



หนังสือชุดเทคนิคการเขียนคณิตศาสตร์



ตรีโกณมิติ

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ประกอบด้วย

- ⊗ อัตราส่วนตรีโกณมิติ
- ⊗ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- ⊗ ตรีโกณมิติและการประยุกต์
- ⊗ แบบทดสอบตรีโกณมิติ

กวียา แนวประทีป

วศ.บ.เกียรตินิยม (จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย), M.S., M.A. (University of Michigan, USA)

เทคนิคการเขียนคณิตศาสตร์ : ตรรกณมิติ

เขียนโดย กวียา เนาวประทีป

ISBN (E-book) 2025-1024-0046-4

จำหน่ายอีบุ๊ก พฤศจิกายน 2568

ราคา 175 บาท

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ (ฉบับเพิ่มเติม) พ.ศ. 2558

เนื้อหา รูปเล่ม และภาพประกอบในหนังสือเล่มนี้เป็นลิขสิทธิ์ของสำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์
ห้ามคัดลอก ยกเว้นได้รับอนุญาต

บรรณาธิการ กวียา เนาวประทีป

ปก/รูปเล่ม ฝ่ายศิลปกรรม สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

จัดทำโดย

พจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

เลขที่ 45 ซอยจรัญสนิทวงศ์ 40 ถนนจรัญสนิทวงศ์

แขวงบางยี่ขัน เขตบางพลัด กรุงเทพฯ 10700

โทรศัพท์ : 0-2433-7755-7 โทรสาร : 0-2433-7703

จัดจำหน่ายในรูปแบบสิ่งพิมพ์อิเล็กทรอนิกส์โดย

บริษัท เกรท มีเดีย เอเจนซี จำกัด

85 ซอยบรมราชชนนี 75 แขวงบางระมาด เขตตลิ่งชัน กรุงเทพฯ 10170

โทร. 0-2433-7755-7, 086-330-6425

คำนำ

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า เป้าหมายของการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 นั้นมุ่งพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม ทั้งยังสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่นๆ ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข

และเพื่อให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จและบรรลุเป้าหมายในการเรียนกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ผู้เขียนจึงได้จัดทำหนังสือ **เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : ตรีโกณมิติ** เล่มนี้ขึ้นมา เพื่อให้ผู้เรียนรู้จักเทคนิคในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ให้เก่งได้ด้วยตนเอง ด้วยการนำไปอ่านและฝึกทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบที่มีอยู่อย่างหลากหลาย เฉพาะเรื่องที่ตนสนใจหรือที่ยังไม่เข้าใจอย่างถ่องแท้ให้เข้าใจมากยิ่งขึ้น และยังสามารถนำไปใช้เสริมกับการเรียนกวดวิชาตามสถาบันต่างๆ อีกทั้งครู-อาจารย์ผู้สอนก็สามารถนำไปใช้ประกอบการเรียนการสอนได้ด้วย

หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เรียน ครู-อาจารย์ผู้สอนได้ตามสมควร หากมีข้อบกพร่องหรือผิดพลาดประการใดผู้เขียนต้องขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

ด้วยความปรารถนาดี
กวิยา เนาวประทีป
kawiya@physicscenter.com

คำนำสำนักพิมพ์

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า การเรียนการสอนในปัจจุบัน กระทรวงศึกษาธิการ ได้ประกาศใช้หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ที่มีความเหมาะสมชัดเจนทั้งเป้าหมายของหลักสูตรในการมุ่งพัฒนาคุณภาพของผู้เรียนทุกคน ซึ่งเป็นกำลังของชาติ โดยได้มีการกำหนดมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดในรายวิชาไว้อย่างชัดเจน เหมาะสำหรับการเรียนการสอนในแต่ละระดับชั้น

สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์ได้เล็งเห็นความสำคัญของการเรียนการสอนในกลุ่ม **สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์** ซึ่งได้มีการกำหนดเป้าหมายสำคัญของการพัฒนาคุณภาพผู้เรียนให้สามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเอง นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาชีวิตและใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ดังนั้นทางสำนักพิมพ์ฯ จึงได้จัดทำหนังสือ **เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์** เฉพาะเรื่องขึ้น เพื่อให้ผู้เรียนที่ยังไม่เข้าใจหลักคณิตศาสตร์บางเรื่องได้เลือกนำไปใช้ศึกษาด้วยตนเองให้เข้าใจได้อย่างถ่องแท้ เพราะมีการสรุปหลักในแต่ละเรื่อง มีแบบฝึกหัด และแบบทดสอบที่หลากหลายไว้ให้ลองทำพร้อมเฉลยแยกเล่มไว้ให้ตรวจสอบความถูกต้องได้ด้วยตนเอง

สำนักพิมพ์ฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้คงจะอำนวยประโยชน์ให้แก่ผู้เรียน ครู-อาจารย์ผู้สอน และผู้ที่สนใจในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี

ฝ่ายวิชาการ
สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

สารบัญ

1. อัตราส่วนตรีโกณมิติ	7
1.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	7
1.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 60° , และ 45°	11
1.3 การนำไปใช้	15
1.4 อัตราส่วนตรีโกณมิติอื่นๆ ที่ควรทราบ	18
1.5 ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ควรทราบ	22
แบบทดสอบอัตราส่วนตรีโกณมิติ	23
2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	26
2.1 วงกลมหนึ่งหน่วย	26
2.2 ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์	31
2.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ	33
2.4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม	46
2.5 ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติ	60
2.6 สมการตรีโกณมิติ	66
2.7 การอ่านฟังก์ชันตรีโกณมิติ	72
2.8 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	77
แบบทดสอบฟังก์ชันตรีโกณมิติ	90

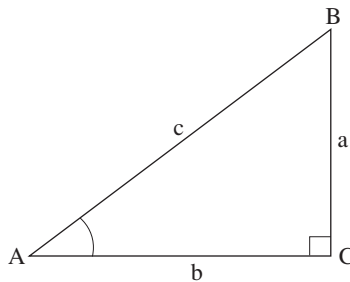
3. ตรรกโกณมิติและการประยุกต์	99
3.1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม	99
3.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุม 2α	115
3.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุม 3α	123
3.4 ผลคูณ ผลบวก และผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	128
3.5 อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	138
3.6 การแก้สามเหลี่ยม	156
3.7 การหาระยะทางและความสูง	166
แบบทดสอบตรรกโกณมิติและการประยุกต์	180

ตรีโกณมิติ

1. อัตราส่วนตรีโกณมิติ

1.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ ความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



อัตราส่วนของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่สัมพันธ์กับมุม A คือ

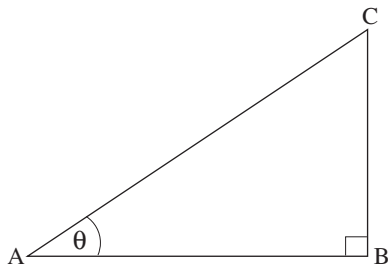
$$\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A} = \frac{a}{b}$$

แบบฝึกหัดที่ 1.1

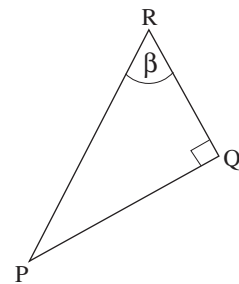
1. จงหาค่าอัตราส่วนของความยาวของด้าน ซึ่งเป็นค่า sine, cosine และ tangent ของมุม θ และ β ในรูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้



$$\sin \theta = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos \theta = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan \theta = \underline{\hspace{2cm}}$$

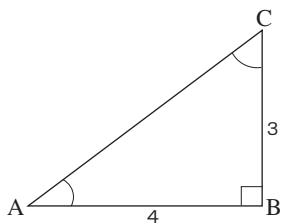


$$\sin \beta = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos \beta = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan \beta = \underline{\hspace{2cm}}$$

2.



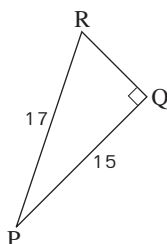
จากรูป จงหา

$$\sin A = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos A = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan A = \underline{\hspace{2cm}}$$

3.



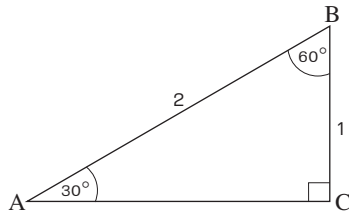
จากรูป จงหา

$$\sin P = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos R = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan P = \underline{\hspace{2cm}}$$

4. จากรูป $\triangle ABC$ มี $\hat{A} = 30^\circ$ และ $\hat{B} = 60^\circ$ และ $AB = 2$ หน่วย, $BC = 1$ หน่วย จงหา



$$\sin 30^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos 30^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$$

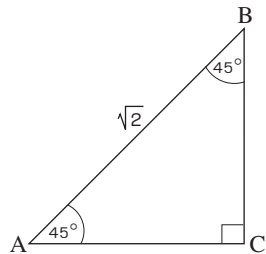
$$\tan 30^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin 60^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos 60^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan 60^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$$

5. จากรูป $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ มุมฉาก มี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก และ $\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$ และ $AB = \sqrt{2}$ หน่วย จงหา



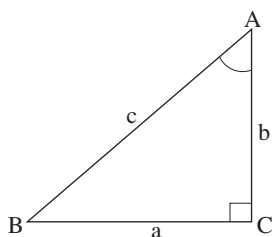
$$\sin 45^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos 45^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan 45^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$$

6. จงหาอัตราส่วนของความยาวของด้านซึ่งเป็นค่าไซน์ (sine), โคไซน์ (cosine) และแทนเจนต์ (tangent) ของมุมแหลมในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้

1)



$$\sin A = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos A = \underline{\hspace{2cm}}$$

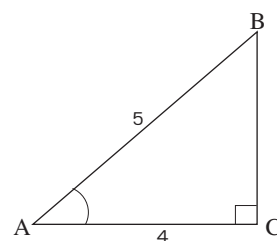
$$\tan A = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan B = \underline{\hspace{2cm}}$$

2)



$$\sin A = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos A = \underline{\hspace{2cm}}$$

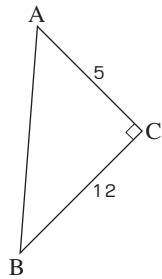
$$\tan A = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan B = \underline{\hspace{2cm}}$$

3)



$$\sin A = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos A = \underline{\hspace{2cm}}$$

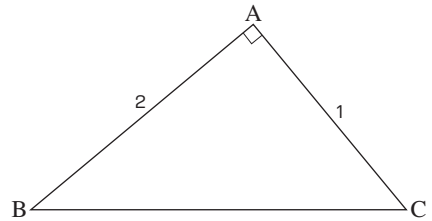
$$\tan A = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan B = \underline{\hspace{2cm}}$$

4)



$$\sin B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos B = \underline{\hspace{2cm}}$$

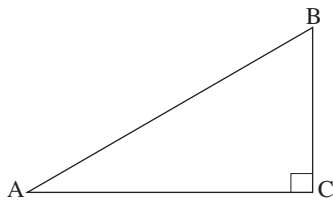
$$\tan B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos C = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan C = \underline{\hspace{2cm}}$$

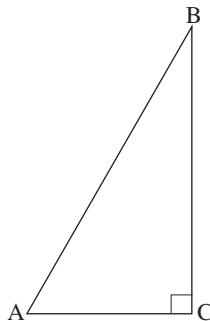
$$\sin C = \underline{\hspace{2cm}}$$

7.



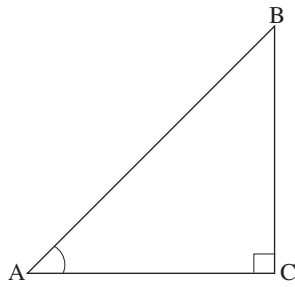
จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก และถ้า $\sin A = \frac{1}{2}$ จงหา $\tan A$

8.



จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก และถ้า $\cos A = \frac{1}{2}$ จงหา $\tan A$

9.



จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก และถ้า $\tan A = 1$ จงหา $\sin A$ และ $\cos B$

1.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 60° และ 45°

	$\sin A = \frac{BC}{AB}$ $\cos A = \frac{AC}{AB}$ $\tan A = \frac{BC}{AC}$
	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
	$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\tan 45^\circ = 1$
	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

แบบฝึกหัดที่ 1.2

1. จงหาค่าของ

1) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$

2) $\sin 45^\circ - \cos 45^\circ + \tan 60^\circ$

3) $\sin 60^\circ - \cos 30^\circ + \tan 45^\circ$

4) $\tan^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ$

5) $3\tan^2 45^\circ + 4\sin^2 30^\circ - \tan^2 60^\circ$

6) $\sin 45^\circ \cos 45^\circ \cos 60^\circ$

7) $\frac{1}{3} \tan^2 60^\circ + \sin 60^\circ \tan 30^\circ - \frac{1}{2} \tan 45^\circ$

8) $2\sin 30^\circ \tan 45^\circ - \cos 30^\circ \tan 30^\circ + \frac{1}{6} \tan^2 60^\circ$

2. ถ้า $x \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \tan 45^\circ \sin 45^\circ$ จงหา x

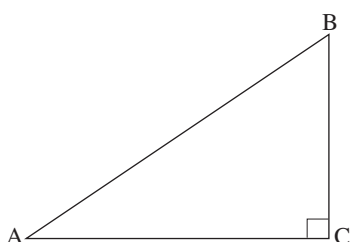
3. ถ้า $\tan^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ = x \sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan^2 60^\circ$ จงหา x

1.3 การนำไปใช้

เราสามารถนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหาดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 สามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง มีมุมแหลมมุมหนึ่งกาง 30 องศา และด้านที่ยาวที่สุด ยาว $4\sqrt{3}$ นิ้ว จงหาด้านสั้นที่สุด

วิธีทำ ให้ ABC เป็น Δ มุมฉาก มี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก และ $\hat{A} = 30^\circ$ และ $AB = 4\sqrt{3}$ นิ้ว
 $\therefore$ BC เป็นด้านที่สั้นที่สุด



$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{แทนค่าได้ } \sin 30^\circ = \frac{BC}{4\sqrt{3}}$$

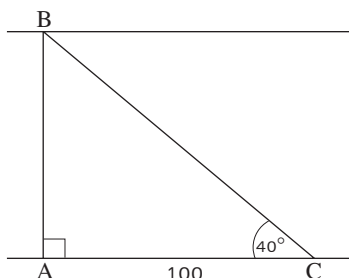
$$\frac{1}{2} = \frac{BC}{4\sqrt{3}}$$

$$BC = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ หน่วย}$$

ตัวอย่างที่ 2 ชายคนหนึ่งต้องการวัดส่วนกว้างของแม่น้ำ เขายืนอยู่ริมฝั่งที่จุด A แล้วมองข้ามไปที่จุด B ซึ่งอยู่ตรงข้าม ซึ่งเป็นระยะที่สั้นที่สุด แล้วเขาเดินเลียบฝั่งแม่น้ำไปเป็นระยะทาง 100 เมตร ก็หยุดอยู่ที่จุด C วัดมุม ACB ได้ 40° จงหาความกว้างของแม่น้ำ (กำหนด $\tan 40^\circ = 0.839$)

วิธีทำ จากรูป AB เป็นความกว้างของแม่น้ำ

ABC เป็น Δ มุมฉาก มี $\hat{A} = 90^\circ$ และ $\hat{C} = 40^\circ$



$$\therefore \frac{AB}{AC} = \tan 40^\circ$$

$$AB = AC \tan 40^\circ$$

$$= 100 \times 0.839$$

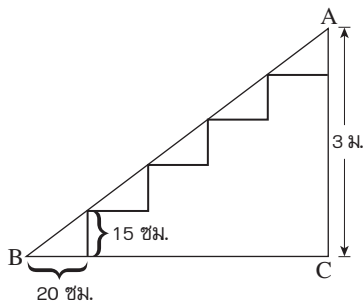
$$= 83.90 \text{ เมตร}$$

$$\therefore \text{แม่น้ำกว้าง } 83.90 \text{ เมตร}$$

ตัวอย่างที่ 3 ตึกสองชั้นหลังหนึ่งมีพื้นชั้นล่างต่ำกว่าชั้นบน 3 เมตร มีบันไดทอดเดียว ชั้นบนใดแต่ละชั้นกว้าง 20 เซนติเมตร และสูงกว่ากัน 15 เซนติเมตร จงหาว่าบันไดยาวเท่าไร และบันไดทำมุมกับพื้นกี่องศา (กำหนด $\tan 37^\circ \approx 0.75$)

วิธีทำ

จากรูป AB เป็นความยาวของบันได,



$$AC = 3 \text{ เมตร}$$

$\therefore$ บันไดแต่ละขั้นสูง 15 เซนติเมตร

$$\therefore \text{บันไดมี} = \frac{300}{15} = 20 \text{ ขั้น}$$

และ บันไดแต่ละขั้นกว้าง 20 เซนติเมตร

$$\therefore \text{บันไดอยู่ห่างจากจุด } C = 20 \times 20 \\ = 400 \text{ เซนติเมตร} = 4 \text{ เมตร}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB^2 &= BC^2 + CA^2 \\ &= 4^2 + 3^2 \\ &= 16 + 9 = 25 = 5^2 \end{aligned}$$

$$\therefore AB = 5 \text{ เมตร}$$

$\therefore$ บันไดยาว 5 เมตร

$$\text{และ } \therefore \frac{AC}{BC} = \tan B$$

$$\frac{3}{4} = \tan B$$

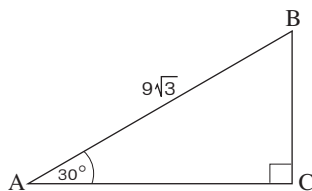
$$\therefore \tan B = 0.75 = \tan 37^\circ$$

$$\therefore B = 37^\circ$$

$\therefore$ บันไดทำมุมกับพื้น 37 องศา

แบบฝึกหัดที่ 1.3

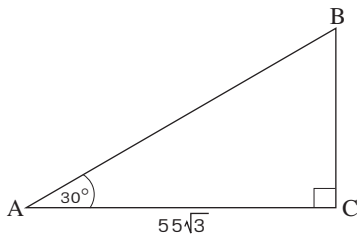
1.



จากรูป ABC เป็น Δ มี $\hat{C} = 90^\circ$, $\hat{A} = 30^\circ$

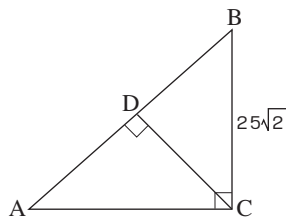
และ $AB = 9\sqrt{3}$ จงหา BC, AC และ $\hat{B}$

2.



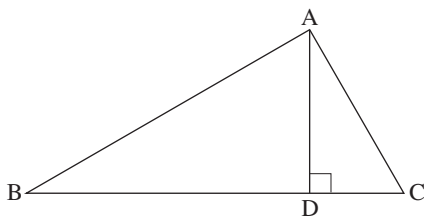
จากรูป ABC เป็น Δ มี $\hat{C} = 90^\circ$, $\hat{A} = 30^\circ$
และ $AC = 55\sqrt{3}$ จงหา AB และ BC

3.



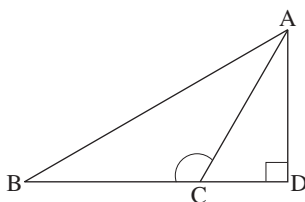
จากรูป ABC เป็น Δ ที่มี $\hat{C} = 90^\circ$,
 $AB = 50$ และ $BC = 25\sqrt{2}$ ลาก $CD \perp AB$
ที่ D จงหา $\hat{A}$, AC และ CD

4.



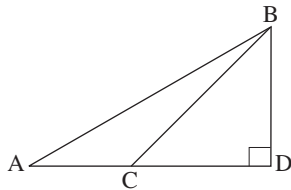
จากรูป ABC เป็น Δ ที่มี $\hat{B} = 30^\circ$,
 $\hat{C} = 60^\circ$ ลาก $AD \perp BC$ และ $BD = 15$
นี้ จงหา AB และ AC

5.



จากรูป ABC เป็น Δ ที่มี $\hat{B} = 30^\circ$, $\hat{C} = 120^\circ$
และ $BC = 10$ ฟุต ลาก AD ตั้งฉากกับ BC ที่
ต่อออกไปที่ D จงหา AD และ AB

6.



จากรูป ABC เป็น Δ ที่มี $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{C} = 135^\circ$
และ $AC = 100$ ฟุต ลาก BD ตั้งฉากกับ AC
ที่ต่อออกไปที่ D จงหา AD

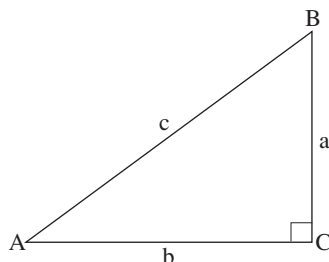
7. ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนพื้นดิน ณ จุด ๆ หนึ่ง มองดูยอดเสาธงเป็นมุมยกขึ้น 60° องศา ถ้าชายคนนั้นยืนอยู่ห่างจากเสาธงเป็นระยะ 100 เมตร จงหาความสูงของเสาธง

8. ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนหน้าผาสูง 100 เมตร มองเห็นกองหินบนพื้นดินเบื้องล่างในแนวเดียวกับเชิงผาเป็นมุมกดลง 30° องศา จงหาว่ากองหินนั้นอยู่ห่างจากเชิงผากี่เมตร

9. ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนพื้นดิน ณ จุด ๆ หนึ่ง มองดูยอดเสาธงเป็นมุมเงย 30° องศา เมื่อเขาเดินเข้าไปใกล้เสาธงเป็นระยะ 100 เมตร เขาจะเห็นมุมเงยของยอดเสาธงเป็น 60° องศา จงหาความสูงของเสาธง

10. ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนหน้าผาสูง 100 ฟุต เห็นกองหินสองกองบนพื้นดินเบื้องล่างในแนวเดียวกันกับเชิงผา ถ้ามุมกวดลงของกองหินทั้งสองเป็น 60° และ 45° ตามลำดับ จงหาว่ากองหินสองกองนั้นอยู่ห่างกันเท่าไร

1.4 อัตราส่วนตรีโกณมิติอื่นๆ ที่ควรทราบ



จากอัตราส่วนตรีโกณมิติที่ได้กล่าวไปแล้วข้างต้น เราสามารถหาอัตราส่วนกลับของอัตราส่วนตรีโกณมิติได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\operatorname{cosec} A &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}} = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin A} \\ \sec A &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}} = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos A} \\ \cot A &= \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan A}\end{aligned}$$

ตารางแสดงค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°

มุม อัตราส่วน	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosec	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
sec	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

แบบฝึกหัดที่ 1.4

จงหาค่าของ

1. $\cot^2 45^\circ \operatorname{cosec} 60^\circ \cot 30^\circ \sec^2 45^\circ$

2. $\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 60^\circ - \sec^2 45^\circ - 2\cot^2 60^\circ$

3. $\tan^2 60^\circ + 4\cos^2 45^\circ + 3\sec^2 30^\circ$

4. $\sin^3 60^\circ \cot 30^\circ - 2\sec^2 45^\circ + 3\cos 60^\circ \tan 45^\circ$

5. $3\tan^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2} \cot^2 30^\circ + \frac{1}{8} \sec^2 45^\circ$

6. $\sin^2 45^\circ \cos^2 30^\circ \tan^2 60^\circ + \cot 30^\circ \sin 60^\circ \sin 30^\circ + \cos^2 45^\circ \tan 60^\circ \sec 30^\circ$

7. $2\cos^2 45^\circ + 4\sin^2 45^\circ + 3\operatorname{cosec}^2 60^\circ$

8. $\cot^2 30^\circ - 2\cos^2 60^\circ - \frac{3}{4} \sec^2 45^\circ - 4\sin^2 30^\circ$

9. $3\tan^2 30^\circ - \frac{1}{3} \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 45^\circ + \frac{4}{3} \cos^2 30^\circ$

10. $\sin 30^\circ \sec 60^\circ + \tan 60^\circ \operatorname{cosec} 60^\circ + \operatorname{cosec} 45^\circ \sec 45^\circ$

1.5 ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ควรทราบ

$$\sin A \cdot \operatorname{cosec} A = 1$$

$$\cos A \cdot \sec A = 1$$

$$\tan A \cdot \cot A = 1$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$$

$$\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \quad \text{และ} \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

แบบฝึกหัดที่ 1.5

1. กำหนด $\sin A = \frac{5}{13}$ จงหา $\cos A$, $\tan A$

2. กำหนด $\cos A = \frac{8}{17}$ จงหา $\sin A$, $\cot A$

3. กำหนด $\sin A = 0.8$ จงหา $\sec A$, $\cot A$

4. กำหนด $a \cot A = \sqrt{b^2 - a^2}$ จงหา $\sin A$

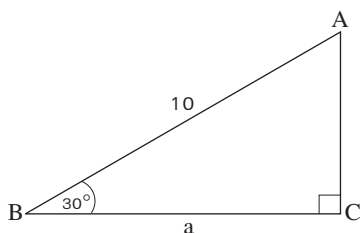
5. กำหนด ถ้า $5 \sin A = 3$ จงหาค่าของ $\frac{3 \operatorname{cosec} A - 2 \sec A}{9 \operatorname{cosec} A - 4 \sec A}$

แบบทดสอบ

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

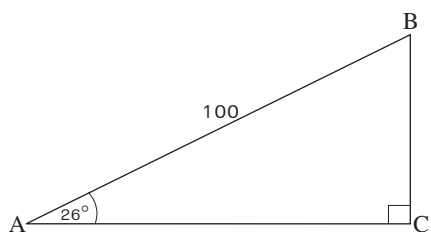
จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียวในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. จากรูป ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{B} = 30^\circ$, $\hat{C} = 90^\circ$, $AB = 10$ จงหา a (กำหนด $\sqrt{3} = 1.732$)



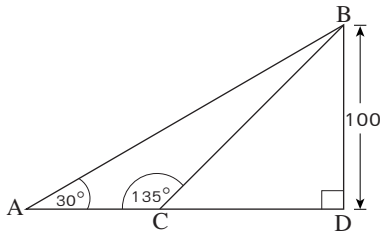
1. 1.732
2. 3.464
3. 8.66
4. คำตอบที่ถูกต้องไม่ได้ให้มา

2. จากรูป ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก ถ้า $AB = 100$ และ $\hat{BAC} = 26^\circ$ จงหา BC (กำหนด $\sin 26^\circ = 0.488$)



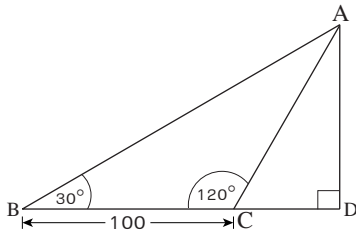
1. 4.88
2. 48.8
3. 488
4. 84.8

3. จากรูป จงหา AC (กำหนด $\sqrt{3} = 1.732$, $\sqrt{2} = 1.414$)



1. 73.2
2. 732
3. 27.3
4. 273

4. จากรูป จงหา AD (กำหนด $\sqrt{3} = 1.732$)



1. 8.66
2. 86.6
3. 866.0
4. ไม่มีข้อใดถูก

5. จงหาค่าของ $4 \sin 30^\circ \cos 30^\circ \tan 30^\circ$

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

6. ค่าของ $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ + \tan^2 45^\circ \tan^2 60^\circ + \sin 45^\circ \cos 45^\circ$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. 1
2. 2
3. 4
4. $4\frac{1}{2}$

7. จงหาค่าของ $\frac{1}{2} \sec 60^\circ + \frac{1}{4} \operatorname{cosec}^2 30^\circ - 2 \cot^2 45^\circ + \cot^2 30^\circ$

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

8. ถ้า $\sin A = 0.6$ จงหา $\cos A$

1. 0.5
2. 0.7
3. 0.8
4. 0.9

9. ถ้า $\cos A = 0.5$ จงหา $\tan A$

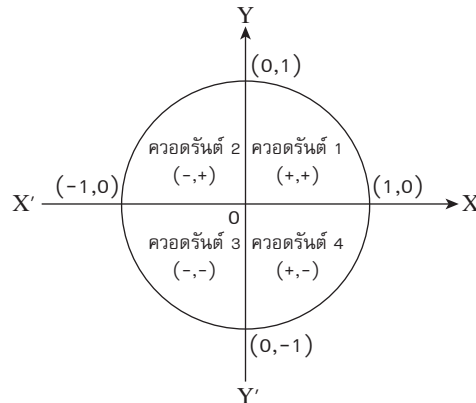
1. 0.5
2. 1
3. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
4. $\sqrt{3}$

10. ถ้า $\tan A = 0.75$ จงหา $\sin A + \cos A$
1. 0.7
 2. 1.4
 3. 0.8
 4. 1.1
11. ชายผู้หนึ่งนำบันไดยาว 50 ฟุต พาดเข้ากับกำแพงให้ปลายบนของบันไดอยู่ชิดกับขอบบนของกำแพงพอดี เขาสังเกตเห็นว่าบันไดทำมุม 60 องศากับพื้นราบ จงหาความสูงของกำแพง
1. 25 ฟุต
 2. $25\sqrt{3}$ ฟุต
 3. $25\sqrt{2}$ ฟุต
 4. ที่ให้มาไม่มีคำตอบ
12. ณ จุด ๆ หนึ่งบนพื้นดิน มุมยกขึ้นของเสาธงต้นหนึ่งเท่ากับ 30° เมื่อเดินตรงเข้าไปใกล้เสาธงอีก 10 เมตร มุมยกขึ้นของยอดเสาธงเป็น 45° จงหาว่าเสาธงสูงเท่าไร (กำหนด $\sqrt{3} = 1.732$)
1. 17.32 เมตร
 2. 13.66 เมตร
 3. 136.6 เมตร
 4. 173.2 เมตร
13. เสาธงปักตั้งฉากอยู่บนอาคารเรียนหลังหนึ่ง นักเรียนคนหนึ่งนั่งอยู่ในสนามห่างจากอาคารเรียนออกไป 40 ฟุต มองเห็นยอดอาคารเป็นมุมเงย 30° และยอดเสาธงเป็นมุมเงย 60° จงหาความสูงของเสาธง
1. 46.2 ฟุต
 2. 42.6 ฟุต
 3. 64.2 ฟุต
 4. 24.6 ฟุต
14. เสาไฟฟ้าสองต้นสูงเท่ากัน อยู่ห่างกัน 100 ฟุต ชายคนหนึ่งยืนอยู่ที่จุด ๆ หนึ่งระหว่างเสาไฟฟ้าทั้งสอง และอยู่บนแนวเส้นตรงที่ลากผ่านโคนเสา สังเกตเห็นยอดเสาไฟฟ้าทั้งสองเป็นมุมเงย 30° และ 60° จงหาว่า เสาไฟฟ้าทั้งสองสูงเท่าไร
1. 75 ฟุต
 2. 25 ฟุต
 3. $25\sqrt{3}$ ฟุต
 4. $75\sqrt{3}$ ฟุต
15. ชายคนหนึ่งยืนอยู่ห่างจากเสาธงต้นหนึ่ง 100 ฟุต สังเกตเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 30° เมื่อเขาเดินเข้าไปใกล้เสาธงได้ 2 นาที เขาเห็นว่ายอดเสาธงมีมุมเงย 60° จงหาว่าชายผู้นี้เดินด้วยอัตราเร็วกี่ฟุตต่อนาที
1. $33\frac{1}{3}$ ฟุต/นาที
 2. $33\frac{2}{3}$ ฟุต/นาที
 3. $23\frac{1}{3}$ ฟุต/นาที
 4. $23\frac{2}{3}$ ฟุต/นาที

2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

2.1 วงกลมหนึ่งหน่วย

วงกลมหนึ่งหน่วย คือ วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ และมีรัศมีเท่ากับหนึ่งหน่วย



ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย

ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย จะเป็นไปตามสมการ $2\pi r = 2\pi$ หน่วย หรือประมาณ $2 \times (3.1416) = 6.2832$

$$\text{ดังนั้น ครึ่งวงกลมหนึ่งหน่วยยาว} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ หน่วย หรือประมาณ } 3.1416$$

$$\text{เส้นยวงกลมหนึ่งหน่วยยาว} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ หน่วย หรือประมาณ } 1.5708$$

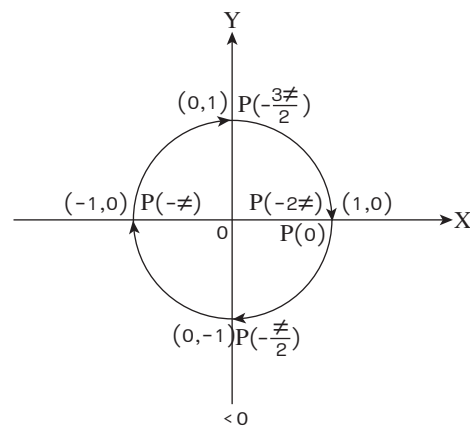
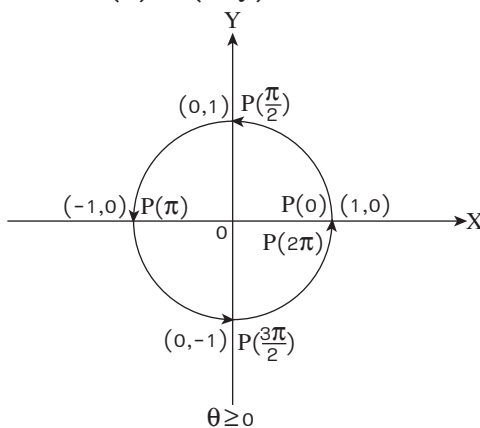
การวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย

กำหนด $\theta \in \mathbb{R}$ จุด $P(\theta)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย โดยวัดจากจุด $(1, 0)$ ไปตามส่วนโค้งของวงกลม

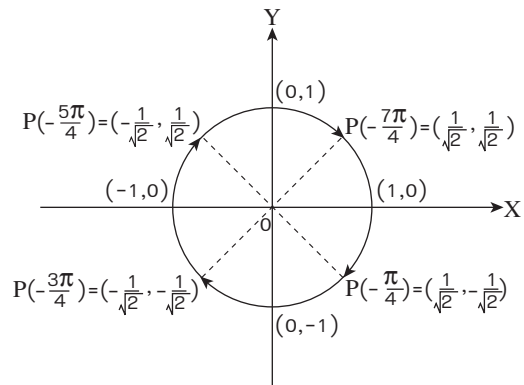
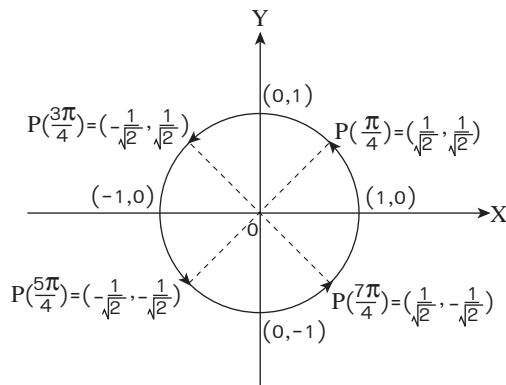
ถ้า $\theta \geq 0$ หมายถึง การวัดไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ถ้า $\theta < 0$ หมายถึง การวัดไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

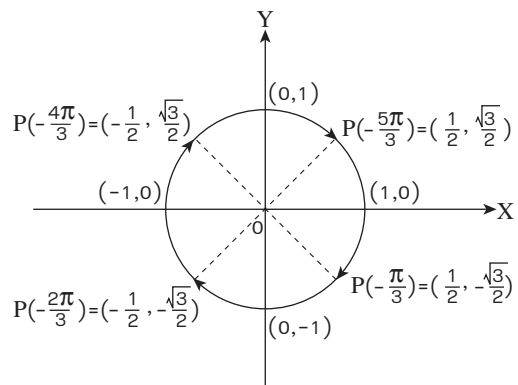
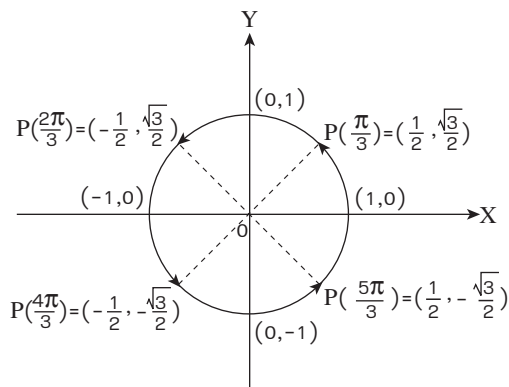
และให้ส่วนโค้งวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว θ หน่วย มีโคออร์ดิเนตจุดปลายส่วนโค้งเป็น (x, y) นั่นคือ $P(\theta) = (x, y)$



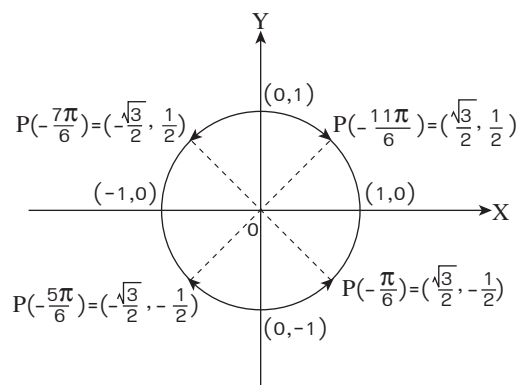
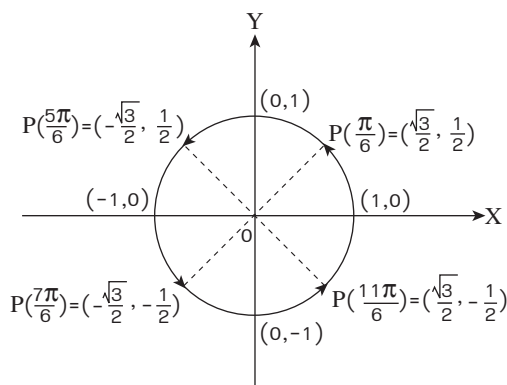
โคออร์ดิเนตของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $\frac{\pi}{4}$



โคออร์ดิเนตของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $\frac{\pi}{3}$



โคออร์ดิเนตของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $\frac{\pi}{6}$



แบบฝึกหัดที่ 2.1

1. กำหนด θ เป็นจำนวนจริง และ $P(\theta)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว θ หน่วย จงบอกพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งต่อไปนี้

- 1) $P(\pi)$ = _____
- 2) $P(2\pi)$ = _____
- 3) $P(3\pi)$ = _____
- 4) $P(4\pi)$ = _____
- 5) $P(5\pi)$ = _____
- 6) $P(6\pi)$ = _____
- 7) $P(-\pi)$ = _____
- 8) $P(-2\pi)$ = _____
- 9) $P(-3\pi)$ = _____
- 10) $P(-4\pi)$ = _____
- 11) $P(-5\pi)$ = _____
- 12) $P(-6\pi)$ = _____
- 13) $P(15\pi)$ = _____
- 14) $P(16\pi)$ = _____
- 15) $P(101\pi)$ = _____
- 16) $P(100\pi)$ = _____
- 17) $P(-51\pi)$ = _____
- 18) $P(-102\pi)$ = _____
- 19) $P(\frac{\pi}{2})$ = _____
- 20) $P(\frac{3\pi}{2})$ = _____
- 21) $P(\frac{5\pi}{2})$ = _____
- 22) $P(\frac{7\pi}{2})$ = _____
- 23) $P(\frac{9\pi}{2})$ = _____
- 24) $P(-\frac{\pi}{2})$ = _____
- 25) $P(-\frac{3\pi}{2})$ = _____

- 26) $P(-\frac{5\pi}{2})$ = _____
- 27) $P(-\frac{7\pi}{2})$ = _____
- 28) $P(-\frac{9\pi}{2})$ = _____
- 29) $P(\frac{\pi}{4})$ = _____
- 30) $P(-\frac{\pi}{4})$ = _____
- 31) $P(\frac{3\pi}{4})$ = _____
- 32) $P(-\frac{3\pi}{4})$ = _____
- 33) $P(\frac{5\pi}{4})$ = _____
- 34) $P(-\frac{5\pi}{4})$ = _____
- 35) $P(\frac{7\pi}{4})$ = _____
- 36) $P(-\frac{7\pi}{4})$ = _____
- 37) $P(\frac{\pi}{3})$ = _____
- 38) $P(-\frac{\pi}{3})$ = _____
- 39) $P(\frac{2\pi}{3})$ = _____
- 40) $P(-\frac{2\pi}{3})$ = _____
- 41) $P(\frac{4\pi}{3})$ = _____
- 42) $P(-\frac{4\pi}{3})$ = _____
- 43) $P(\frac{5\pi}{3})$ = _____
- 44) $P(-\frac{5\pi}{3})$ = _____
- 45) $P(\frac{7\pi}{3})$ = _____
- 46) $P(-\frac{7\pi}{3})$ = _____

47) $P\left(\frac{\pi}{6}\right) =$ _____

48) $P\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$ _____

49) $P\left(\frac{5\pi}{6}\right) =$ _____

50) $P\left(-\frac{5\pi}{6}\right) =$ _____

51) $P\left(\frac{7\pi}{6}\right) =$ _____

52) $P\left(-\frac{7\pi}{6}\right) =$ _____

53) $P\left(\frac{11\pi}{6}\right) =$ _____

54) $P\left(-\frac{11\pi}{6}\right) =$ _____

55) $P\left(\frac{13\pi}{6}\right) =$ _____

56) $P\left(-\frac{13\pi}{6}\right) =$ _____

2. จงบอกว่าจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยต่อไปนี้อยู่ในควอดรันต์ใด

1) $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

2) $P\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

3) $P\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

4) $P\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

5) $P\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

6) $P\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

7) $P\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

8) $P\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

9) $P\left(\frac{9\pi}{4}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

10) $P\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

11) $P\left(\frac{25\pi}{4}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

12) $P\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

13) $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

14) $P\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

15) $P\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

16) $P\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

17) $P\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

18) $P\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

19) $P\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ อยู่ในควอดรันต์ที่ _____

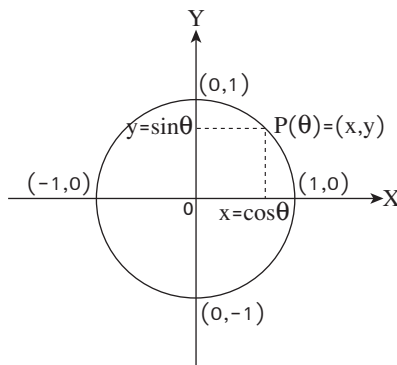
- 20) $P(-\frac{5\pi}{3})$ อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 21) $P(\frac{7\pi}{3})$ อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 22) $P(-\frac{7\pi}{3})$ อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 23) $P(\frac{25\pi}{3})$ อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 24) $P(-\frac{25\pi}{3})$ อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 25) $P(\frac{\pi}{6})$ อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 26) $P(-\frac{\pi}{6})$ อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 27) $P(\frac{5\pi}{6})$ อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 28) $P(-\frac{5\pi}{6})$ อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 29) $P(\frac{7\pi}{6})$ อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 30) $P(-\frac{7\pi}{6})$ อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 31) $P(\frac{11\pi}{6})$ อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 32) $P(-\frac{11\pi}{6})$ อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 33) $P(\frac{25\pi}{6})$ อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 34) $P(-\frac{25\pi}{6})$ อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 35) จุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ที่ยาว 2 หน่วย อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 36) จุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ที่ยาว 3 หน่วย อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 37) จุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ที่ยาว 4 หน่วย อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 38) จุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ที่ยาว 5 หน่วย อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 39) จุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ที่ยาว 6 หน่วย อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 40) จุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ที่ยาว -2 หน่วย อยู่ในควอดรนต์ที่ _____
- 41) จุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ที่ยาว -3 หน่วย อยู่ในควอดรนต์ที่ _____

- 42) จุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ที่ยาว -4 หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่
-
- 43) จุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ที่ยาว -5 หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่
-
- 44) จุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ที่ยาว -6 หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่
-
- 45) จุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ที่ยาว 9 หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่
-
- 46) จุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย ที่ยาว 12 หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่
-

2.2 ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

กำหนด $P(\theta) = (x, y)$ จะได้

$$\sin \theta = y \text{ และ } \cos \theta = x$$



โดเมนของฟังก์ชันทั้งสองคือ เซตของจำนวนจริง และเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์คือ เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1

นั่นคือ $D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}$

$$R_{\sin} = R_{\cos} = [-1, 1]$$

จากสมการของวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$ และ $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ จะได้ความสัมพันธ์ของ sine และ cosine ดังนี้

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{นั่นคือ } P(0) &= (1, 0) & \therefore \sin 0 &= 0 & \text{และ } \cos 0 &= 1 \\
 P\left(\frac{\pi}{2}\right) &= (0, 1) & \therefore \sin \frac{\pi}{2} &= 1 & \text{และ } \cos \frac{\pi}{2} &= 0 \\
 P(\pi) &= (-1, 0) & \therefore \sin \pi &= 0 & \text{และ } \cos \pi &= -1 \\
 P\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= (0, -1) & \therefore \sin \frac{3\pi}{2} &= -1 & \text{และ } \cos \frac{3\pi}{2} &= 0 \\
 P(2\pi) &= (1, 0) & \therefore \sin 2\pi &= 0 & \text{และ } \cos 2\pi &= 1 \\
 P\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \therefore \sin \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{และ } \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 P\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \therefore \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{และ } \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2} \\
 P\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) & \therefore \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} & \text{และ } \cos \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 2.2

1. จงหาค่าของ

- 1) $\sin 0$ = _____
- 2) $\cos 0$ = _____
- 3) $\sin \frac{\pi}{2}$ = _____
- 4) $\cos \frac{\pi}{2}$ = _____
- 5) $\sin \pi$ = _____
- 6) $\cos \pi$ = _____
- 7) $\sin \frac{3\pi}{2}$ = _____
- 8) $\cos \frac{3\pi}{2}$ = _____
- 9) $\sin 2\pi$ = _____
- 10) $\cos 2\pi$ = _____
- 11) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ = _____
- 12) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ = _____
- 13) $\sin(-\pi)$ = _____
- 14) $\cos(-\pi)$ = _____
- 15) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ = _____

- 16) $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ = _____
- 17) $\sin(-2\pi)$ = _____
- 18) $\cos(-2\pi)$ = _____
- 19) $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ = _____
- 20) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ = _____
- 21) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ = _____
- 22) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ = _____
- 23) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ = _____
- 24) $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ = _____
- 25) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ = _____
- 26) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ = _____
- 27) $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ = _____
- 28) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ = _____
- 29) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ = _____
- 30) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ = _____

2. จงหาค่าของ

1) $\sin 0 + \cos \pi - \sin \frac{3\pi}{2} =$ _____

2) $\sin \frac{\pi}{2} + \cos 2\pi - \cos \frac{3\pi}{2} =$ _____

3) $\cos \frac{3\pi}{2} + \sin 2\pi - \sin \frac{3\pi}{2} =$ _____

4) $\cos \frac{\pi}{2} + \sin 2\pi - \sin \pi =$ _____

5) $\sin^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \pi - 2\sin^2 \frac{3\pi}{2} =$ _____

6) $\cos^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{3\pi}{2} - \cos^2 \pi =$ _____

7) $\sin^2 \frac{3\pi}{2} + \sin^2 0 + \sin^2 2\pi =$ _____

8) $\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4} =$ _____

9) $\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} =$ _____

10) $\sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{6} =$ _____

11) $\sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} =$ _____

12) $\sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{3} =$ _____

13) $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} =$ _____

14) $\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{3} =$ _____

15) $\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} =$ _____

2.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

กำหนด $P(\theta) = (x, y)$

$$\sin \theta = y$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{y} ; y \neq 0$$

$$\cos \theta = x$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{x} ; x \neq 0$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x} ; x \neq 0 \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{x}{y} ; y \neq 0$$