



หนังสือชุดเทคนิคการเขียนคณิตศาสตร์



เมตริกซ์

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ประกอบด้วย

- ⊗ ความหมายของเมตริกซ์
- ⊗ การบวกเมตริกซ์
- ⊗ การคูณเมตริกซ์ด้วยจำนวนจริง
- ⊗ การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์
- ⊗ ดีเทอร์มิแนนต์
- ⊗ การหาอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์
- ⊗ การใช้เมตริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น
- ⊗ แบบทดสอบเมตริกซ์

กวียา นาอประทีป

วศ.บ.เกียรตินิยม (จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย), M.S., M.A. (University of Michigan, USA)

เทคนิคการเขียนคณิตศาสตร์ : เมตริกซ์

เขียนโดย กวียา เนาวประทีป

ISBN (E-book) 2025-1024-0048-8

จำหน่ายอีบุ๊ก พฤศจิกายน 2568

ราคา 69 บาท

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ (ฉบับเพิ่มเติม) พ.ศ. 2558

เนื้อหา รูปเล่ม และภาพประกอบในหนังสือเล่มนี้เป็นลิขสิทธิ์ของสำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์
ห้ามคัดลอก ยกเว้นได้รับอนุญาต

บรรณาธิการ กวียา เนาวประทีป

ปก/รูปเล่ม ฝ่ายศิลปกรรม สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

จัดทำโดย

พจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

เลขที่ 45 ซอยจรัญสนิทวงศ์ 40 ถนนจรัญสนิทวงศ์

แขวงบางยี่ขัน เขตบางพลัด กรุงเทพฯ 10700

โทรศัพท์ : 0-2433-7755-7 โทรสาร : 0-2433-7703

จัดจำหน่ายในรูปแบบสิ่งพิมพ์อิเล็กทรอนิกส์โดย

บริษัท เกรท มีเดีย เอเจนซี จำกัด

85 ซอยบรมราชชนนี 75 แขวงบางระมาด เขตตลิ่งชัน กรุงเทพฯ 10170

โทร. 0-2433-7755-7, 086-330-6425

คำนำ

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า เป้าหมายของการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 นั้นมุ่งพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม ทั้งยังสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่นๆ ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข

และเพื่อให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จและบรรลุเป้าหมายในการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ผู้เขียนจึงได้จัดทำหนังสือ **เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : เมตริกซ์** เล่มนี้ขึ้นมา เพื่อให้ผู้เรียนรู้จักเทคนิคในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ให้เก่งได้ด้วยตนเอง ด้วยการนำไปอ่านและฝึกทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบที่มีอยู่อย่างหลากหลาย เฉพาะเรื่องที่สนใจหรือที่ยังไม่เข้าใจอย่างถ่องแท้ให้เข้าใจมากยิ่งขึ้น และยังสามารถนำไปใช้เสริมกับการเรียนกวดวิชาตามสถาบันต่างๆ อีกทั้งครู-อาจารย์ผู้สอนก็สามารถนำไปใช้ประกอบการเรียนการสอนได้ด้วย

หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เรียน ครู-อาจารย์ผู้สอนได้ตามสมควร หากมีข้อบกพร่องหรือผิดพลาดประการใดผู้เขียนต้องขอภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

ด้วยความปรารถนาดี
กวิยา เนาวประทีป
kawiya@physicscenter.com

คำนำสำนักพิมพ์

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า การเรียนการสอนในปัจจุบัน กระทรวงศึกษาธิการ ได้ประกาศใช้หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ที่มีความเหมาะสมชัดเจนทั้งเป้าหมายของหลักสูตรในการมุ่งพัฒนาคุณภาพของผู้เรียนทุกคน ซึ่งเป็นกำลังของชาติ โดยได้มีการกำหนดมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดในรายวิชาไว้อย่างชัดเจน เหมาะสำหรับการเรียนการสอนในแต่ละระดับชั้น

สำนักพิมพ์ฟลิคส์เซ็นเตอร์ได้เล็งเห็นความสำคัญของการเรียนการสอนในกลุ่ม **สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์** ซึ่งได้มีการกำหนดเป้าหมายสำคัญของการพัฒนาคุณภาพผู้เรียนให้สามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเอง นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาชีวิตและใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอ ได้อย่างถูกต้องและชัดเจน เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ดังนั้นทางสำนักพิมพ์ฯ จึงได้จัดทำหนังสือ **เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์** เฉพาะเรื่องขึ้น เพื่อให้ผู้เรียนที่ยังไม่เข้าใจหลักคณิตศาสตร์บางเรื่องได้เลือกนำไปใช้ศึกษาด้วยตนเองให้เข้าใจได้อย่างถ่องแท้ เพราะมีการสรุปหลักในแต่ละเรื่อง มีแบบฝึกหัด และแบบทดสอบที่หลากหลายไว้ให้ลองทำพร้อมเฉลยแยกเล่มไว้ให้ตรวจสอบความถูกต้องได้ด้วยตนเอง

สำนักพิมพ์ฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้คงจะอำนวยประโยชน์ให้แก่ผู้เรียน ครู-อาจารย์ผู้สอน และผู้ที่สนใจในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี

ฝ่ายวิชาการ
สำนักพิมพ์ฟลิคส์เซ็นเตอร์

สารบัญ

1. ความหมายของเมตริกซ์	7
2. การบวกเมตริกซ์	14
3. การคูณเมตริกซ์ด้วยจำนวนจริง	21
4. การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์	29
5. ดีเทอร์มิแนนต์	48
6. การหาอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์	65
7. การใช้เมตริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น	72
แบบทดสอบเมตริกซ์	79

เมตริกซ์

1. ความหมายของเมตริกซ์



บทนิยาม

“เมตริกซ์” (Matrix) คือ การนำเลขจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อน มาเขียนเรียงกันเป็นแถวๆ ภายในวงเล็บเล็ก หรือวงเล็บใหญ่

ตัวอย่างเช่น $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

การบอกตำแหน่งของสมาชิก

$$\begin{array}{lcl} \text{แถวที่ 1} & \rightarrow & \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ \text{แถวที่ 2} & \rightarrow & \begin{bmatrix} 6 & 10 & 7 & 11 \end{bmatrix} \\ \text{แถวที่ 3} & \rightarrow & \begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \\ & & \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{หลักที่ 1} & \text{หลักที่ 2} & \text{หลักที่ 3} & \text{หลักที่ 4} \end{array} \end{array}$$

มิติและสัญลักษณ์ของเมตริกซ์

เมตริกซ์ที่มี m แถว n หลัก เรียกว่า “ $m \times n$ เมตริกซ์” และเรียก $m \times n$ ว่า “มิติของเมตริกซ์” และมีสมาชิก mn จำนวน

ตัวอย่างเช่น $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ เป็น “ 2×2 เมตริกซ์” มีมิติเท่ากับ 2×2

และมีสมาชิก 4 จำนวน

$[0]$ เป็น “ 1×1 เมตริกซ์” มีมิติเท่ากับ 1×1

และมีสมาชิก 1 จำนวน

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ เป็น “ 2×3 เมตริกซ์” มีมิติเท่ากับ 2×3

และมีสมาชิก 6 จำนวน

โดยทั่วไปเราสามารถเขียน a_{ij} แทนสมาชิกของเมตริกซ์ในแถวที่ i หลักที่ j

ทรานสโพสเมตริกซ์



บทนิยาม

ถ้า A เป็น $m \times n$ เมตริกซ์แล้ว ทรานสโพสของ A (transpose of A) เขียนแทนด้วย A^t คือ $n \times m$ เมตริกซ์ ที่มีสมาชิกหลักที่ i เหมือนสมาชิกแถวที่ i ของเมตริกซ์ A เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$$\begin{aligned} \text{ตัวอย่างเช่น } A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

การเท่ากันของเมตริกซ์



บทนิยาม

เมตริกซ์ A และเมตริกซ์ B จะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ เมตริกซ์ทั้งสองมีมิติเท่ากัน และสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน มีค่าเท่ากัน หรือ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุกค่าของ i และ j

$$\begin{aligned} \text{ตัวอย่างเช่น } \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 + 1 & 5 \\ 2 + 2 & 2 \times 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \textcircled{9} \end{bmatrix} &\neq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \textcircled{10} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่

1

1. กำหนด $A = [3]$

1) จงบอกมิติของเมตริกซ์ A

.....

2) เมตริกซ์ A มีกี่แถว และกี่หลัก และสมาชิกของแต่ละแถว และแต่ละหลักมีอะไรบ้าง

.....

.....

.....

2. กำหนด $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 10 & 6 \end{bmatrix}$

1) จงบอกมิติของเมตริกซ์ B

.....

2) เมตริกซ์ B มีกี่แถว และกี่หลัก และสมาชิกของแต่ละแถว และแต่ละหลักมีอะไรบ้าง

.....

.....

.....

.....

.....

3. กำหนด $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

1) จงบอกมิติของเมตริกซ์ C

.....

2) เมตริกซ์ C มีกี่แถว และกี่หลัก และสมาชิกของแต่ละหลัก และแต่ละแถวมีอะไรบ้าง

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. 1) จงเขียนเมตริกซ์ที่มีมิติ 1×3 ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงมา 1 เมตริกซ์

.....

.....

.....

2) จงเขียนเมตริกซ์ที่มีมิติ 2×4 ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงมา 1 เมตริกซ์

.....

.....

.....

- 3) จงเขียนเมตริกซ์ที่มีมิติ 2×2 ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงมา 1 เมตริกซ์

.....

.....

.....

- 4) จงเขียนเมตริกซ์ที่มีมิติ 3×4 ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงมา 1 เมตริกซ์

.....

.....

.....

5. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

จากเมตริกซ์ A ที่กำหนดให้ $a_{ij} = 1$ เมื่อ i และ j สัมพันธ์กันอย่างไร

ตอบ

$a_{ij} = 0$ เมื่อ i และ j สัมพันธ์กันอย่างไร

ตอบ

6. จงเขียนทรานสโพสของเมตริกซ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $A = [2 \ 3 \ 4]$

$\therefore A^t =$

.....

.....

2) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

$\therefore B^t =$

.....

.....

3) $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

$\therefore C^t =$

.....

.....

4) $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

$\therefore D^t =$

.....

.....

5) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore E^t =$

.....

.....

7. กำหนด $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ จงหา

1) A^t

.....

.....

.....

2) $(A^t)^t$

.....

.....

.....

3) $((A^t)^t)^t$

.....

.....

.....

8. กำหนด x, y และ z เป็นจำนวนจริง

1) ถ้า $\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ แล้ว

$x =$