

พิมพ์ครั้งที่ 2

แคลคูลัส

CALCULUS 1-1

- ◆ เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น
- ◆ พังก์ชัน (พังก์ชันเส้นตรง พังก์ชันกำลังสอง พังก์ชันชี้กำลัง พังก์ชันลอการิทึม)
- ◆ ลิมิตและความต่อเนื่อง อนุพันธ์และการประยุกต์อนุพันธ์
- ◆ เทคนิคการอินทิเกรตและการประยุกต์

ตรงตามหลักสูตร
ระบบการศึกษา
แผนใหม่

- ✓ ฉบับมาตรฐานตรงตามหลักสูตร
- ✓ มัธยมศึกษาตอนปลาย
- ✓ อุดมศึกษา



✓ คณิตศาสตร์พื้นฐาน

พิมพ์ครั้งที่ 2

แคลคูลัส

CALCULUS 1-1

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ลำดวน ยอดยิ่ง

- แคลคูลัส 1-1 ฉบับมาตรฐานตรงตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลายและระดับอุดมศึกษา
- เนื้อหาประกอบด้วย

- ◀ เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น
- ◀ ภาคตัดกรวย
- ◀ ฟังก์ชัน
- ◀ ลิมิตและความต่อเนื่อง
- ◀ อนุพันธ์
- ◀ การประยุกต์อนุพันธ์
- ◀ การอินทิเกรต
- ◀ อินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์

- เนื้อหาเข้มข้นครอบคลุมหลักสูตรและเป็นหลักสูตรสำหรับเข้ามหาวิทยาลัยใช้ทฤษฎีพื้นฐานเพื่อให้รู้จัก คิดเป็น ทำเป็น และแก้ปัญหาเป็น เพื่อจะได้นำไปวิเคราะห์โจทย์ข้อสอบได้อย่างถูกต้องและแม่นยำ
- สะดวกในการศึกษาด้วยตนเอง
- มีแบบฝึกหัดหลากหลาย ใช้หลักการคิดเข้าใจง่าย
- เหมาะสำหรับนักเรียนที่เรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่เตรียมสอบเข้ามหาวิทยาลัย
- นักเรียนที่เตรียมสอบเข้าพยาบาล, เตรียมทหาร และสอบเทียบม.6
- นิสิตนักศึกษา ระดับอุดมศึกษา ครู-อาจารย์ และผู้สนใจคณิตศาสตร์ทั่วไป

คำนำสำนักพิมพ์

◆ คณิตศาสตร์พื้นฐานแคลคูลัส 1-1 (Calculus 1-1) เล่มนี้ เขียนได้ตรงตามหลักสูตรใหม่
ยุคปฏิรูปการศึกษา สำหรับนักเรียน ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย และนักศึกษาระดับอุดมศึกษา
ปวส ปริญญาตรี และผู้สนใจทั่วไป

ผู้เขียนเป็นผู้มีความรู้แตกฉาน และมีประสบการณ์ในการสอนวิชานี้ในหลายๆ ระดับ
จึงสามารถใช้เทคนิคและกลวิธีในการเขียนให้เข้าใจง่าย เรียนได้อย่างสนุกด้วยตนเอง ไม่ต้องกลัววิชา
นอกจากนี้ยังใช้เป็นคู่มือเสริมบทเรียน ทบทวนบทเรียน เพื่อให้เกิดความแม่นยำ และแคล่วคล่อง
ในการคำนวณ วิเคราะห์ และประยุกต์ใช้ได้เป็นอย่างดี

ด้วยความปรารถนาดี
สำนักพิมพ์ The Knowledge Center



คำนำผู้เขียน

ผู้เขียนได้เรียบเรียงหนังสือเล่มนี้ขึ้นโดยมีจุดมุ่งหมาย เพื่อให้เป็นหนังสือที่ใช้ประกอบการเรียนการสอน วิชาแคลคูลัส 1-1 ตามหลักสูตรระดับปริญญาตรี, สามารถนำไปใช้ได้ทุกสถาบันการศึกษา ซึ่งเป็นวิชาบังคับของทุกสาขาวิชาในหลักสูตรระดับปริญญาตรี คณะบริหารธุรกิจ และเพื่อให้นักศึกษาที่กำลังศึกษาวิชานี้หรือผู้สนใจทั่วไป ได้มีหนังสืออ่านประกอบอีกเล่มหนึ่ง ในการศึกษา ค้นคว้าเพิ่มเติม

ในการเรียบเรียงหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนได้กำหนดเนื้อหารายวิชาขึ้น ตามโครงสร้างของหลักสูตรวิชา แคลคูลัส 1-1 ของสถาบันต่างๆ ซึ่งได้เขียนคำอธิบายรายวิชาดังนี้

ชื่อวิชา	แคลคูลัส 1-1
พื้นฐาน	คณิตศาสตร์ทั่วไป
คำอธิบายรายวิชา	เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น ฟังก์ชัน (ฟังก์ชันเส้นตรง ฟังก์ชันกำลังสอง ฟังก์ชันชี้กำลัง ฟังก์ชันลอการิทึม) ลิมิตและความต่อเนื่อง อนุพันธ์และการประยุกต์ อินทิเกรต เทคนิคการอินทิเกรตและการประยุกต์

อนึ่งผู้เขียนได้เรียบเรียงเนื้อหาของภาคตัดกรวยอย่างละเอียดเพิ่มอีก 1 บท เพื่อเป็นพื้นฐานในการนำสมการกราฟเส้นโค้งไปประยุกต์ใช้ทางธุรกิจและเศรษฐศาสตร์ให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้คงจะมีประโยชน์ต่อผู้อ่านและผู้ที่สนใจ หากมีความบกพร่องหรือความผิดพลาดที่อาจจะเกิดขึ้นได้ ผู้เขียนใคร่ขออภัย ณ โอกาสนี้ และขอน้อมรับฟังข้อบกพร่องเหล่านั้น เพื่อนำไปปรับปรุงให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา อาจารย์ทุกท่านที่เคยอบรมสั่งสอนผู้เขียนมาและบุคคลที่มีส่วนช่วยเหลือหรือให้กำลังใจเป็นอย่างสูง อีกทั้งครอบครัวของผู้เขียนที่คอยให้กำลังใจตลอดมาจนสำเร็จไปได้ด้วยดี

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ลำด่วน ยอดยิ่ง

พฤษภาคม 2545

(แผนกวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ทั่วไป)

(สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตภาคพายัพ)



สารบัญ

หน้า

บทที่ 1 เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น

1.1	ระบบพิกัดฉาก	1
	แบบฝึกหัด 1.1	6
1.2	ระยะระหว่างจุดสองจุด	7
	แบบฝึกหัด 1.2	12
1.3	จุดแบ่งส่วนของเส้นตรง	13
	แบบฝึกหัด 1.3	15
1.4	เส้นตรง	16
	แบบฝึกหัด 1.4	20
1.5	สมการเส้นตรง	22
	แบบฝึกหัด 1.5	28
1.6	ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุดและระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน	30
	แบบฝึกหัด 1.6	32

บทที่ 2 ภาคตัดกรวย

2.1	วงกลม	33
	แบบฝึกหัด 2.1	37
2.2	พาราโบลา	38
	แบบฝึกหัด 2.2	50
2.3	วงรี	54
	แบบฝึกหัด 2.3	65
2.4	ไฮเพอร์โบลา	69
	แบบฝึกหัด 2.4	81
2.5	การประยุกต์สมการของกราฟเส้นโค้งทางธุรกิจและทางเศรษฐศาสตร์	85
	แบบฝึกหัด 2.5	91

บทที่ 3 ฟังก์ชัน

3.1	ความหมายของฟังก์ชัน	95
	แบบฝึกหัด 3.1	98
3.2	ฟังก์ชันแบบต่างๆ	100
3.3	โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน	103
	แบบฝึกหัด 3.2	105
3.4	ค่าของฟังก์ชัน	106
	แบบฝึกหัด 3.3	107
3.5	พีชคณิตของฟังก์ชัน	108
	แบบฝึกหัด 3.4	111
3.6	ฟังก์ชันคอมโพสิท	113
	แบบฝึกหัด 3.5	115

บทที่ 4 ลิมิตและความต่อเนื่อง

4.1	ลิมิตและฟังก์ชัน	141
	แบบฝึกหัด 4.1	146
4.2	คุณสมบัติของลิมิต	151
	แบบฝึกหัด 4.2	155
4.3	ลิมิตที่อนันต์และลิมิตอนันต์	157
4.3.1	ลิมิตที่อนันต์	157
	แบบฝึกหัด 4.3	160
4.3.2	ลิมิตอนันต์	161
	แบบฝึกหัด 4.4	165
4.4	ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	166
	แบบฝึกหัด 4.5	174

บทที่ 5 อนุพันธ์

5.1	ส่วนเปลี่ยนแปลง	181
5.2	อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	182
5.3	เส้นสัมผัส	184
5.4	อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยและอัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะ	187
5.5	ความสัมพันธ์ระหว่างการหาอนุพันธ์ได้ และความต่อเนื่อง	189
	แบบฝึกหัด 5.1	190
5.6	การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร	192
	แบบฝึกหัด 5.2	196
5.7	อนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกโปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	197
	แบบฝึกหัด 5.3	199
5.8	อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติบางฟังก์ชัน	200
	แบบฝึกหัด 5.4	202
5.9	การหาอนุพันธ์โดยใช้ลอการิทึม	203
	แบบฝึกหัด 5.5	204
5.10	การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝง	205
	แบบฝึกหัด 5.6	207
5.11	อนุพันธ์อันดับสูง	208
	แบบฝึกหัด 5.7	210

บทที่ 6 การประยุกต์อนุพันธ์

6.1	อัตราสัมพัทธ์	211
	แบบฝึกหัด 6.1	216
6.2	รูปอินดิเทอร์มินัด	218
	แบบฝึกหัด 6.2	225
6.3	ฟังก์ชันค่าเพิ่ม และฟังก์ชันค่าลด	227
	แบบฝึกหัด 6.3	234

	หน้า
6.4 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์	236
แบบฝึกหัด 6.4	243
6.5 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน	245
แบบฝึกหัด 6.5	249
6.6 การแก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์	250
แบบฝึกหัด 6.6	254

บทที่ 7 การอินทิเกรต

7.1 ดิฟเฟอเรนเชียล	257
แบบฝึกหัด 7.1	260
7.2 อินทิกรัลไม่จำกัดเขต	261
แบบฝึกหัด 7.2	268
7.3 เทคนิคการอินทิเกรต	270
7.3.1 การอินทิเกรตแบบแบ่งส่วน	270
แบบฝึกหัด 7.3	273
7.3.2 ตัวอินทิเกรตเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ	274
แบบฝึกหัด 7.4	278
7.3.3 การอินทิเกรตฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\sqrt{u^2 \pm a^2}$, $\sqrt{a^2 - u^2}$ เมื่อ $a > 0$	279
แบบฝึกหัด 7.5	280
7.3.4 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะ	281
แบบฝึกหัด 7.6	288
7.4 การประยุกต์อินทิกรัลไม่จำกัดเขตทางธุรกิจและเศรษฐศาสตร์	289
แบบฝึกหัด 7.7	292

บทที่ 8 อินทிரัลจำกัดเขตและการประยุกต์

8.1 อินทிரัลจำกัดเขตและคุณสมบัติ	295
8.2 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส	298
แบบฝึกหัด 8.1	300
8.3 การประยุกต์ของอินทรีลจำกัดเขต	301
8.3.1 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง	301
แบบฝึกหัด 8.2	309
8.3.2 ความยาวของส่วนโค้ง	311
แบบฝึกหัด 8.3	313
8.3.3 การประยุกต์อินทรีลจำกัดเขตในทางธุรกิจและเศรษฐศาสตร์	314
แบบฝึกหัด 8.4	316
บรรณานุกรม	317
ภาคผนวก	319

บทที่ 1

เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น

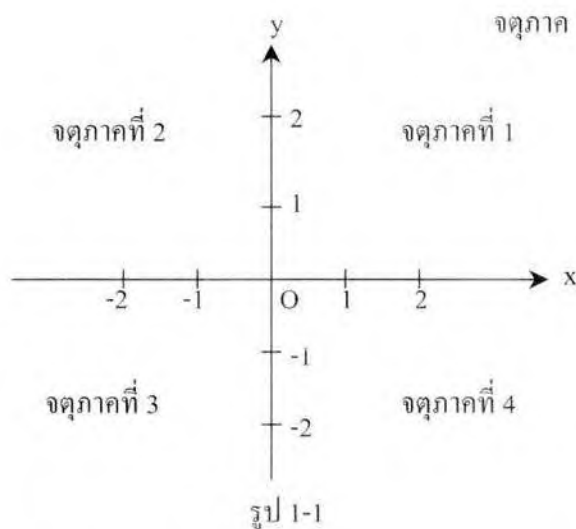
(Fundamental Analytic Geometry)

ในบทนี้จะศึกษาถึงความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ จะกล่าวถึง แกนอ้างอิงในระบบพิกัดฉาก จุดบนระนาบ และสมการเส้นตรง ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญมากในวิชาแคลคูลัส

1.1 ระบบพิกัดฉาก (Rectangular Coordinate System)

1.1.1 แกนพิกัด

บนระนาบ กำหนดให้มีเส้นตรงสองเส้น เส้นหนึ่งอยู่ในแนวนอนและอีกเส้นหนึ่งอยู่ในแนวตั้ง ตั้งฉากกันที่จุด O เส้นในแนวนอนให้ชื่อว่า แกน x (x -axis) และเส้นในแนวตั้งมีชื่อว่า แกน y (y -axis) ให้เส้นตรงทั้งสองเป็นเส้นจำนวนโดยที่จุด O แทนจำนวนศูนย์เรียกว่า จุดกำเนิด (Origin) ทิศทางบนแกน x ไปทางขวามือเป็นบวก ไปทางซ้ายมือเป็นลบ และทิศทางบนแกน y ขึ้นข้างบนเป็นบวก ลงข้างล่างเป็นลบ เส้นทั้งสองเรียกว่า แกนพิกัด (Coordinate axis) จะแบ่งระนาบเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วนเรียกว่า จตุภาค (Quadrant)

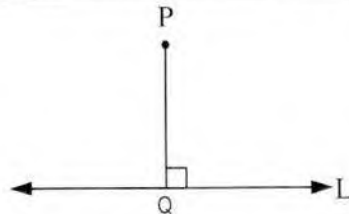


แกนพิกัดเป็นแกนที่จะใช้อ้างอิง เพื่อที่จะทราบว่า จุดบนระนาบอยู่ที่ใดดังรูป 1-1

1.1.2 โพรเจกชัน (Projection)

1. โพรเจกชันของจุดบนเส้นตรง

นิยาม 1 โพรเจกชันของจุด P บนเส้นตรง L หมายถึงจุดบนเส้นตรง L ที่เกิดจากการตัดกันของส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุด P ไปตั้งฉากกับเส้นตรง L ดังรูป 1-2

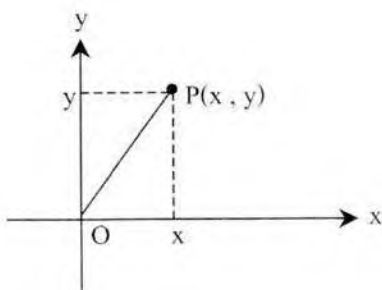


รูป 1-2

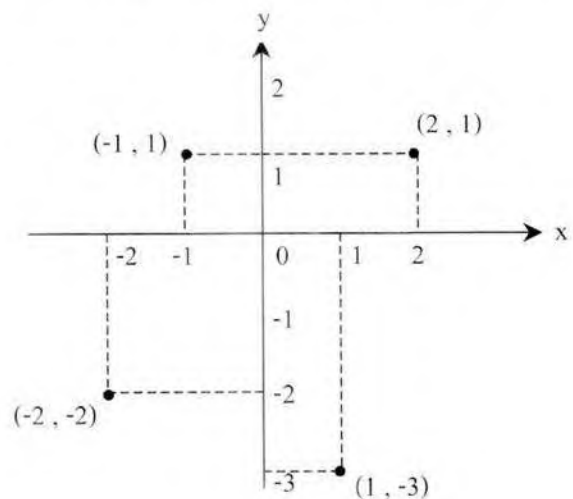
จะได้จุด Q เป็น โพรเจกชัน ของจุด P บนเส้นตรง L

ถ้า P เป็นจุดบนระนาบ เรามักตำแหน่งของจุด P ได้โดยบอกระยะที่จุดห่างจากแกน y และแกน x โดยเขียนในรูปคู่ลำดับ (Ordered pair) เรียกว่า พิกัด (Coordinate) ของจุด P ถ้าโพรเจกชันของจุด P บนแกน x เป็นจุดที่ตรงกับจำนวนจริง x และโพรเจกชันของจุด P บนแกน y เป็นจุดที่ตรงกับจำนวนจริง y เรากล่าวว่าจุด P มีพิกัด (x, y) และเขียนสัญลักษณ์ว่า $P(x, y)$ ถ้า x เรียกว่า พิกัด x หรือพิกัดที่ 1 (Abscissa) และค่า y เรียกว่า พิกัด y หรือพิกัดที่ 2 (Ordinate) เรียก ระนาบที่มีแกนพิกัด x และ y ว่าระนาบ xy

รูป 1-3 แสดงการกำหนดจุด $P(x, y)$ และตัวอย่างของจุด $(2, 1)$, $(-1, 1)$, $(-2, -2)$ และ $(1, -3)$ แสดงดังรูป 1-4



รูป 1-3



รูป 1-4

ในส่วนต่าง ๆ ของระนาบพิกัด x และ พิกัด y มีเครื่องหมายต่างกันดังนี้

ส่วนที่ 1 ค่า x เป็นบวก และ y เป็นบวก

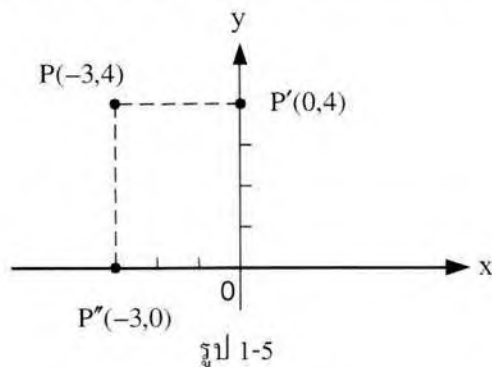
ส่วนที่ 2 ค่า x เป็นลบ และ y เป็นบวก

ส่วนที่ 3 ค่า x เป็นลบ และ y เป็นลบ

ส่วนที่ 4 ค่า x เป็นบวก และ y เป็นลบ

ตัวอย่าง 1 จงหาโปรเจกชันของจุด $P(-3,4)$ บนแกน x และแกน y

วิธีทำ



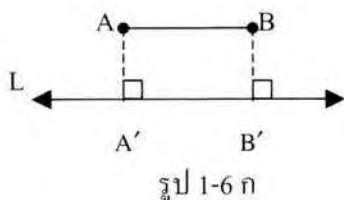
โปรเจกชันของจุด $P(-3,4)$ บนแกน x คือ $P'(-3,0)$ #

โปรเจกชันของจุด $P(-3,4)$ บนแกน y คือ $P'(0,4)$ #

2. โปรเจกชันของส่วนของเส้นตรงบนเส้นตรง

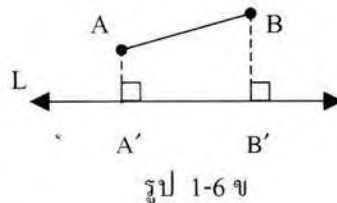
นิยาม 2 โปรเจกชันของ $\overline{AB}$ บนเส้นตรง L หมายถึงส่วนของเส้นตรงบนเส้นตรง L ที่อยู่ระหว่าง โปรเจกชัน ของจุดปลาย A และ B บนเส้นตรง L

1. เมื่อ $\overline{AB} \parallel L$



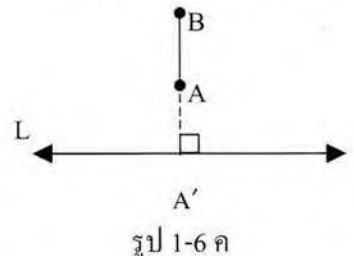
จะได้ $\overline{A'B'}$ เป็น โปรเจกชัน
 $\overline{AB}$ บนเส้นตรง L และ
 $\overline{A'B'}$ จะยาวเท่ากับ $\overline{AB}$

2. เมื่อ $\overline{AB} \nparallel L$



จะได้ $\overline{A'B'}$ เป็น โปรเจกชัน
 $\overline{AB}$ บนเส้นตรง L และ
 $\overline{A'B'}$ จะสั้นกว่า $\overline{AB}$

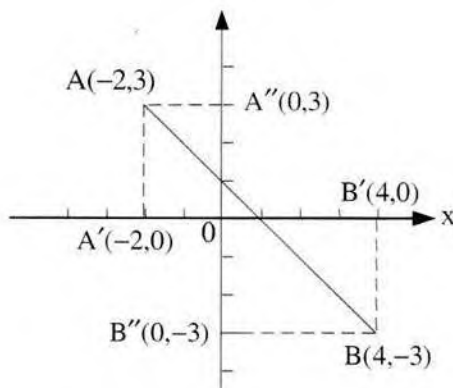
3. เมื่อ $\overline{AB} \perp L$



จะได้จุด A' เป็น โปรเจกชัน
ของ $\overline{AB}$ บนเส้นตรง L

ตัวอย่าง 2 กำหนดจุด $A(-2,3)$ และจุด $B(4,-3)$ จงหาโปรเจกชันของส่วนของเส้นตรง AB บนแกน x และ y

วิธีทำ

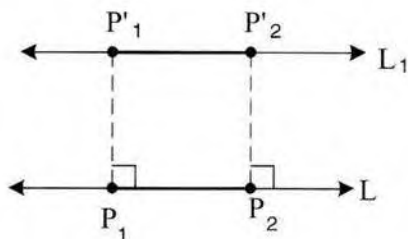


รูป 1-7

จะได้ส่วนของเส้นตรง $A'B'$ เป็นโปรเจกชันของส่วนของเส้นตรง AB บนแกน x และ
ส่วนของเส้นตรง $A''B''$ เป็นโปรเจกชันของส่วนของเส้นตรง AB บนแกน y #

ตัวอย่าง 3 กำหนด P_1 และ P_2 เป็นจุดบนเส้นตรง L , P'_1 และ P'_2 เป็นจุดบนเส้นตรง L_1
ถ้า $P'_1P'_2$ เป็นโปรเจกชันของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 บนเส้นตรง L_1 แล้ว P_1P_2
จะเป็นโปรเจกชันของส่วนของเส้นตรง $P'_1P'_2$ บนเส้นตรง L หรือไม่

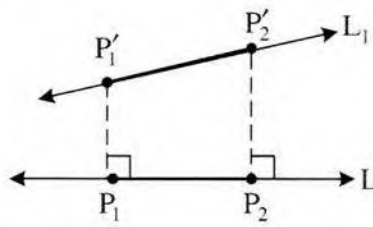
วิธีทำ กรณี 1) เมื่อเส้นตรง $L \parallel L_1$



รูป 1-8 ก

จะได้ส่วนของเส้นตรง P_1P_2 เป็นโปรเจกชันของส่วนของเส้นตรง $P'_1P'_2$ บนเส้นตรง L

กรณี 2) เมื่อ $L \nparallel L_1$



รูป 1-8 ข

จากรูป 1-8 ข จะได้ว่าส่วนของเส้นตรง $P_1 P_2$ เป็นโปรเจกชันของส่วนของเส้นตรง $P'_1 P'_2$ บนเส้นตรง L

จากกรณี 1 และ 2 นั่นคือ ส่วนของเส้นตรง $P_1 P_2$ เป็นโปรเจกชัน ของส่วนของเส้นตรง $P'_1 P'_2$ บนเส้นตรง L #

แบบฝึกหัด 1.1

- กำหนดให้ $(-3, -2)$, $(-3, 3)$ และ $(5, 3)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง จงหาจุดยอด จุดที่สี่
- สี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งมีแกน x และแกน y เป็นเส้นทแยงมุม ถ้าด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาว 2 หน่วย จงหาพิกัดของจุดที่สี่
- กำหนดให้ $(0, 4)$ และ $(0, -2)$ เป็นจุดยอด 2 จุดของสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่ง จงหาจุดยอดจุดที่ 3
- จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าถูกหรือผิด
 - จุด $(-6, 0)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(-6, 3)$ บนแกน x
 - จุด $(-6, 0)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(-6, 4)$ บนแกน x
 - จุด $(-6, 0)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(-6, a)$ บนแกน x เมื่อ a เป็นจำนวนจริง
 - จุด $(0, 5)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(0, 5)$ บนแกน y
 - จุด $(0, 5)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(-6, 3)$ บนแกน y
 - จุด $(0, 5)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(6, 5)$ บนแกน y
 - จุด $(0, 5)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(a, 5)$ บนแกน y เมื่อ a เป็นจำนวนจริง
 - จุด $(0, 0)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(0, 6)$ บนแกน y
 - จุด $(0, 0)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(6, 0)$ บนแกน y
 - จุด $(0, 0)$ เป็นโปรเจกชันของจุด $(a, 0)$ บนแกน y เมื่อ a เป็นจำนวนจริง
- กำหนดจุด $A(0, 0)$ และ $B(-6, -5)$ จงหาโปรเจกชันของจุดกึ่งกลางของ P และ Q บนแกน x

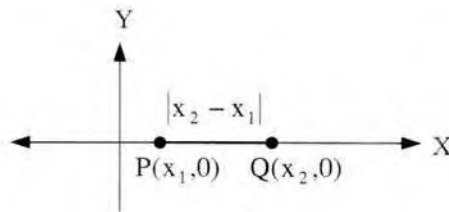
เฉลยแบบฝึกหัด 1.1

- จุดที่สี่คือ $(5, -2)$
 - พิกัดของจุดที่สี่คือ $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$ และ $(0, -\sqrt{2})$
 - จุดยอดที่สามคือ $(3\sqrt{3}, 1)$ หรือ $(-3\sqrt{3}, 1)$
- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|----------|
| 4.1 ผิด | 4.2 ผิด | 4.3 ถูก | 4.4 ผิด | 4.5 ผิด |
| 4.6 ถูก | 4.7 ถูก | 4.8 ผิด | 4.9 ผิด | 4.10 ถูก |
- $(\frac{5}{2}, 0)$

1.2 ระยะระหว่างจุดสองจุด

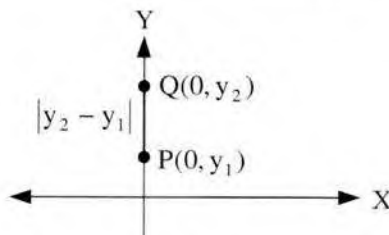
กำหนดให้ P และ Q เป็นจุด 2 จุดใดๆ ในระนาบ ระยะระหว่างจุด P และ Q หมายถึง ความยาวของส่วนของเส้นตรง PQ จะเขียนแทนด้วย $|PQ|$

นิยาม 3 กำหนดให้ $P(x_1, 0)$ และ $Q(x_2, 0)$ เป็นจุดบนแกน x จะได้ $|PQ| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$



รูป 1-9

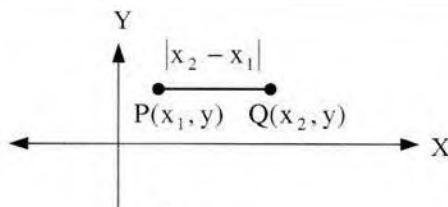
นิยาม 4 กำหนดให้ $P(0, y_1)$ และ $Q(0, y_2)$ เป็นจุดบนแกน y จะได้ $|PQ| = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$



รูป 1-10

นิยาม 5 กำหนดให้ $P(x_1, y)$ และ $Q(x_2, y)$ เป็นจุดบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน X จะได้

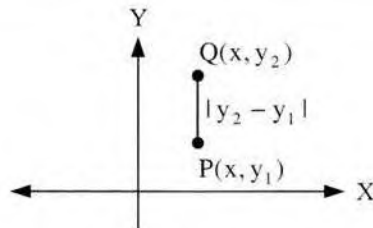
$$|PQ| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$



รูป 1-11

นิยาม 6 กำหนดให้ $P(x, y_1)$ และ $Q(x, y_2)$ เป็นจุดบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน y จะได้

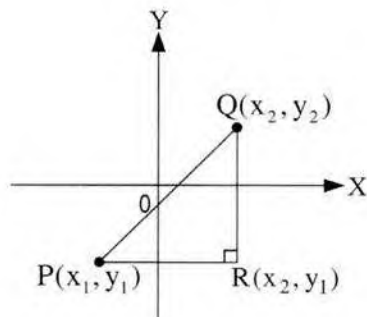
$$|PQ| = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$$



รูป 1-12

ทฤษฎีบท 1 กำหนดให้ $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดใดๆ ในระนาบจะได้

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



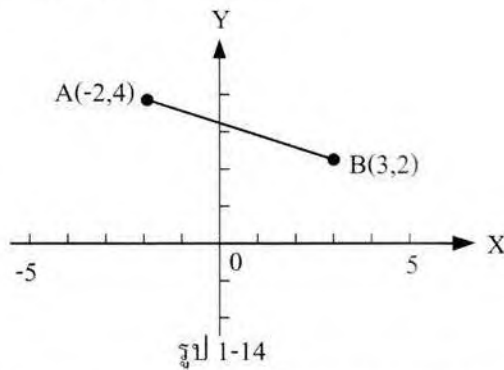
รูป 1-13

พิสูจน์

$$\begin{aligned} \text{ใน } \triangle \text{มุมฉาก } PRQ, |PQ|^2 &= |PR|^2 + |RQ|^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ |PQ|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ \text{นั่นคือ } |PQ| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4 จงหาระยะทางระหว่างจุด A(-2,4) และ B(3,2)

วิธีทำ



$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } |AB| &= \sqrt{(-2-3)^2 + (4-2)^2} \\
 &= \sqrt{(-5)^2 + (2)^2} \\
 &= \sqrt{25+4} \\
 &= \sqrt{29} \quad \#
 \end{aligned}$$

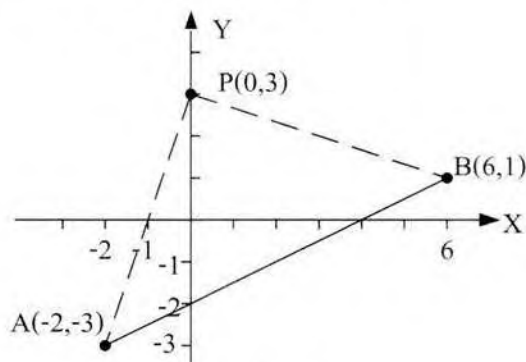
ตัวอย่าง 5 จงหาจุด P บนแกน y ซึ่งอยู่ห่างจากจุด A(-2,-3) และ B(6,1) เป็นระยะทางเท่ากัน

วิธีทำ

เนื่องจากจุด P อยู่บนแกน y มีพิกัด (0,y)

$$\begin{aligned}
 \text{และจากโจทย์} \quad |AP| &= |PB| \\
 \text{ดังนั้น} \quad \sqrt{(0-(-2))^2 + (y-(-3))^2} &= \sqrt{(0-6)^2 + (y-1)^2} \\
 4 + (y+3)^2 &= 36 + (y-1)^2 \\
 4 + y^2 + 6y + 9 &= 36 + y^2 - 2y + 1 \\
 8y &= 24 \\
 y &= 3
 \end{aligned}$$

แสดงว่า จุด P บนแกน y คือ P(0,3) #



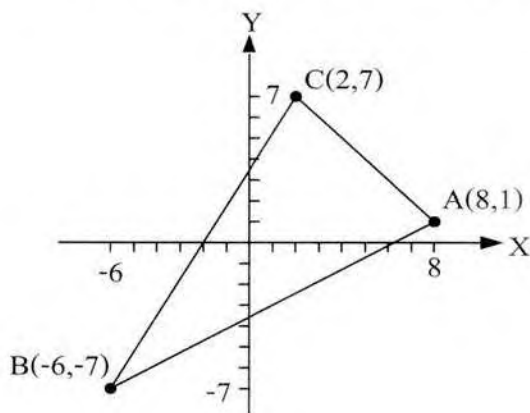
รูป 1-15

ตัวอย่าง 6 กำหนด $\triangle ABC$ โดย $A(8,1)$ $B(-6,-7)$ $C(2,7)$ จงหาความยาวของเส้นรอบรูปของ $\triangle ABC$ พร้อมทั้งบอกว่า $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมชนิดใด

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 |AB| &= \sqrt{(-6-8)^2 + (-7-1)^2} \\
 &= \sqrt{196 + 64} \\
 &= \sqrt{260} \\
 &= 2\sqrt{65} \\
 |BC| &= \sqrt{(2+6)^2 + (7+7)^2} \\
 &= \sqrt{64 + 196} \\
 &= \sqrt{260} \\
 &= 2\sqrt{65} \\
 |AC| &= \sqrt{(2-8)^2 + (7-1)^2} \\
 &= \sqrt{36 + 36} \\
 &= \sqrt{72} \\
 &= 6\sqrt{2} \\
 \text{เส้นรอบรูปของ } \triangle ABC &= |AB| + |BC| + |AC| \\
 &= 2\sqrt{65} + 2\sqrt{65} + 6\sqrt{2} \\
 &= 4\sqrt{65} + 6\sqrt{2} \text{ หน่วย} \quad \#
 \end{aligned}$$

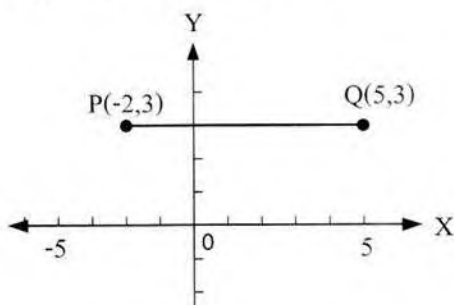
เพราะว่า $|AB| = |BC|$ ดังนั้น แสดงว่า $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว $\#$



รูป 1- 16

ตัวอย่าง 7 จงหาระยะห่างระหว่างจุด $P(-2,3)$ และ $Q(5,3)$

วิธีทำ

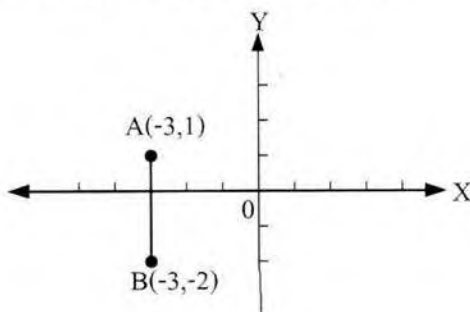


รูป 1-17

$$\text{จะได้ } |PQ| = |5 - (-2)| = |7| = 7 \quad \#$$

ตัวอย่าง 8 จงหาระยะห่างระหว่างจุด $A(-3,1)$ และ $B(-3,-2)$

วิธีทำ



รูปที่ 1-18

$$\text{จะได้ } |AB| = |-2 - 1| = |-3| = 3 \quad \#$$

แบบฝึกหัด 1.2

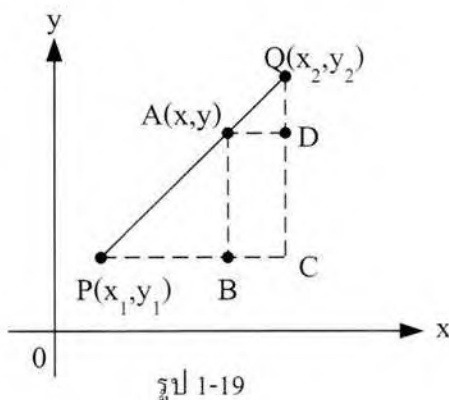
1. ถ้าจุด $A(1, 1)$, $B(-2, 0)$ และ $C(4, 2)$ เป็นจุดสามจุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จงแสดงว่า $|BA| + |AC| = |BC|$
2. จงหาระยะทางระหว่างจุด $(-3, -5)$ กับแกน x
3. จงหาจุดบนแกน y ซึ่งอยู่ห่างจากจุด $(-4, 4)$ และ $(4, 10)$ เป็นระยะทางเท่ากัน
4. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, 3)$ และผ่านจุด $(8, -5)$ จงหาความยาวของรัศมีของวงกลมวงนี้
5. จุด $(0, 0)$, $(8, 18)$ และ $(12, 27)$ เป็นจุดสามจุดที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่
6. ถ้าระยะทางระหว่างจุด $(2, 3)$ และ $(k, 0)$ เป็น 5 หน่วย จงหาค่า k

เฉลยแบบฝึกหัด 1.2

2. 3 หน่วย
3. $(0, 7)$
4. 10 หน่วย
5. อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
6. $k = 6, -2$

1.3 จุดแบ่งส่วนของเส้นตรง

ให้ PQ เป็นส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายอยู่ที่จุด $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ และ $A(x, y)$ เป็นจุดบน PQ และแบ่ง PQ ออกเป็นอัตราส่วน $\frac{|PA|}{|AQ|} = r$ ดังรูป



จากรูป พิจารณาสามเหลี่ยมคล้าย PBA และ ADQ

จะได้ว่า
$$r = \frac{|PA|}{|AQ|} = \frac{|PB|}{|AD|} = \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|}$$

เนื่องจาก A เป็นจุดที่อยู่ระหว่าง P และ Q

ดังนั้น $x_1 < x < x_2$ หรือ $x_2 < x < x_1$

นั่นคือ $x - x_1 > 0$ และ $x_2 - x > 0$ หรือ

$x - x_1 < 0$ และ $x_2 - x < 0$

แสดงว่า
$$r = \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x)}$$

$$rx_2 - rx = x - x_1$$

$$(1+r)x = x_1 + rx_2$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$$

โดยทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

สรุปได้ว่า จุด $A(x,y)$ ซึ่งแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็นอัตราส่วน

$$\frac{|PA|}{|AQ|} = r \quad \text{มีพิกัดเป็น} \quad \left(\frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \frac{y_1 + ry_2}{1+r} \right)$$

ในกรณีที่ $A(x,y)$ แบ่งส่วนของเส้นตรง PQ ออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กันจะได้อัตราส่วน

ของการแบ่งเป็น $r = \frac{|PA|}{|AQ|} = 1$

จะได้

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ดังนั้น พิกัดของจุดแบ่งครึ่งหรือจุดกึ่งกลางคือ $p\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

ตัวอย่าง 9 จงหาพิกัดของจุด ซึ่งแบ่งเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(1,1)$ กับจุด $(-6,-2)$ ออกเป็นอัตราส่วน 3:5

วิธีทำ

ในที่นี้ $r = \frac{3}{5}$

จาก $x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$

$$x = \frac{1 + \frac{3}{5}(-6)}{1 + \frac{3}{5}} = -\frac{13}{8}$$

จาก $y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$

$$y = \frac{1 + \frac{3}{5}(-2)}{1 + \frac{3}{5}} = -\frac{1}{8}$$

นั่นคือ จุดแบ่ง P มีพิกัดเป็น $\left(-\frac{13}{8}, -\frac{1}{8}\right)$ #

ตัวอย่าง 10 จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $A(6,3)$ และ $B(-2,7)$

วิธีทำ

ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลาง

จาก $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{6 + (-2)}{2} = 2$

จาก $y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3 + 7}{2} = 5$

ดังนั้นจุดกึ่งกลางคือ $P(2,5)$ #

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงหาพิกัดของจุด $P(x, y)$ ซึ่งแบ่งเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(1, 7)$ กับจุด $(6, -3)$ ออกเป็นอัตราส่วน $2:3$
2. ให้ $P(2, 5)$, $Q(-3, 4)$ เป็นส่วนของเส้นตรง จงหาพิกัดของจุดบนส่วนของเส้นตรงนี้ ซึ่งอยู่ห่างจากจุด P เท่ากับ $\frac{3}{4}$ ของระยะห่างระหว่าง P และ Q
3. จงหาจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(2, 5)$ กับ $(-4, 3)$
4. ถ้าจุดปลายของเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมหนึ่งเป็น (x, y) และ $(1, 3)$ และจุดศูนย์กลางของวงกลมนี้เป็น $(4, 2)$ จงหา (x, y)

เฉลยแบบฝึกหัด 1.3

1. $(3, 3)$
2. $\left(-\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right)$
3. $(-1, 4)$
4. $(7, 1)$

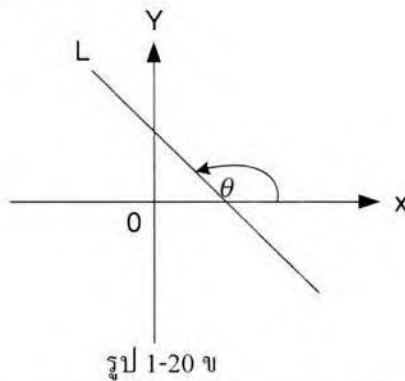
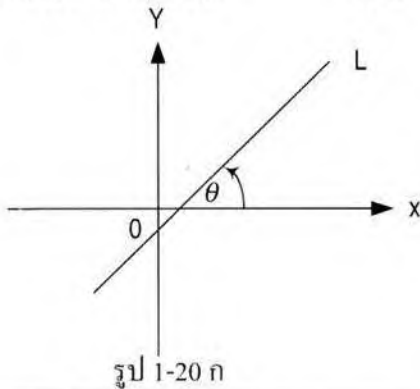
1.4 เส้นตรง (The Straight line)

1.4.1 ความชัน (Slope)

นิยาม 7 มุมเอียงของเส้นตรง L หมายถึง มุมที่เล็กที่สุดที่วัดจากแกน x ไปยังเส้นตรง L ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ถ้าให้ θ แทนมุมเอียงของเส้นตรง L

จะได้ว่า $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ หรือ $0 \leq \theta < \pi$



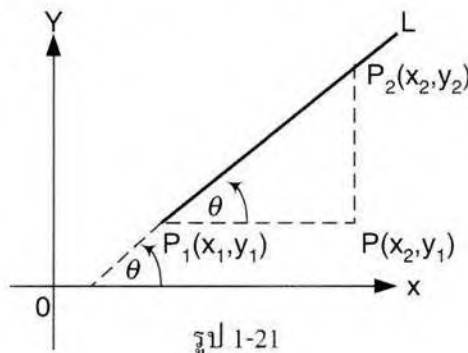
นิยาม 8 ความชันของเส้นตรง L คือค่าแทนเจดจ์ของมุมเอียงของเส้นตรง L ถ้าให้ m แทนความชันของเส้นตรง L และ $\tan \theta$ แทนความชันของเส้นตรง L แล้ว $m = \tan \theta$

ข้อสังเกต

1. เส้นตรงที่มีมุมเอียงเป็นศูนย์ ($\theta=0$) เป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน x และมีความชันเป็นศูนย์
2. เส้นตรงที่มีมุมเอียงเป็นมุมแหลม $0 < \theta < 90^\circ$ ความชันมีค่าเป็นบวก
3. เส้นตรงที่มีมุมเอียงเป็นมุมป้าน $90 < \theta < 180^\circ$ ความชันมีค่าเป็นลบ
4. เส้นตรงที่มีมุมเอียงเท่ากับ 90° ($\theta=90^\circ$) เป็นเส้นตรงในแนวตั้งตั้งฉากกับแกน x ซึ่งไม่นิยามความชัน

โดยทั่วไป อาจหาความชันของเส้นตรงได้จากจุดสองจุดใดๆ ที่อยู่บนเส้นตรงนั้น

ถ้าให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นสองจุดใดๆ บนเส้นตรง L ซึ่งมีมุมเอียง θ โดยที่ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ดังรูป 1-21



$$\text{จะได้ว่า } m = \tan \theta = \frac{PP_2}{P_1P} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{เมื่อ } x_1 \neq x_2$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $90^\circ < \theta < 180^\circ$

$$\text{ก็จะได้ } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{เมื่อ } x_1 \neq x_2$$

สรุปได้ว่า ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ ใดๆ มีค่าเท่ากับ

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{เมื่อ } x_1 \neq x_2$$

ข้อสังเกต จากสูตรข้างต้น

1. ถ้า $y_1 = y_2$ เส้นตรงจะขนานกับแกน x และมีความชันเป็นศูนย์
2. ถ้า $x_1 = x_2$ เส้นตรงจะขนานกับแกน y ซึ่งไม่นิยามความชัน

ตัวอย่าง 11 จงหาความชันและมุมเอียงของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(4,0)$ และ $(5,\sqrt{3})$

วิธีทำ

$$\text{จาก } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{\sqrt{3} - 0}{5 - 4} = \sqrt{3}$$

$$\text{แต่ } \tan \theta = m$$

$$\tan \theta = \sqrt{3}$$

$$= \tan 60^\circ$$

$$\theta = 60^\circ \quad \#$$

1.4.2 เส้นตรงที่ขนานกันและตั้งฉากกัน (Parallel and Perpendicular lines)

นิยาม 9 ให้ θ_1 และ θ_2 เป็นความชันของเส้นตรง L_1 และ L_2 ตามลำดับ จะกล่าวว่า

1. L_1 ขนานกับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $\theta_1 = \theta_2$ และ
2. L_1 ตั้งฉากกับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นที่มีมุมเอียง $0 \leq \theta_1 < 180$, $0 \leq \theta_2 < 180$ และ มีความชัน m_1, m_2 ตามลำดับ

1. L_1 ขนานกับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$
2. L_1 ตั้งฉากกับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 \cdot m_2 = -1$

หมายเหตุ ในที่นี้จะไม่พิสูจน์ทฤษฎีบท 2

ตัวอย่าง 12 เส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(4,3)$ และ $B(5,-2)$ ขนานหรือตั้งฉากกับเส้นตรงที่เชื่อมจุด $C(-1,-3)$ และ $D(-2,2)$

วิธีทำ

$$m_{AB} = \frac{-2-3}{5-4} = -5$$

$$m_{CD} = \frac{2+3}{-2+1} = -5$$

เพราะว่า $m_{AB} = m_{CD}$

ดังนั้น AB ขนานกับ CD #

ตัวอย่าง 13 จงหาความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(3, 4)$ และ $B(-3, -5)$

วิธีทำ

$$\text{หา } m_{AB} = \frac{-5-4}{-3-3} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$$

ให้ L ตั้งฉากกับ AB : $m_L = \frac{-1}{m_{AB}}$

$$= \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} \times 2 = -\frac{2}{3} \quad \#$$

ตัวอย่าง 14 จงตรวจสอบว่าเส้นตรงที่ลากผ่านจุด A และ B ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด C และ D หรือไม่

วิธีทำ ก.) $A(2, -3)$, $B(-5, 1)$, $C(4, 5)$, $D(0, -2)$

$$\text{หา } m_{AB} = \frac{1-(-3)}{-5-2} = \frac{4}{-7}$$

$$m_{CD} = \frac{-2-5}{0-4} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$$

$$\text{จะเห็นว่า } m_{AB} \times m_{CD} = \frac{4}{-7} \times \frac{7}{4} = -1$$

ดังนั้น เส้นตรง AB ตั้งฉากกับเส้นตรง CD #

ข.) $A(2, -3)$, $B(-5, 1)$, $C(7, -1)$, $D(0, 3)$

$$\text{หา } m_{AB} = \frac{1 - (-3)}{-5 - 2} = \frac{4}{-7}$$

$$m_{CD} = \frac{3 - (-1)}{0 - 7} = \frac{4}{-7}$$

$$\text{จะเห็นว่า } m_{AB} \times m_{CD} = \frac{4}{-7} \times \frac{4}{-7} = \frac{16}{49}$$

ดังนั้น เส้นตรง AB ไม่ตั้งฉากกับเส้นตรง CD #

ตัวอย่าง 15 ถ้า $P(k, 3)$ และ $Q(-1, 2)$ เป็นจุดอยู่บนเส้นตรงซึ่งขนานกับเส้นตรงที่ลากผ่านจุด $R(3, 2)$ และ $S(1, -2)$ จงหาค่า k

วิธีทำ

$$m_{PQ} = m_{RS}$$

$$\frac{3 - 2}{k + 1} = \frac{2 + 2}{3 - 1}$$

$$k + 1 = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{1}{2} - 1$$

$$k = -\frac{1}{2} \quad \#$$

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด
 - 1.1 $(-3, -4)$ และ $(5, 8)$
 - 1.2 $(-6, 5)$ และ $(2, -7)$
 - 1.3 $(-5, -1)$ และ $(9, -1)$
 - 1.4 $(3, 6)$ และ $(3, -2)$
2. จงตรวจสอบโดยใช้ความชันของเส้นตรงว่าจุด $(4, 3)$, $(2, 1)$ และ $(-1, -2)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่
3. ถ้า $(-2, 4)$, $(1, k)$ และ $(3, -1)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จงหาค่าของ k
4. กำหนดสี่เหลี่ยม ABCD มีพิกัดของจุดมุมยอด คือ $A(-6, -2)$, $B(4, 1)$, $C(4, 5)$ และ $D(-2, 5)$ จงหาความชันของด้านที่มีและเส้นทแยงมุม
5. จงหาค่า k ที่ทำให้เส้นตรงที่ผ่านจุด $(-4, 3)$ และ $(k, 1)$ มีความชันเท่ากับ $\frac{1}{4}$
6. จงหาความชันของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมที่มีจุดมุมยอด $A(-2, 1)$, $B(3, 4)$ และ $C(-1, 4)$ ของทั้งสามเส้น
7. จงแสดงว่าเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(4, 5)$ และ $B(1, 2)$ ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $C(2, 8)$ และ $D(-2, 4)$
8. ถ้าเส้นตรงผ่านจุด $(k, 7)$ และ $(-3, -2)$ ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, 2)$ และ $(1, -4)$ จงหาค่าของ k
9. จงหาจุด A ซึ่งอยู่บนแกน x ซึ่งทำให้เส้นตรงที่ผ่านจุด A และ $B(1, 2)$ ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $C(-1, 3)$ และ $D(2, -5)$
10. จงตรวจสอบว่าสี่เหลี่ยม ABCD ที่มีจุดยอดมุมต่อไปนี้ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือสี่เหลี่ยมคางหมู
 - 10.1 $A(1, 3)$, $B(2, 5)$, $C(6, 17)$ และ $D(5, 15)$
 - 10.2 $A(2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(0, -8)$ และ $D(-5, -3)$
11. จงตรวจสอบว่าเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B ตั้งฉากหรือขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด C และ D
 - 11.1 $A(2, -3)$, $B(-5, 1)$ และ $C(4, 5)$, $D(0, -2)$
 - 11.2 $A(2, -3)$, $B(-5, 1)$ และ $C(7, -1)$, $D(0, 3)$
 - 11.3 $A(5, 3)$, $B(8, 3)$ และ $C(7, 4)$, $D(7, -4)$
12. ถ้าเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $A(8, k)$ และ $B(5, -4)$ ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $C(4, 3)$ และ $D(1, -2)$ จงหาค่าของ k

เฉลยแบบฝึกหัด 1.4

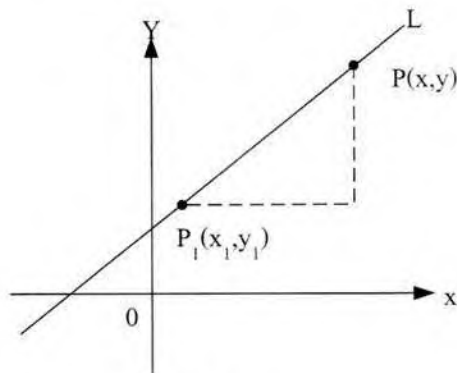
- 1.1 $m_1 = \frac{3}{2}$ 1.2 $m_2 = -\frac{3}{2}$ 1.3 $m_3 = 0$ 1.4 m_4 ไม่นิยาม
2. $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ ดังนั้นจุด $(4, 1)$, $(2, 1)$, $(-1, -2)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
3. $k = 1$
4. m_{AB} คือ $\frac{3}{10}$, m_{BC} ไม่นิยาม(เพราะว่า BC ขนานกับแกน y) , m_{CD} คือ 0 ,
 m_{AD} คือ $\frac{7}{4}$, m_{AC} คือ $\frac{6}{5}$, m_{BD} คือ $-\frac{2}{3}$
5. $k = -12$
6. m_{AE} คือ 1 , m_{BF} คือ $\frac{1}{3}$, m_{CD} คือ -1
7. $m_{AE} = 1$ และ $m_{CD} = 1$ นั่นคือ $m_{AE} = m_{CD} = 1$ ดังนั้น AB ขนานกับ CD
8. $k = 6$
9. จุด A คือ $\left(\frac{14}{8}, 0\right)$
- 10.1 สี่เหลี่ยมด้านขนาน 10.2 สี่เหลี่ยมคางหมู
- 11.1 ตั้งฉาก 11.2 ขนาน 11.3 ขนาน
12. $k = -\frac{29}{5}$

1.5 สมการเส้นตรง (Equation of a Straight Line)

1.5.1 สมการเส้นตรงแบบจุดและความชัน (Point – slope form)

ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ลากผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และมีความชันเป็น m แล้ว สมการ L จะหาได้ดังนี้

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใดๆ บนเส้นตรง L ดังรูป 1-22



รูป 1-22

ความชันของเส้นตรง $L = m$

ดังนั้น $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$

หรือ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ตัวอย่าง 16 จงหาสมการเส้นตรง ซึ่งมีความชันเป็น $\frac{3}{2}$ และผ่านจุด $(-4, 2)$

วิธีทำ

จากสูตร $y - y_1 = m(x - x_1)$

จะได้ $y - 2 = \frac{3}{2}(x - (-4))$

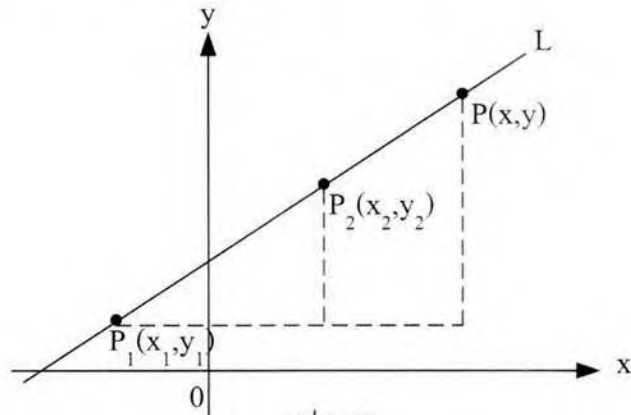
$$2y - 4 = 3x + 12$$

หรือ $3x - 2y + 16 = 0$ #

1.5.2 สมการเส้นตรงแบบจุดสองจุด (Two-points form)

ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ลากผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ แล้วสมการ L จะหาได้ดังนี้

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใดๆ บนเส้นตรง L ดังรูป 1-23



รูป 1-23

$$\text{ความชันของเส้นตรง } L = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{ดังนั้น } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad \text{โดยที่ } x_1 \neq x_2$$

ตัวอย่าง 17 จงหาสมการเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $A(6, -2)$ และ $B(-4, 3)$

วิธีทำ

$$\text{จากสูตร } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - (-2) = \frac{3 - (-2)}{-4 - 6} (x - 6)$$

$$y + 2 = \frac{-5}{10} (x - 6)$$

$$\text{จะได้ } x + 2y - 2 = 0 \quad \#$$