



หนังสือชุดเทคนิคการเขียนคณิตศาสตร์



แคลคูลัสเบื้องต้น

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ประกอบด้วย

- ⊗ ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
- ⊗ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
- ⊗ การอินทิเกรต
- ⊗ แบบทดสอบแคลคูลัสเบื้องต้น

กวียา เนาวประทีป

วศ.บ.เกียรตินิยม (จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย), M.S., M.A. (University of Michigan, USA)

เทคนิคการเขียนคณิตศาสตร์ : แคลคูลัสเบื้องต้น

เขียนโดย กวียา เนาวประทีป

ISBN (E-book) 2025-1024-0042-6

จำหน่ายอีบุ๊ก พฤศจิกายน 2568

ราคา 90 บาท

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ (ฉบับเพิ่มเติม) พ.ศ. 2558

เนื้อหา รูปเล่ม และภาพประกอบในหนังสือเล่มนี้เป็นลิขสิทธิ์ของสำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์
ห้ามคัดลอก ยกเว้นได้รับอนุญาต

บรรณาธิการ กวียา เนาวประทีป

ปก/รูปเล่ม ฝ่ายศิลปกรรม สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

จัดทำโดย

พจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

เลขที่ 45 ซอยจรัญสนิทวงศ์ 40 ถนนจรัญสนิทวงศ์

แขวงบางยี่ขัน เขตบางพลัด กรุงเทพฯ 10700

โทรศัพท์ : 0-2433-7755-7 โทรสาร : 0-2433-7703

จัดจำหน่ายในรูปแบบสิ่งพิมพ์อิเล็กทรอนิกส์โดย

บริษัท เกรท มีเดีย เอเจนซี จำกัด

85 ซอยบรมราชชนนี 75 แขวงบางระมาด เขตตลิ่งชัน กรุงเทพฯ 10170

โทร. 0-2433-7755-7, 086-330-6425

คำนำ

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า การเรียนรู้ตาม พ.ร.บ. การศึกษา
แห่งชาติ พ.ศ. 2542 ยึดหลักว่า ผู้เรียนทุกคนมีความสามารถเรียนรู้และ
พัฒนาตนเองได้ และถือว่าผู้เรียนทุกคนมีความสำคัญที่สุด หลักการจัด
การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์จึงเป็นไปในลักษณะที่ **เปิดโอกาสให้ผู้เรียนรู้จัก
คิดและแก้ปัญหาด้วยตนเอง ได้ค้นคว้าจากสื่อและเทคโนโลยีต่าง ๆ**
โดยอิสระ ครู-อาจารย์ผู้สอนมีส่วนเพียงเป็นผู้ช่วยในการจัดเนื้อหา
สาระและกิจกรรมให้สอดคล้องกับความสนใจและความถนัดของผู้เรียน
โดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล และทำหน้าที่เป็นที่ปรึกษา
คอยให้คำแนะนำ และชี้แนะข้อบกพร่องของผู้เรียนเท่านั้น

เพื่อให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จในหลักการเรียนรู้ลักษณะนี้
ผู้เขียนจึงได้จัดทำหนังสือ **เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์: แคลคูลัสเบื้องต้น**
เล่มนี้ขึ้น เพื่อให้ผู้เรียนรู้จักเทคนิคการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ให้เก่งได้ด้วย
ตนเอง ด้วยการนำไปอ่านและฝึกทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบที่มีอยู่
อย่างหลากหลาย เฉพาะเรื่องที่ตนสนใจหรือยังไม่เข้าใจอย่างถ่องแท้ ให้
เข้าใจมากยิ่งขึ้นได้และยังสามารถนำไปใช้เสริมกับการเรียนกวดวิชาตาม
สถาบันต่าง ๆ อีกทั้งครู-อาจารย์ผู้สอนก็สามารถนำไปใช้ประกอบการเรียน
การสอนได้ด้วย

หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เรียน
ครู-อาจารย์ผู้สอนได้ตามสมควร หากมีข้อบกพร่องหรือผิดพลาดประการใด
ผู้เขียนต้องขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

ด้วยความปรารถนาดี

กวียา เนาวประทีป

ธันวาคม 2547

คำนำสำนักพิมพ์

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า ในการจัดการเรียนการสอนในปัจจุบัน ครูต้องมีการปรับบทบาทของตนเองด้วยการยึดเด็กเป็นศูนย์กลาง (Child Center) ในการเรียนการสอน แต่อย่างไรก็ตามครู-อาจารย์ผู้สอนก็ต้องเป็นผู้คอยให้การแนะนำ สร้างเจตคติ รวมทั้งจะต้องเน้นในเรื่องที่จะให้เด็กเรียนอย่างไร จึงจะได้รับผลสำเร็จตามความคาดหวังของหลักสูตร ตลอดจนแผนพัฒนา การศึกษาและปฏิรูปการศึกษาของชาติ

การจัดการเรียนการสอนจะต้องเน้นให้นักเรียนได้เรียน

1. เรียนเพื่อให้ได้รับความรู้ (Learn to know)
2. เรียนเพื่อให้มีความเป็นมนุษย์ (Learn to be)
3. เรียนเพื่อให้สามารถปฏิบัติได้ (Learn to do)
4. เรียนเพื่อให้สามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่น ทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่าง เป็นสุข (Learn to live with other)

ดังนั้น สำนักพิมพ์ฟิลิกส์เซ็นเตอร์ จึงได้จัดทำหนังสือ **เทคนิค การเรียนคณิตศาสตร์** เฉพาะเรื่องขึ้น เพื่อให้ผู้เรียนที่ยังไม่เข้าใจในหลัก คณิตศาสตร์บางเรื่องได้เลือกนำไปใช้ศึกษาด้วยตนเองให้เข้าใจได้อย่างถ่องแท้ และครู-อาจารย์ผู้สอนเองก็สามารถนำไปใช้ในการสอนวิชาคณิตศาสตร์แบบ เจาะลึกในแต่ละเรื่องได้อีกด้วย เพราะนอกจากจะมีสรุปหลักในแต่ละเรื่อง แล้วก็ยังมีแบบฝึกหัดและแบบทดสอบที่หลากหลายให้ลองทำพร้อมเฉลยแยกเล่ม ไว้ให้ตรวจสอบความถูกต้องด้วย

สำนักพิมพ์ฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้คงจะอำนวยประโยชน์ ให้แก่ผู้เรียน ครู-อาจารย์ผู้สอน และผู้ที่สนใจในการเรียนการสอนวิชา คณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี

ฝ่ายวิชาการ
สำนักพิมพ์ฟิลิกส์เซ็นเตอร์

สารบัญ

1. ลิขิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	7
1.1 ลิขิตของฟังก์ชัน	7
1.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	16
2. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	23
2.1 อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน	23
2.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	31
2.3 อนุพันธ์อันดับสูง	42
2.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันและการประยุกต์	46
3. การอินทิเกรต	71
3.1 อินทิกรัลไม่จำกัดเขต	71
3.2 อินทิกรัลจำกัดเขต	78
3.3 พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง	82
แบบทดสอบแคลคูลัสเบื้องต้น	89





แคลคูลัสเบื้องต้น

1. ลิมิต และความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1.1 ลิมิตของฟังก์ชัน

สำหรับฟังก์ชัน $y = f(x)$ ใดๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์ เป็นสับเซตของเซตจำนวนจริง :

1. **ลิมิตซ้ายของ f ที่ a** คือ ค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางซ้าย เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

2. **ลิมิตขวาของ f ที่ a** คือ ค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางขวา เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

➤ ถ้า $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ แล้ว จะกล่าวได้ว่าฟังก์ชัน f มีลิมิตเท่ากับ L ที่ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

➤ ถ้า $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ แล้ว จะกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตที่ a

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $y = f(x) = x + 4$ จงหา

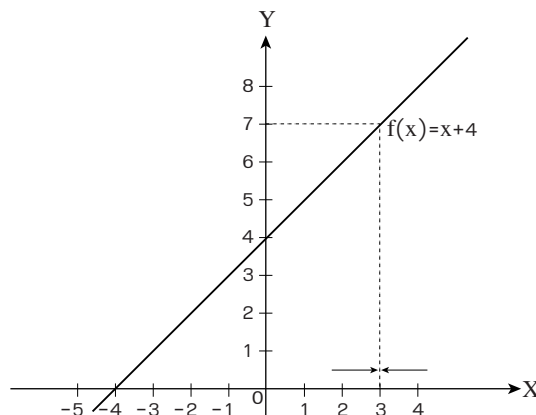
1. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

วิธีทำ

พิจารณาจากกราฟ



1. จากกราฟจะเห็นว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ทางด้านซ้าย ค่าของ $f(x) = x + 4$ มีค่าเพิ่มขึ้นเข้าใกล้ 7

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 4) = 7$$

2. จากกราฟจะเห็นว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ทางด้านขวา ค่าของ $f(x) = x + 4$ มีค่าลดลงเข้าใกล้ 7

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 4) = 7$$

$$3. \therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 4) = 7$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x \geq 3 \\ x + 6 & \text{เมื่อ } x < 3 \end{cases}$

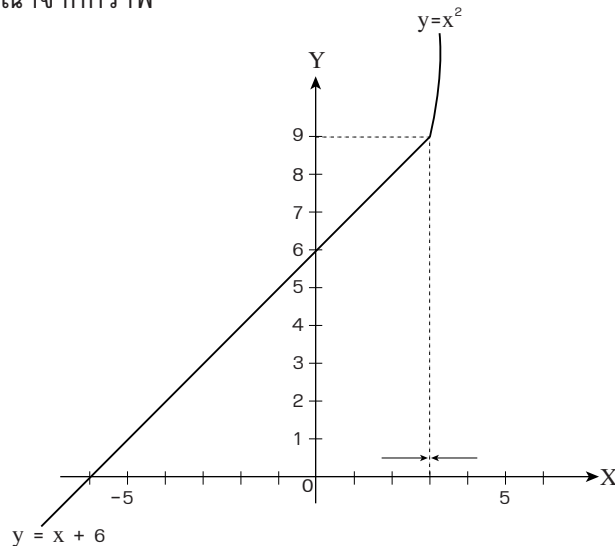
จงหา 1. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

วิธีทำ

พิจารณาจากกราฟ



จากกราฟจะได้ว่า

1. เมื่อ $x < 3$ จะได้ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x + 6) = 9$

2. เมื่อ $x \geq 3$ จะได้ $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 = 9$

3. $\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 9$

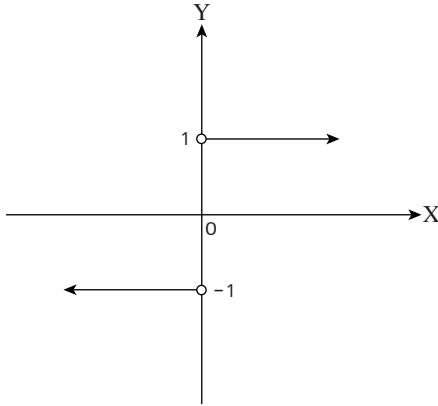
ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $f(x) = \frac{|x|}{x}$ จงหา

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

วิธีทำ



$$\because |x| = \begin{cases} -x & \text{เมื่อ } x < 0 \\ x & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -\frac{x}{x} = -1 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ \frac{x}{x} = 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$3. \because \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ หาไม่ได้}$$

นั่นคือ ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตที่ $x = 0$

● ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน

เมื่อ a , L_1 และ L_2 เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$

$$1. \lim_{x \rightarrow a} c = c \text{ เมื่อ } c \in \mathbb{R}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \text{ เมื่อ } n \in \mathbb{I}^+$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cL_1$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 - L_2$$

$$7. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

- $$8. \quad \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad \text{เมื่อ } L_2 \neq 0$$
- $$9. \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = (L_1)^n \quad \text{เมื่อ } n \in \mathbb{I}^+$$
- $$10. \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1} \quad \text{เมื่อ } n \in \mathbb{I}^+ \text{ โดยที่ } n \geq 2 \text{ และ } \sqrt[n]{L_1} \in \mathbb{R}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\lim_{x \rightarrow -1} (x + 3)(x^2 + 2)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 & \because \lim_{x \rightarrow -1} (x + 3)(x^2 + 2) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} (x + 3) \times \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2) \\
 &= \left(\lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 3 \right) \left(\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + \lim_{x \rightarrow -1} 2 \right) \\
 &= ((-1) + 3) ((-1)^2 + 2) \\
 &= 2 \times 3 = 6
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \right]$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 & \because \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} 1 + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1} 1 + \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{1 + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 1.1

1. กำหนด $f(x) = x$ จงหา

1) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

3) หา $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

2. กำหนด $f(x) = x+2$ จงหา

1) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

2) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

3) หา $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

3. กำหนด $f(x) = 3-x$ จงหา

1) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

2) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

3) หา $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

4. กำหนด $f(x) = x^2$ จงหา

1) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ _____

2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ _____

3) หา $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

5. กำหนด $f(x) = \sqrt{x}$ จงหา

1) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ _____

2) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ _____

3) หา $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

6. กำหนด $f(x) = |x|$ จงหา

1) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ _____

2) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ _____

3) หา $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

7. กำหนด $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ จงหา

1) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ _____

2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ _____

3) หา $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

8. กำหนด $f(x) = \frac{|x|}{x}$ จงหา

1) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ _____

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ _____

3) หา $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

9. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{เมื่อ } x \leq 2 \\ 5 & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$ จงหา

1) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ _____

2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ _____

3) หา $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

10. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{เมื่อ } x \leq 3 \\ 2 & \text{เมื่อ } x > 3 \end{cases}$ จงหา

1) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ _____

2) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ _____

3) หา $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

11. กำหนด $f(x) = \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$ จงหา

1) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ _____

2) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ _____

3) หา $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

12. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x \leq 2 \\ 2x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$ จงหา

1) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ _____

2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ _____

3) หา $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

13. จงหาค่าของ

1) $\lim_{x \rightarrow 2} (x) =$ _____

2) $\lim_{x \rightarrow 5} x^2 =$ _____

3) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} =$ _____

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x + 3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 2x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 10) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)(x + 3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{x+2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$9) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2 + 2x + 5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$10) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$11) \quad \lim_{x \rightarrow -5} (x + 1)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$13) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{x + 2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$14) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$15) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$16) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$17) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$18) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$19) \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$20) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2 - \sqrt{x})}{4 - x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$21) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

1.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน



บทนิยาม

ให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อฟังก์ชัน f มีสมบัติดังต่อไปนี้

1. หา $f(a)$ ได้
2. หา $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ได้
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ดังนั้น f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ ได้ เมื่อมีสมบัติครบทั้ง 3 ข้อ จะขาดสมบัติข้อใดข้อหนึ่งไม่ได้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $f(x) = |x - 2|$ จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

วิธีทำ

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{เมื่อ } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{เมื่อ } x < 2 \end{cases}$$

1. $f(2) = |2 - 2| = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x + 2) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$
3. $\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $f(x) = \frac{|x|}{x}$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$ หรือไม่

วิธีทำ

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -\frac{x}{x} = -1 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ \frac{x}{x} = 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases}$$

1. $f(0)$ หาค่าไม่ได้

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ หาค่าไม่ได้}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 3$ หรือไม่

วิธีทำ

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$$

$$1. f(3) = \frac{3^2 - 3 - 6}{3 - 3} = \frac{0}{0} \text{ หาค่าไม่ได้}$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) = 5 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ หาค่าได้}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$

แบบฝึกหัดที่ 1.2

1. กำหนด $f(x) = x + 5$ จะพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = -5$ หรือไม่
