



หนังสือชุดเทคนิคการเรียนคณิตศาสตร์



ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ประกอบด้วย

- 🌐 ความสัมพันธ์
- 🌐 ฟังก์ชัน
- 🌐 แบบทดสอบความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

กวีญา นาอวประทีป

วศ.บ.เกียรตินิยม (จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย), M.S., M.A. (University of Michigan, USA)

เทคนิคการเขียนคณิตศาสตร์ : ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

เขียนโดย กวียา เนาวประทีป

ISBN (E-book) 2025-1024-0041-9

จำหน่ายอีบุ๊ก พฤศจิกายน 2568

ราคา 125 บาท

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ (ฉบับเพิ่มเติม) พ.ศ. 2558

เนื้อหา รูปเล่ม และภาพประกอบในหนังสือเล่มนี้เป็นลิขสิทธิ์ของสำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์
ห้ามคัดลอก ยกเว้นได้รับอนุญาต

บรรณาธิการ กวียา เนาวประทีป

ปก/รูปเล่ม ฝ่ายศิลปกรรม สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

จัดทำโดย

พจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

เลขที่ 45 ซอยจรัญสนิทวงศ์ 40 ถนนจรัญสนิทวงศ์

แขวงบางยี่ขัน เขตบางพลัด กรุงเทพฯ 10700

โทรศัพท์ : 0-2433-7755-7 โทรสาร : 0-2433-7703

จัดจำหน่ายในรูปแบบสิ่งพิมพ์อิเล็กทรอนิกส์โดย

บริษัท เกรท มีเดีย เอเจนซี จำกัด

85 ซอยบรมราชชนนี 75 แขวงบางระมาด เขตตลิ่งชัน กรุงเทพฯ 10170

โทร. 0-2433-7755-7, 086-330-6425

คำนำ

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า เป้าหมายของการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 นั้นมุ่งพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม ทั้งยังสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่นๆ ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข

และเพื่อให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จและบรรลุเป้าหมายในการเรียนกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ผู้เขียนจึงได้จัดทำหนังสือ **เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน** เล่มนี้ขึ้นมา เพื่อให้ผู้เรียนรู้จักเทคนิคในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ให้เก่งได้ด้วยตนเอง ด้วยการนำไปอ่านและฝึกทำแบบฝึกหัด และแบบทดสอบที่มีอยู่อย่างหลากหลาย เฉพาะเรื่องที่สนใจหรือที่ยังไม่เข้าใจอย่างถ่องแท้ให้เข้าใจมากยิ่งขึ้น และยังสามารถนำไปใช้เสริมกับการเรียนกวดวิชาตามสถาบันต่างๆ อีกทั้งครู-อาจารย์ผู้สอนก็สามารถนำไปใช้ประกอบการเรียนการสอนได้ด้วย

หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เรียน ครู-อาจารย์ผู้สอน ได้ตามสมควร หากมีข้อบกพร่องหรือผิดพลาดประการใดผู้เขียนต้องขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

ด้วยความปรารถนาดี

กวิยา นาวประทีป

kawiya@physicscenter.com

คำนำสำนักพิมพ์

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า การเรียนการสอนในปัจจุบัน กระทรวงศึกษาธิการ ได้ประกาศใช้หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ที่มีความเหมาะสมชัดเจนทั้งเป้าหมายของหลักสูตรในการมุ่งพัฒนาคุณภาพของผู้เรียนทุกคน ซึ่งเป็นกำลังของชาติ โดยได้มีการกำหนดมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดในรายวิชาไว้อย่างชัดเจน เหมาะสำหรับการเรียนการสอนในแต่ละระดับชั้น

สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์ได้เล็งเห็นความสำคัญของการเรียนการสอนในกลุ่ม **สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์** ซึ่งได้มีการกำหนดเป้าหมายสำคัญของการพัฒนาคุณภาพผู้เรียนให้สามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเอง นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาชีวิตและใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ดังนั้นทางสำนักพิมพ์ฯ จึงได้จัดทำหนังสือ **เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์** เฉพาะเรื่องขึ้น เพื่อให้ผู้เรียนที่ยังไม่เข้าใจหลักคณิตศาสตร์บางเรื่องได้เลือกนำไปใช้ศึกษาด้วยตนเองให้เข้าใจได้อย่างถ่องแท้ เพราะมีการสรุปหลักในแต่ละเรื่อง มีแบบฝึกหัด และแบบทดสอบที่หลากหลายไว้ให้ลองทำพร้อมเฉลยแยกเล่มไว้ให้ตรวจสอบความถูกต้องได้ด้วยตนเอง

สำนักพิมพ์ฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้คงจะอำนวยประโยชน์ให้แก่ผู้เรียน ครู-อาจารย์ผู้สอน และผู้ที่สนใจในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี

ฝ่ายวิชาการ
สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

สารบัญ

1. ความสัมพันธ์	7
1.1 คู่อันดับและผลคูณคาร์ทีเซียน	7
1.2 ความสัมพันธ์ โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์	11
1.3 กราฟของความสัมพันธ์	27
1.4 อินเวอร์สของความสัมพันธ์	41
แบบทดสอบความสัมพันธ์	49
2. ฟังก์ชัน	57
2.1 ความหมายของฟังก์ชัน	57
2.2 ฟังก์ชันจาก A ไป B	66
2.3 ฟังก์ชันที่ควรรู้จัก	83
2.4 ฟังก์ชันอินเวอร์ส	91
2.5 ฟังก์ชันคอมโพสิท	95
2.6 พีชคณิตของฟังก์ชัน	105
แบบทดสอบฟังก์ชัน	112

1. ความสัมพันธ์

1.1 คู่อันดับและผลคูณคาร์ทีเซียน

● คู่อันดับ

คู่อันดับประกอบด้วยสมาชิก 2 ตัว เขียนแทนคู่อันดับในรูป (a, b) โดยที่ a เป็นสมาชิกตัวหน้าและ b เป็นสมาชิกตัวหลัง อันดับของสมาชิกถือว่าสำคัญ กล่าวคือการสลับที่กันระหว่างสมาชิกทั้งสองอาจทำให้ความหมายของคู่อันดับเปลี่ยนไปได้

สมบัติของคู่อันดับ

1. $(a, b) = (b, a)$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$
2. ถ้า $(a, b) = (c, d)$ แล้วจะได้ $a = c$ และ $b = d$
3. ถ้า $(a, b) \neq (c, d)$ แล้วจะได้ $a \neq c$ หรือ $b \neq d$

● ผลคูณคาร์ทีเซียน

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมดซึ่ง a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B และเขียนแทนด้วย $A \times B$

นั่นคือ $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$

สมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน

กำหนด A, B และ C เป็นเซตใดๆ แล้ว

1. $A \times B$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $B \times A$
 $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$ หรือ $A = \phi$ หรือ $B = \phi$
 $A \times B \neq B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A \neq B \neq \phi$
2. $A \times \phi = \phi \times A = \phi$
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
4. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
 $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
5. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
 $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

6. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \times C \subset B \times C$

7. ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัดแล้ว $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

8. ถ้า A เป็นเซตอนันต์ และ B เป็นเซตจำกัด ซึ่ง $B \neq \phi$ แล้ว $A \times B$ เป็นเซตอนันต์

แบบฝึกหัดที่ 1.1

1. จงหา x และ y จากคู่อันดับต่อไปนี้

1) ถ้า $(x, y) = (4, 5)$

2) ถ้า $(x, y) \neq (4, 5)$

3) ถ้า $(x, 5) = (3, y)$

4) ถ้า $(x + 2, 3) = (5, y - 1)$

5) ถ้า $(x + y, 1) = (5, x - y)$

6) ถ้า $(x + 3, y - 4) \neq (5, 1)$

2. จงเขียน $A \times B$ และ $B \times A$ เมื่อ A และ B เป็นเซตตามที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{3, 4\}$

$\therefore A \times B =$

$B \times A =$

2) $A = \{a, b, c\}$ และ $B = \{1, 2, 3\}$

$\therefore A \times B =$ _____

$B \times A =$ _____

3) $A = \{-3, -5\}$ และ $B = \{4, 5, 6\}$

$\therefore A \times B =$ _____

$B \times A =$ _____

4) $A = \{2, 4, 6\}$ และ $B = \{\phi\}$

$\therefore A \times B =$ _____

$B \times A =$ _____

5) $A = \{0\}$ และ $B = \{\phi\}$

$\therefore A \times B =$ _____

$B \times A =$ _____

6) $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \phi$

$\therefore A \times B =$ _____

$B \times A =$ _____

7) $A = \phi$ และ $B = \{2, 4, 6\}$

$\therefore A \times B =$ _____

$B \times A =$ _____

3. กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$ และ $C = \{3, 5\}$ จงหา

1) $A \times B =$ _____

2) $A \times C =$ _____

3) $(A \times B) \cap (A \times C)$

$=$ _____

4) $A \times (B \cap C)$

$=$ _____

5) พิจารณาว่า $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ หรือไม่

6) $(A \times B) \cup (A \times C)$

$=$ _____

7) $A \times (B \cup C)$

$=$ _____

8) พิจารณาว่า $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ หรือไม่

9) $(A \times B) - (A \times C)$

$=$ _____

10) $A \times (B - C)$

$=$ _____

11) พิจารณาว่า $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ หรือไม่

1.2 ความสัมพันธ์ โดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์

● ความสัมพันธ์

กำหนด A และ B เป็นเซตใดๆ แล้ว r เป็นความสัมพันธ์ จากเซต A ไปเซต B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

และถ้า r เป็นสับเซตของ $A \times A$ แล้ว r เป็นความสัมพันธ์ในเซต A

ตัวอย่างเช่น กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4\}$ และ

$$r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$$

$$\therefore r = \{(1, 2), (2, 4)\}$$

หมายเหตุ $(x, y) \in r$ อาจเขียนแทนด้วย $x r y$ และ
 $(x, y) \notin r$ อาจเขียนแทนด้วย $x \not r y$

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

กำหนด r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย D_r

$$D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$$

เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย R_r

$$R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$$

หลักการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ r แบบบอกเงื่อนไขมาให้

1. เมื่อต้องการหาโดเมน ให้จัด y ให้อยู่ในรูปของ x แล้วพิจารณาค่า x ทั้งหมดที่ทำให้ y หาค่าได้ และ $(x, y) \in r$

2. เมื่อต้องการหาเรนจ์ ให้จัด x ให้อยู่ในรูปของ y แล้วพิจารณาค่า y ทั้งหมดที่ทำให้ x หาค่าได้ และ $(x, y) \in r$

ตัวอย่างเช่น กำหนด $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{x-2}\}$

$$1. \text{ หา } D_r : y = \frac{1}{x-2}$$

นั่นคือ y หาค่าได้ เมื่อ $x - 2 \neq 0$

$$\therefore D_r = \mathbb{R} - \{2\} = \{x \mid x \neq 2\}$$

2. หา $R_r : x = \frac{1}{y} + 2$

นั่นคือ x หาค่าได้ เมื่อ $y \neq 0$

$$\therefore R_r = R - \{0\} = \{y \mid y \neq 0\}$$

แบบฝึกหัดที่ 1.2

1. กำหนด $A = \{1, 3, 5\}$ และ $B = \{0, 2, 4\}$ และ

$$r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$$

$$r_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y\}$$

$$r_3 = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\}$$

จงเขียน r_1 , r_2 และ r_3 แบบแจกแจงสมาชิก

$$r_1 = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$r_2 = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$r_3 = \underline{\hspace{10cm}}$$

2. กำหนด $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x^2\}$ จงเขียน r แบบแจกแจงสมาชิก

$$r = \underline{\hspace{10cm}}$$

3. กำหนด $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x \text{ หารด้วย } 3 \text{ แล้วเหลือเศษ } y\}$ จงเขียน r แบบแจกแจงสมาชิก

$$r = \underline{\hspace{10cm}}$$

4. กำหนด $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 8\}$

และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y = 9\}$ จงเขียน r แบบแจกแจงสมาชิก

$$r = \underline{\hspace{10cm}}$$

5. กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x > 2 \text{ และ } y = 3\}$ จงเขียน r แบบแจกแจงสมาชิก

$r =$ _____

6. กำหนด $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 8\}$

และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y \geq 12\}$ จงเขียน r แบบแจกแจงสมาชิก

$r =$ _____

7. กำหนด $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ และ R คือเซตของจำนวนจริง

และ $r = \{(x, y) \in A \times R \mid y = x^2 + 1\}$ จงเขียน r แบบแจกแจงสมาชิก

$r =$ _____

8. จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1) $r_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

$\therefore D_{r_1} =$ _____

$R_{r_1} =$ _____

2) $r_2 = \{(-3, 1), (-5, 2), (-7, 3), (-8, 4)\}$

$\therefore D_{r_2} =$ _____

$R_{r_2} =$ _____

3) $r_3 = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$

$\therefore D_{r_3} =$ _____

$R_{r_3} =$ _____

4) $r_4 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$

$\therefore D_{r_4} =$ _____

$R_{r_4} =$ _____

9. จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1) $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y > x + 1\}$ เมื่อ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{2, 3, 4, 5\}$

$\therefore r =$ _____

$D_r =$ _____

$R_r =$ _____

2) $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x^2\}$ เมื่อ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$\therefore r =$ _____

$D_r =$ _____

$R_r =$ _____

3) $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y = 8\}$ เมื่อ $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$

$\therefore r =$ _____

$D_r =$ _____

$R_r =$ _____

4) $r = \{(x, y) \in A \times A \mid \frac{x}{3} \text{ แล้วเหลือเศษ } y\}$ เมื่อ $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$\therefore r =$ _____

$D_r =$ _____

$R_r =$ _____

5) กำหนด $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = |x|\}$

$\therefore r =$ _____

$D_r =$ _____

$R_r =$ _____

6) $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y = 10\}$

$\therefore r =$ _____

$D_r =$ _____

$R_r =$ _____

7) $r = \{(x, y) \mid x \text{ และ } y \text{ เป็นจำนวนนับที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ } 8 \text{ และ } y = 2x\}$

$\therefore r =$ _____

$D_r =$ _____

$R_r =$ _____

8) กำหนด $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

และ $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$

$\therefore r =$ _____

$D_r =$ _____

$R_r =$ _____

- 9) กำหนด $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ และ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B โดย $(x, y) \in r$ เมื่อ $y = x^2 + 1$

$$\therefore r = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$D_r = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$R_r = \underline{\hspace{10cm}}$$

10. จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x + 1\}$

2) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x + 3y = 5\}$

3) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$

4) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 1\}$

5) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = -x^2 + 2\}$

6) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$

7) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x - 5|\}$

8) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x}\}$

9) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x-3}\}$

10) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{x-1}\}$

11) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 - 2x - 8\}$

12) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{|x|}\}$

13) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{2}{|x|+2}\}$

14) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x^2 - 4}\}$

15) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{9 - x^2}\}$

16) $\{(x, y) \mid y = \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\}$

17) $\{(x, y) \mid y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}\}$

