวนเต็มบวกมีสมบัติปิดสำหรับการคูณ
- _____ 5. จำนวนเต็มลบมีสมบัติปิดสำหรับการคูณ
- _____ 6. จำนวนเต็มมีสมบัติปิดสำหรับการคูณ
- _____ 7. จำนวนตรรกยะมีสมบัติปิดสำหรับการบวก
- _____ 8. จำนวนตรรกยะมีสมบัติปิดสำหรับการหาร ที่ตัวหารไม่เป็นศูนย์
- _____ 9. จำนวนอตรรกยะมีสมบัติปิดสำหรับการบวก
- _____ 10. จำนวนอตรรกยะมีสมบัติปิดสำหรับการคูณ
- _____ 11. ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $a + b \in \mathbb{R}$
- _____ 12. ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $ab \in \mathbb{R}$
- _____ 13. ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $ab = ba$
- _____ 14. ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง แล้ว $(a + b) + c = a + (b + c)$
- _____ 15. ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง แล้ว $(ab)c = a(bc)$
- _____ 16. ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง แล้ว $a(b + c) = ab + ac$
- _____ 17. 0 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวกจำนวนจริง
- _____ 18. 1 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการคูณจำนวนจริง
- _____ 19. ถ้า a เป็นจำนวนจริงแล้ว $-a$ เป็นอินเวอร์สสำหรับการบวกของ a