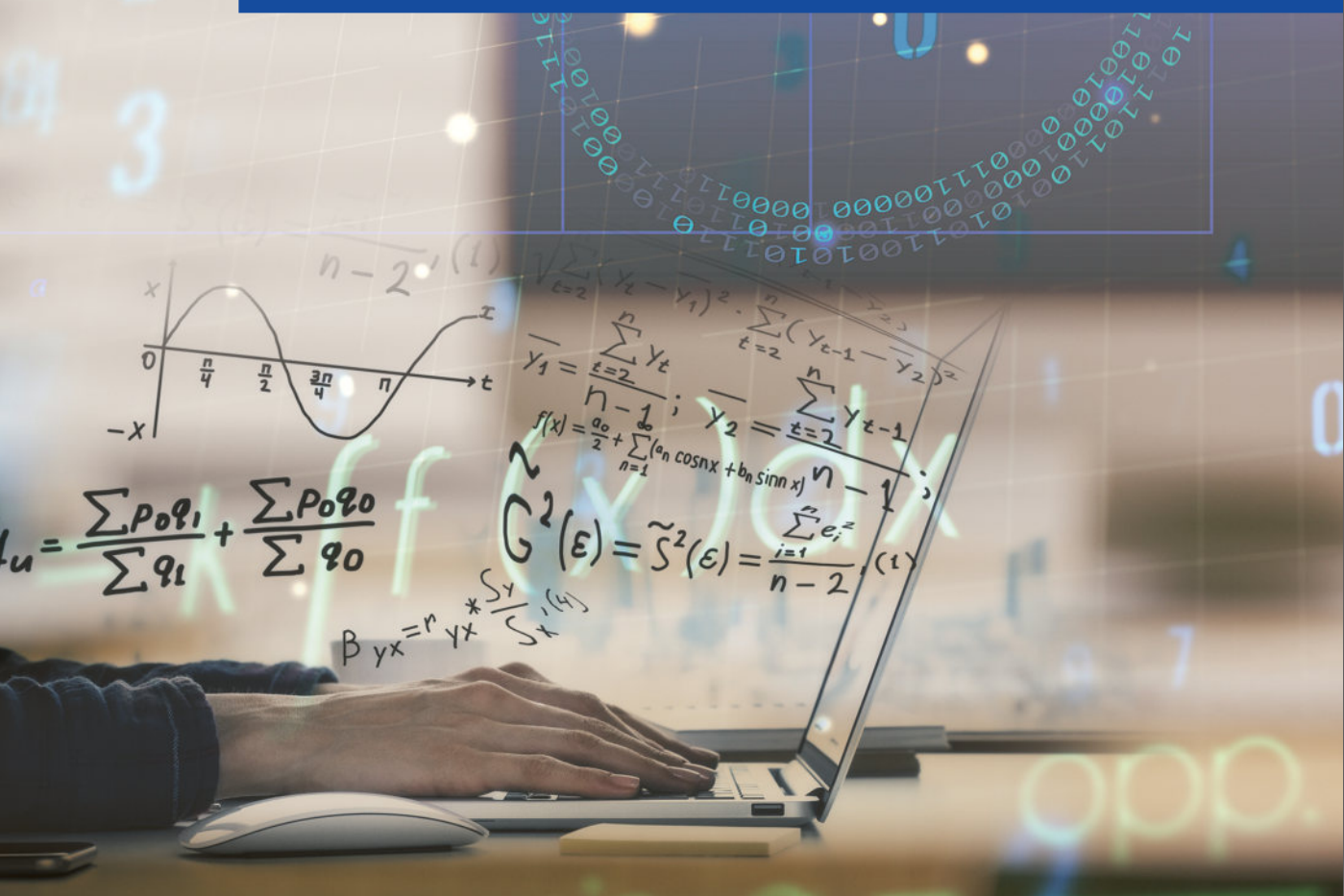


คณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ COMPUTER MATHEMATICS



คณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ COMPUTER MATHEMATICS



คำนำ

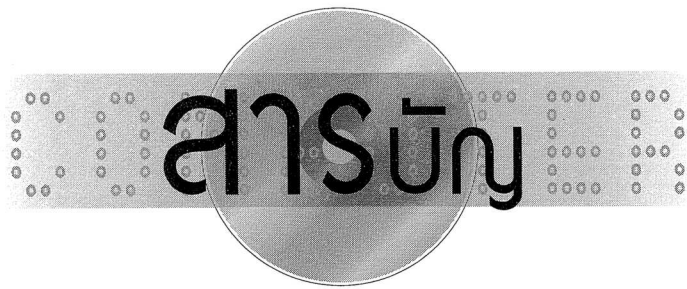
เทคโนโลยีด้านอิเล็กทรอนิกส์ ดิจิตอล คอมพิวเตอร์ ในปัจจุบันมีการเปลี่ยนแปลงเจริญรุดหน้าไปอย่างรวดเร็วและเริ่มเข้ามามีบทบาทมากขึ้นจนกลายเป็นส่วนหนึ่งของชีวิตประจำวัน หนังสือ คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์ เล่มนี้ ผู้เขียนมีความประสงค์เพื่อช่วยให้นักศึกษาระดับ ปวส. ปริญญาตรี ของกรมอาชีวศึกษา สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล สถาบันราชภัฏ ครู อาจารย์ผู้สอน และบุคคลทั่วไปที่มีความสนใจที่จะศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการศึกษา คอมพิวเตอร์ ซึ่งจะ เป็นพื้นฐานให้เข้าใจถึงการทำงานภายในเครื่องคอมพิวเตอร์ และเป็นพื้นฐานสำหรับศึกษาในขั้นที่สูงขึ้นสามารถนำไปประยุกต์ศึกษาในวิชาที่เกี่ยวข้องอื่น ๆ ได้ โดยผู้เขียนได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 10 บท จัดเรียงลำดับไม่ให้สับสน มีตัวอย่างสอดคล้องกับทฤษฎีในทุก ๆ บท มีแบบฝึกหัดท้ายบทพร้อมเฉลยคำตอบ เพื่อทดสอบความเข้าใจ เป็นการง่ายต่อการฝึกทดลอง ซึ่งจะ ทำให้เข้าใจเนื้อหาและสามารถแก้ปัญหาโจทย์ได้ดี

ความบกพร่องใด ๆ อันเกิดจากหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนขอน้อมรับไว้และยินดีรับฟังข้อแก้ไขติชม ด้วยความเคารพ หากหนังสือเล่มนี้มีประโยชน์อยู่บ้าง ผู้เขียนขอขอบคุณดีที่เกิดขึ้นนี้แด่ พ่อ แม่ ครู อาจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่าน

นภัทร วัจนเทพินทร์

รัชเมธี รัชนิพนธ์

โสพัธ สัจจกรมานิต



บทที่ 1	จำนวนจริง	9
	การทำเศษส่วนให้อยู่ในรูปทศนิยม	11
	การทำทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วน	12
	เส้นจำนวน	15
	คุณสมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวก	17
	คุณสมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการคูณ	19
	คุณสมบัติการเท่ากันของการบวกและการคูณ	20
	โจทย์ตัวอย่าง	22
	แบบฝึกหัด	26
บทที่ 2	เซต	27
	การเขียนเซต	27
	ชนิดของเซต	29
	ความสัมพันธ์ระหว่างเซต	30
	แผนภาพเวนน-ออยเลอร์	33
	การดำเนินการของเซต	35
	พีชคณิตของเซต	45
	โจทย์ตัวอย่าง	47
	แบบฝึกหัด	52

บทที่ 3	ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน.....	56
	คู่ลำดับ	56
	ผลคูณคาร์ทีเซียน	57
	คุณสมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน	59
	ความสัมพันธ์	60
	โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์	62
	ฟังก์ชัน	62
	โจทย์ตัวอย่าง	67
	แบบฝึกหัด	71
 บทที่ 4	 ตรรกศาสตร์	 74
	ประพจน์	74
	ตัวแปร	75
	ประโยคเปิด	75
	การเชื่อมประพจน์	76
	การหาค่าความจริงของประพจน์	82
	การวิเคราะห์ด้วยตารางค่าความจริง	83
	การวิเคราะห์ด้วยแผนภาพ	85
	ประพจน์ที่สมมูลกัน	86
	ประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกัน	87
	สัจนิรันดร์	88
	ความขัดแย้งกัน	89
	นิเสธของประพจน์รวม	89
	ตัวบ่งปริมาณ	90
	โจทย์ตัวอย่าง	93
	แบบฝึกหัด	98

บทที่ 5	ระบบตัวเลข	101
	ระบบตัวเลข	102
	การแปลงเลขฐานของระบบตัวเลข	103
	การบวกและลบเลขฐานสอง	115
	การบวกและลบเลขฐานแปด	119
	การบวกและลบเลขฐานสิบหก	120
	การคูณและหารเลขฐานสอง	121
	คอมพลิเมนต์	122
	โจทย์ตัวอย่าง	128
	แบบฝึกหัด	136
 บทที่ 6	 วงจรถลอจิก	 137
	ลอจิกเกต	137
	การต่อวงจรเกตร่วมกัน	144
	การเขียนสมการพีชคณิตจากวงจรถลอจิก	144
	การเขียนวงจรถลอจิกจากสมการพีชคณิต	146
	การหาสถานะเอาต์พุตของวงจรถลอจิก	151
	โจทย์ตัวอย่าง	154
	แบบฝึกหัด	158
 บทที่ 7	 พีชคณิตบูลีน	 161
	กฎของพีชคณิตบูลีน	161
	การใช้พีชคณิตบูลีนลดรูปสมการพีชคณิตลอจิก	162
	การขยายเทอมของสมการพีชคณิตลอจิก	170
	การเขียนและการออกแบบวงจรถลอจิก	171
	การออกแบบวงจรถลอจิกจากฟังก์ชันของสมการพีชคณิต	174
	การออกแบบวงจรถลอจิกจากตารางความจริง	178
	การออกแบบวงจรถลอจิกจากไดอะแกรมเวลา	183
	การออกแบบวงจรถลอจิกโดยใช้แนนด์หรือออร์เกตเพียงอย่างเดียว	185

โจทย์ตัวอย่าง	191
แบบฝึกหัด	200

บทที่ 8 แผนผังคาร์โนท์ 204

แผนผังคาร์โนท์ 2 ตัวแปร	204
แผนผังคาร์โนท์ 3 ตัวแปร	205
แผนผังคาร์โนท์ 4 ตัวแปร	206
การลดรูปพีชคณิตบูลีนโดยใช้แผนผังคาร์โนท์	207
การลดรูปสมการด้วยแผนผังคาร์โนท์จากตารางความจริง	216
สมการที่มีหลายเอาต์พุต	220
เทอมแบบไม่สนใจ	221
โจทย์ตัวอย่าง	224
แบบฝึกหัด	230

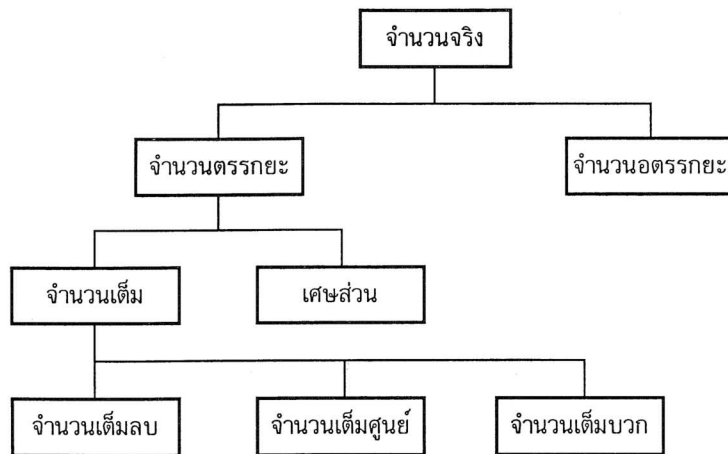
บทที่ 9 เมตริกซ์ 232

สัญลักษณ์ของเมตริกซ์	233
ขนาดของเมตริกซ์	233
ชนิดของเมตริกซ์	234
การเท่ากันของเมตริกซ์	236
การคูณจำนวนคงที่กับเมตริกซ์	239
การบวกเมตริกซ์	239
การลบเมตริกซ์	241
การคูณเมตริกซ์กับเมตริกซ์	243
เมตริกซ์ยกกำลัง	247
ทรานสโพสของเมตริกซ์	249
อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์	251
คุณสมบัติเมตริกซ์	258
โจทย์ตัวอย่าง	265
แบบฝึกหัด	276

บทที่ 10	ดีเทอร์มิแนนต์	282
	การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์	283
	คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์	298
	ระบบสมการเชิงเส้น	304
	การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยดีเทอร์มิแนนต์	305
	แอตจอยต์เมตริกซ์	310
	การหาอินเวอร์สเมตริกซ์โดยใช้แอตจอยต์เมตริกซ์	316
	การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยอินเวอร์สเมตริกซ์	319
	โจทย์ตัวอย่าง	322
	แบบฝึกหัด	336
ภาคผนวก		342
บรรณานุกรม		372

จำนวนจริง (Real Numbers)

จำนวนจริง คือ ยูเนียนของเซตจำนวนตรรกยะกับเซตของจำนวนอตรรกยะ มักเขียนแทนด้วย R แบ่งออกเป็นจำนวนต่าง ๆ ดังนี้



จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วน $\frac{a}{b}$ ได้ โดย a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ $b \neq 0$ จำนวนตรรกยะอาจแบ่งออกเป็นสองส่วน ได้แก่ จำนวนเต็มและเศษส่วน ถ้านับรวมจำนวนที่เป็นทศนิยมด้วย จำนวนทศนียมนั้นต้องเป็นทศนิยมซ้ำ

จำนวนเต็มบวก (Positive integer) หรือจำนวนนับ ถ้าให้ N แทนเซตของจำนวนนับ สมาชิกของ N คือ $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ นั่นคือ $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

จำนวนเต็มศูนย์ (Zero) ได้แก่ 0

จำนวนเต็มลบ (Negative integer) ได้แก่ -1, -2, -3, -4, ...

จำนวนเต็มประกอบด้วย จำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มศูนย์ และจำนวนเต็มลบ ถ้าให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม นั่นคือ $I = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

เศษส่วน (Fraction) ได้แก่ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{-4}{5}$, $2\frac{1}{2}$ เป็นต้น หรือทศนิยมซ้ำ เช่น

$$0.111... = 0.\dot{1} = \frac{1}{9}$$

$$0.2525 ... = 0.\dot{2}\dot{5} = \frac{25}{99}$$

จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ หรือจำนวนที่ไม่สามารถเขียนในรูปเศษส่วน แต่สามารถเขียนอยู่ในรูปทศนิยมไม่ซ้ำ เช่น

$$\sqrt{2} = 1.41421356...$$

$$\sqrt{3} = 1.7320508...$$

$$\pi = 3.14159...$$

ตัวอย่างที่ 1.1 จำนวนต่อไปนี้ ข้อใดบ้างเป็นจำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ

- | | | |
|-------------------|-------------------|------------------------|
| 1. 0.5555 | 2. 0.2277 | 3. 0 |
| 4. 5.121121112... | 5. $\frac{22}{7}$ | 6. $1.3\dot{7}\dot{6}$ |

วิธีทำ

- | | |
|-----------------|------------------|
| (1) จำนวนตรรกยะ | (4) จำนวนอตรรกยะ |
| (2) จำนวนตรรกยะ | (5) จำนวนตรรกยะ |
| (3) จำนวนตรรกยะ | (6) จำนวนตรรกยะ |

ตัวอย่างที่ 1.2 ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 0.020020002... เป็นจำนวนตรรกยะ
- $\sqrt{4}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
- จำนวนอตรรกยะเป็นจำนวนจริง
- $8\sqrt{16}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
- $\sqrt[3]{-8}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

วิธีทำ

(1) ผิด

(2) ผิด

(3) ถูก

(4) ผิด

(5) ผิด

การทำเศษส่วนให้อยู่ในรูปทศนิยม

การทำเศษส่วนให้อยู่ในรูปทศนิยม ใช้วิธีนำส่วนไปหารเศษ เช่น

$$\frac{2}{5} = 0.4 \quad \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\frac{5}{8} = 0.625 \quad \frac{125}{8} = 15.625$$

ในบางครั้งผลหารที่ได้จะอยู่ในรูปทศนิยมซ้ำ เช่น

$$\frac{1}{3} = 0.333... \text{ (เลขที่ซ้ำคือ 3) เขียนใหม่เป็น } \frac{1}{3} = 0.\dot{3}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{4}{33} = 0.121212... = 0.\dot{1}\dot{2}$$

$$\frac{19}{11} = 1.727272... = 1.\dot{7}\dot{2}$$

$$\frac{3}{2} = 1.5000... = 1.5\dot{0}$$

ในกรณีที่ซ้ำด้วยตัวเลข 0 จะไม่นิยมเขียนส่วนที่ซ้ำ เช่น

$$\frac{3}{2} = 1.5\dot{0} \text{ มักจะเขียน } \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\frac{2}{5} = 0.4\dot{0} \text{ มักจะเขียน } \frac{2}{5} = 0.4$$

ตัวอย่างที่ 1.3 จงเขียนเศษส่วนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปทศนิยม

1. $\frac{1}{3}$

2. $\frac{1}{7}$

3. $\frac{1}{11}$

4. $\frac{17}{99}$

5. $\frac{35}{333}$

6. $\frac{177}{999}$

วิธีทำ

$$(1) \frac{1}{3} = 0.333 \dots = 0.\dot{3}$$

$$(2) \frac{1}{7} = 0.142857142857142857\dots = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

$$(3) \frac{1}{11} = 0.090909\dots = 0.\dot{0}\dot{9}$$

$$(4) \frac{17}{99} = 0.171717\dots = 0.\dot{1}\dot{7}$$

$$(5) \frac{35}{333} = 0.105105 \dots = 0.\dot{1}\dot{0}\dot{5}$$

$$(6) \frac{177}{999} = 0.177177 \dots = 0.\dot{1}\dot{7}\dot{7}$$

การทำทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วน

1. กรณีที่ซ้ำด้วยศูนย์ สามารถเปลี่ยนเป็นเศษส่วนได้เลย โดยให้ส่วนเป็น 10, 100, 1000, ...

$$0.3 = \frac{3}{10}$$

$$0.75 = \frac{75}{100}$$

$$0.198 = \frac{198}{1000}$$

$$0.0235 = \frac{235}{10000}$$

$$2.45 = 2 + \frac{45}{100} = \frac{245}{100}$$

$$1.589 = 1 + \frac{589}{1000} = \frac{1589}{1000}$$

2. กรณีที่ซ้ำไม่ใช่ศูนย์ เช่น $0.\dot{2}$, $0.\dot{1}\dot{5}$ เป็นต้น มีวิธีการทำเป็นเศษส่วนดังตัวอย่างดังนี้

ตัวอย่างที่ 1.4 จงทำ $0.\dot{5}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

วิธีทำ

ให้

$$x = 0.\dot{5}$$

นั่นคือ

$$x = 0.555\dots$$

$$x = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \dots \quad \dots\dots\dots(1)$$

นำ $10 \times$ สมการที่ (1)

$$10x = 5 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \dots \quad \dots\dots\dots(2)$$

สมการ (2) - (1)

$$10x - x = \left(5 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \dots\right) - \left(\frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \dots\right)$$

$$9x = 5$$

$$x = \frac{5}{9}$$

แต่ $x = 0.\dot{5}$

นั่นคือ $0.\dot{5} = \frac{5}{9}$

ตัวอย่างที่ 1.5 จงทำ $0.\dot{1}\dot{5}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

วิธีทำ ให้ $x = 0.\dot{1}\dot{5}$

นั่นคือ $x = 0.151515\dots$

$$x = \frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \dots \quad \dots\dots\dots(1)$$

นำ $100 \times$ สมการที่ (1)

$$100x = 10 + 5 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \dots \quad \dots\dots\dots(2)$$

สมการ (2) - (1)

$$100x - x = \left(10 + 5 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \dots\right) - \left(\frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000} + \dots\right)$$

$$99x = 15$$

$$x = \frac{15}{99}$$

แต่ $x = 0.\dot{1}\dot{5}$

นั่นคือ $0.\dot{1}\dot{5} = \frac{15}{99}$

นอกจากวิธีการดังกล่าวข้างต้น ยังมีวิธีอื่น ๆ อีกในการเขียนทศนิยมซ้ำให้อยู่ในรูปเศษส่วน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.6 จงเปลี่ยนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเศษส่วน (1) $0.\dot{7}$, (2) $3.4\dot{7}\dot{5}$

วิธีทำ	(1) ให้	$x = 0.\dot{7}$	
		$x = 0.777...$	(1)
	$(1) \times 10$	$10x = 7.77...$	(2)
	$(2) - (1)$	$9x = 7$	
		$x = \frac{7}{9}$	
	นั่นคือ	$0.\dot{7} = \frac{7}{9}$	
	(2) ให้	$x = 3.4\dot{7}\dot{5}$	
		$x = 3.4757575...$	(1)
	$(1) \times 1000$	$1000x = 3475.7575$	(2)
	$(1) \times 10$	$10x = 34.7575$	(3)
	$(2) - (3)$	$990x = 3441$	
		$x = \frac{3441}{990}$	
	นั่นคือ	$3.4\dot{7}\dot{5} = \frac{3441}{990} = 3\frac{471}{990}$	

จากตัวอย่างข้างต้น มีข้อสังเกตดังนี้

1. ถ้ามีตัวเลขที่ซ้ำ 1 ตัว เมื่อเขียนเป็นเศษส่วนจะมีตัวส่วนเป็น 9 และตัวเศษก็คือตัวเลขที่เป็นตัวซ้ำนั่นเอง เช่น $0.\dot{5} = \frac{5}{9}$, $0.\dot{7} = \frac{7}{9}$
2. ถ้าตัวเลขที่ซ้ำมี 2 ตัว เมื่อเขียนเป็นเศษส่วนจะมีตัวส่วนเป็น 99 และตัวเศษก็คือตัวเลขที่เป็นตัวซ้ำนั่นเอง เช่น $0.\dot{1}\dot{3} = \frac{13}{99}$, $0.\dot{1}2\dot{7} = \frac{127}{999}$

3. ถ้าทศนิยมมีบางส่วนซ้ำ บางส่วนไม่ซ้ำ เมื่อเขียนในรูปเศษส่วน
 เศษ = ตัวเลขทั้งหมดที่อยู่ตามหลังจุดทศนิยม ลบด้วยตัวเลขที่ไม่ซ้ำ
 ส่วน = 9 ตามจำนวนซ้ำ และ 0 ตามจำนวนที่ไม่ซ้ำ

$$\text{เช่น } 0.2\dot{5}1 = \frac{251 - 2}{990} = \frac{249}{990}$$

ตัวอย่างที่ 1.7 จงเปลี่ยนทศนิยมต่อไปนี้เป็นเศษส่วน

1. $0.\dot{6}$ 2. $0.4\dot{5}$ 3. $0.5\dot{7}\dot{5}$
 4. $2.4\dot{3}$ 5. $0.321\dot{8}$

วิธีทำ

$$(1) 0.\dot{6} = \frac{6}{9}$$

$$(2) 0.4\dot{5} = \frac{45}{99}$$

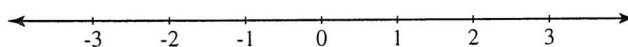
$$(3) 0.5\dot{7}\dot{5} = \frac{575 - 5}{990} = \frac{570}{990} = \frac{57}{99}$$

$$(4) 2.4\dot{3} = 2 + 0.4\dot{3} = 2 + \frac{43}{99} = \frac{241}{99}$$

$$(5) 0.321\dot{8} = \frac{3218 - 32}{9900} = \frac{3186}{9900}$$

เส้นจำนวน (Real number line)

จำนวนจริงทุกจำนวนสามารถแสดงบนเส้นจำนวนได้ ถ้าลากเส้นตรงเส้นหนึ่ง เลือกจุด ๆ หนึ่งเรียกว่า 0 บนเส้นตรง ให้จุดนี้แทนจำนวนเต็มศูนย์ เลือกจุดบนเส้นตรงทางขวาของ 0 ให้แทน 1, 2, 3... โดยมีระยะห่างจาก 0 เท่ากับ 1 หน่วย, 2 หน่วย, 3 หน่วย, ...ตามลำดับ เลือกจุดบนเส้นตรงทางซ้าย 0 ให้แทนจำนวน -1, -2, -3 ... โดยมีระยะห่างจาก 0 เท่ากับ 1 หน่วย, 2 หน่วย, 3 หน่วย ... ตามลำดับ ดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1

ถ้ากำหนดจำนวนจริงจำนวนหนึ่งมาให้จะมีจุดบนเส้นตรงนี้เพียงจุดเดียวแทนจำนวนนั้น เช่น $-\frac{1}{2}$ จะแทนได้ด้วยจุดทางซ้ายของ 0 ห่างจาก 0 เป็นระยะทาง $\frac{1}{2}$ หน่วย, $\sqrt{3}$ แทนได้ด้วยจุดทางขวาของ 0 ห่างจาก 0 เป็นระยะทาง $\sqrt{3}$ หน่วย

-1 เป็นจำนวนที่แทนได้ด้วยจุดบนเส้นตรง มีระยะห่างจาก 0 ไปทางซ้าย 1 หน่วย นอกจากนี้ -1 กับ 1 เป็นจำนวนตรงข้ามซึ่งกันและกัน เพราะอยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะทางเท่ากัน แต่อยู่คนละข้างของจุด 0 กล่าวโดยทั่วไป ถ้า a เป็นจำนวนจริงไม่เท่ากับศูนย์ จุดแทนจำนวน a อาจจะอยู่ทางซ้ายหรือขวาของ 0 ก็ได้ ถ้า a แทนได้ด้วยจุดทางขวาของ 0 เรียกว่า a เป็นจำนวนบวก ถ้า a แทนได้ด้วยจุดทางซ้ายของ 0 เรียกว่า a เป็นจำนวนลบ ดังนั้นลบจึงบอกทิศทางที่ตรงข้ามกับบวก การใส่เครื่องหมายลบ (-) หน้าจำนวนจำนวนหนึ่งก็เป็นการบอกทิศทางด้วยเหตุนี้บางครั้งมีความจำเป็นต้องใช้จำนวนโดยไม่คำนึงถึงเครื่องหมาย จึงนิยามค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงขึ้น

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง (Absolute value)

ในการใช้จุดบนเส้นตรงแทนจำนวนจริง จะเรียกระยะทางจาก 0 ถึงจุดแทน a ว่า ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|a|$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \text{ เป็นบวก} \\ 0 & \text{เมื่อ } a \text{ เป็นศูนย์} \\ -a & \text{เมื่อ } a \text{ เป็นลบ} \end{cases}$$

เช่น ถ้า $a = 3$ แล้ว $|3| = 3$ หมายความว่า จุด a อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 3 หน่วย

ถ้า $a = 0$ แล้ว $|0| = 0$ หมายความว่า จุด a อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 0 หน่วย

ถ้า $a = -3$ แล้ว $|-3| = 3$ หมายความว่า จุด a อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 3 หน่วย

ตัวอย่างที่ 1.8 จงหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวน $|2|$, $|-3|$, $|3 - 7| + 2$

วิธีทำ

$$|2| = 2$$

$$|-3| = -(-3) = 3$$

$$|3 - 7| + 2 = |-4| + 2$$

$$= 4 + 2 = 6$$

คุณสมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวก

ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. คุณสมบัติปิดของการบวก ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงแล้ว $a + b$ เป็นจำนวนจริงด้วย
2. คุณสมบัติการสลับที่ของการบวก ในการบวกจำนวนจริงสองจำนวน เมื่อสลับที่จำนวนทั้งสองนั้นแล้ว ผลบวกจะเท่าเดิม นั่นคือ $a + b = b + a$
3. คุณสมบัติการจับหมู่ของการบวก ในการบวกจำนวนจริงสามจำนวน จะบวกสองจำนวนแรกก่อนหรือสองจำนวนหลังก่อน ผลบวกจะเท่าเดิม นั่นคือ $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. เอกลักษณ์การบวก ในระบบจำนวนจริงมี 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ 0 จะบวกทางขวาหรือทางซ้ายของจำนวนจริง a ย่อมมีค่าเท่ากับ a นั่นคือ $a + 0 = a = 0 + a$
5. อินเวอร์สการบวก ในระบบจำนวนจริงมี $-a$ เป็นอินเวอร์สการบวกของจำนวนจริง a นำ $-a$ บวกทางขวาหรือทางซ้ายของจำนวนจริง a ย่อมมีค่าเท่ากับ 0 นั่นคือ $a + (-a) = 0 = (-a) + a$

การลบจำนวนจริง

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ $a - b$ คือ ผลบวกของ a กับอินเวอร์สการบวกของ b นั่นคือ $a - b = a + (-b)$

ตัวอย่างที่ 1.9 จงบอกคุณสมบัติของจำนวนจริง

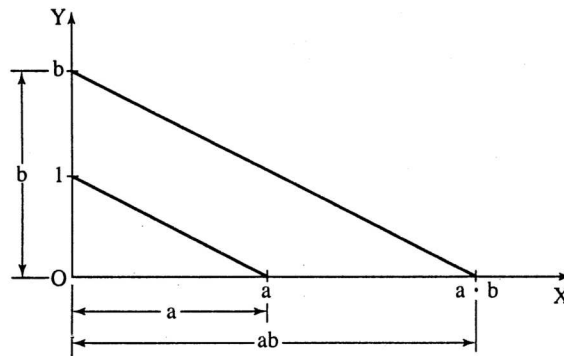
1. $2 + 7$ เป็นจำนวนจริง
2. $(2 + 7) + 6 = (7 + 2) + 6$
3. $(2 + 7) + 6 = 2 + (7 + 6)$
4. $12 + 0 = 12$
5. จำนวนจริงที่บวกกับ 3.98 แล้วได้ศูนย์

วิธีทำ

- (1) คุณสมบัติปิดของการบวก
- (2) คุณสมบัติการสลับที่ของการบวก
- (3) คุณสมบัติการจับหมู่ของการบวก
- (4) เอกลักษณ์การบวก
- (5) อินเวอร์สการบวก

การคูณจำนวนจริง

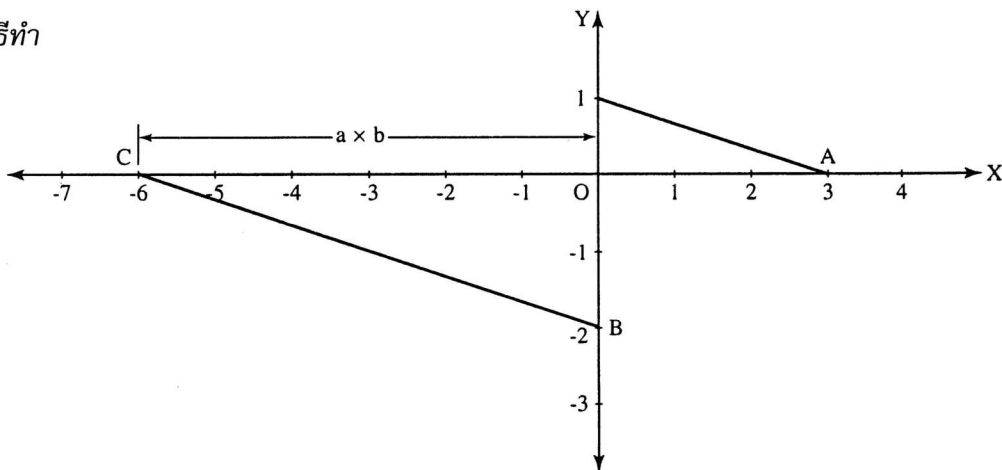
ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง ผลคูณของ a และ b เป็นจำนวนจริง เขียนสัญลักษณ์แทน a คูณ b ได้หลายแบบ เช่น $a \times b$, $(a)(b)$, $a \cdot b$ ผลคูณของ a และ b อาจแสดงจุดบนเส้นจำนวนโดยสร้างแกน X และแกน Y ตัดกันที่จุด O กำหนดจุด a บนแกน X จากจุดนี้ลากเส้นตรงไปพบแกน Y ที่จุดแทน 1 กำหนดจุดจำนวนจริง b บนแกน Y จากจุดนี้ลากเส้นตรงขนานกับเส้นตรงเส้นแรกไปตัดแกน X จะได้จุดตัดบนแกน X เป็นจุดแทนค่าของผลคูณของ a และ b



รูปที่ 1.2

ตัวอย่างที่ 1.10 กำหนดให้ $a = 3$ และ $b = -2$ จงแสดงจุดบนเส้นจำนวนของ $a \times b$

วิธีทำ



$$OA = a = 3 \text{ และ } OB = b = -2$$

$$a \times b = OC$$

$$\therefore (3)(-2) = -6$$

คุณสมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการคูณ

ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. คุณสมบัติปิดของการคูณ ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง $a \times b$ จะเป็นจำนวนจริงด้วย
2. คุณสมบัติการสลับที่ของการคูณ ในการคูณจำนวนจริงสองจำนวน เมื่อสลับที่กันระหว่างสองจำนวนแล้วผลคูณยังคงเท่าเดิม นั่นคือ $a \cdot b = b \cdot a$
3. คุณสมบัติการจับหมู่ของการคูณ ในการคูณจำนวนสามจำนวน จะคูณสองจำนวนแรกก่อนหรือสองจำนวนหลังก่อน ผลคูณยังคงเท่าเดิม นั่นคือ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
4. เอกลักษณ์การคูณ ในระบบจำนวนจริงมี 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ 1 จะคูณทางขวาหรือทางซ้ายของจำนวนจริง a ย่อมมีค่าเท่ากับ a นั่นคือ $a \times 1 = a = 1 \times a$
5. อินเวอร์สการคูณ ในระบบจำนวนจริงมี $\frac{1}{a}$ หรือ a^{-1} โดยที่ a ไม่เท่ากับศูนย์ เป็นอินเวอร์สการคูณของจำนวนจริง a นำ a^{-1} คูณทางขวาหรือทางซ้ายของจำนวนจริง a ย่อมมีค่าเท่ากับ 1 นั่นคือ $(a)(a^{-1}) = 1 = (a^{-1})(a)$
6. คุณสมบัติการแจกแจง ในระบบจำนวนจริงการคูณจำนวนจริงกับผลบวกของจำนวนจริงสองจำนวน จะมีผลลัพธ์เท่ากับผลบวกระหว่างจำนวนจริงคูณกับแต่ละจำนวนนั้น นั่นคือ $a(b + c) = ab + ac$

การหารจำนวนจริง

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $b \neq 0$, $a \div b$ คือ ผลคูณของ a กับอินเวอร์สการคูณของ b นั่นคือ $a \div b = (a)(b^{-1}) = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

ตัวอย่างที่ 1.11 จงบอกคุณสมบัติของจำนวนจริง

1. $(12)(-14)$ เป็นจำนวนจริง
2. $(ab)c = (ba)c$
3. $(a + b)c = ac + bc$
4. $(ab)c = a(bc)$
5. $2 \cdot 0 = 0$

วิธีทำ

- (1) คุณสมบัติปิดของการคูณ
- (2) คุณสมบัติการสลับที่ของการคูณ
- (3) คุณสมบัติการแจกแจง
- (4) คุณสมบัติการจัดหมู่ของการคูณ
- (5) เอกลักษณ์การคูณ

คุณสมบัติการเท่ากันของการบวกและการคูณ

กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง

1. คุณสมบัติการสะท้อน จำนวนจริงใด ๆ ย่อมเท่ากับจำนวนจริงนั้น ๆ เสมอ นั่นคือ

$$a = a$$

2. คุณสมบัติการสมมาตร จำนวนจริงสองจำนวน a และ b ถ้าจำนวนแรกเท่ากับจำนวนหลังแล้ว จำนวนหลังจะเท่ากับจำนวนแรกด้วย นั่นคือ ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$

3. คุณสมบัติการถ่ายทอด จำนวนจริงสามจำนวน a, b และ c ถ้าจำนวนแรกเท่ากับจำนวนที่สอง และจำนวนที่สองเท่ากับจำนวนที่สามแล้ว จำนวนแรกจะเท่ากับจำนวนที่สาม นั่นคือ ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$

4. คุณสมบัติการคูณด้วยจำนวนเท่ากัน จำนวนจริงสามจำนวน a, b และ c ถ้าจำนวนแรกเท่ากับจำนวนที่สอง เมื่อนำจำนวนที่สามมาคูณเข้าทั้งสองข้าง ผลที่ได้จะเท่ากัน นั่นคือ ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

5. คุณสมบัติการบวกด้วยจำนวนเท่ากัน จำนวนจริงสามจำนวน a, b และ c ถ้าจำนวนแรกเท่ากับจำนวนที่สอง เมื่อนำจำนวนที่สามมาบวกเข้าทั้งสองข้าง ผลที่ได้จะเท่ากัน นั่นคือ ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$

คุณสมบัติการไม่เท่ากัน

ถ้า $a \neq b$ แล้ว $a < b$ อ่านว่า a น้อยกว่า b หมายความว่า $a - b$ เป็นจำนวนลบ เขียนแทนด้วย $a - b < 0$ และ $a > b$ อ่านว่า a มากกว่า b หมายความว่า $a - b$ เป็นจำนวนบวก เขียนแทนด้วย $a - b > 0$

คุณสมบัติไตรวิภาค

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงแล้ว $a = b$, $a < b$ และ $a > b$ จะเป็นจริงเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง

$a \leq b$ อ่านว่า a น้อยกว่าหรือเท่ากับ b เขียนแทนด้วย $a - b \leq 0$

$a \geq b$ อ่านว่า a มากกว่าหรือเท่ากับ b เขียนแทนด้วย $a - b \geq 0$

คุณสมบัติของการไม่เท่ากันเทียบกับคุณสมบัติของการเท่ากัน ได้ดังนี้

1. คุณสมบัติการถ่ายทอด จำนวนจริงสามจำนวน a , b และ c ถ้าจำนวนแรกมากกว่าจำนวนที่สอง และจำนวนที่สองมากกว่าจำนวนที่สามแล้ว จำนวนแรกจะมากกว่าจำนวนที่สามด้วย นั่นคือ ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$

2. คุณสมบัติการบวกด้วยจำนวนเท่ากัน จำนวนจริงสามจำนวน a , b และ c ถ้าจำนวนแรกมากกว่าจำนวนที่สอง เมื่อนำจำนวนที่สามบวกเข้าทั้งสองข้าง ผลบวกของจำนวนแรกกับจำนวนที่สามจะมากกว่าจำนวนที่สองบวกกับจำนวนที่สาม นั่นคือ ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$

3. คุณสมบัติการคูณด้วยจำนวนเท่ากัน จำนวนจริงสามจำนวน a , b และ c

กรณีที่ 1 ถ้าจำนวนแรกมากกว่าจำนวนที่สอง เมื่อนำจำนวนที่สามซึ่งมากกว่าศูนย์มาคูณเข้าทั้งสองข้าง ผลคูณของจำนวนแรกกับจำนวนที่สามจะมากกว่าผลคูณของจำนวนที่สองกับจำนวนที่สาม นั่นคือ ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$

กรณีที่ 2 ถ้าจำนวนแรกมากกว่าจำนวนที่สอง เมื่อนำจำนวนที่สามซึ่งน้อยกว่าศูนย์มาคูณเข้าทั้งสองข้าง ผลคูณของจำนวนแรกกับจำนวนที่สามจะน้อยกว่าผลคูณของจำนวนที่สองกับจำนวนที่สาม นั่นคือ ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$

โจทย์ตัวอย่าง

1. จงพิจารณาว่าข้อต่อไปนี้ถูกหรือผิด

1.1 $1/\pi$ เป็นจำนวนตรรกยะ ...(ถูก)

1.2 $0.5999\ldots$ เป็นจำนวนตรรกยะ ...(ถูก)

1.3 $0.7676676667\ldots$ เป็นจำนวนตรรกยะ ...(ผิด)

1.4 1.414 เป็นจำนวนตรรกยะ ...(ถูก)

1.5 ถ้า x เป็นจำนวนอตรรกยะแล้ว $\sqrt{|x|}$ ก็เป็นจำนวนอตรรกยะด้วย ...(ถูก)

2. จงแสดงว่า $\frac{2.5}{6}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

เนื่องจาก $2.5 = \frac{25}{10}$

ดังนั้น $\frac{2.5}{6} = \frac{25/10}{6} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$

จำนวนดังกล่าวเป็นเศษส่วนที่เศษเป็นจำนวนเต็ม ส่วนเป็นจำนวนเต็ม และส่วนไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น $\frac{2.5}{6}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

3. จงเขียนเศษส่วนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปทศนิยม

3.1 $\frac{1}{6}$

3.2 $\frac{1}{9}$

3.3 $\frac{4}{33}$

3.4 $\frac{19}{11}$

3.5 $\frac{388}{990}$

3.1 $\frac{1}{6} = 0.1666\ldots = 0.1\dot{6}$

3.2 $\frac{1}{9} = 0.111\ldots = 0.\dot{1}$

3.3 $\frac{4}{33} = 0.121212\ldots = 0.1\dot{2}$

3.4 $\frac{19}{11} = 1.727272\ldots = 1.\dot{7}\dot{2}$

3.5 $\frac{388}{990} = 0.3919191\ldots = 0.39\dot{1}$

4. จงทำ $0.2\dot{6}1$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

ให้

$$x = 0.2\dot{6}1$$

$$x = 0.2616161...$$

$$x = \frac{2}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{6}{10000} + \dots \quad \text{.....(1)}$$

นำ 1000 คูณสมการที่ (1)

$$1000x = 200 + 60 + 1 + \frac{6}{10} + \dots \quad \text{.....(2)}$$

นำ 10 คูณสมการที่ (1)

$$10x = 2 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100} + \dots \quad \text{.....(3)}$$

สมการ (2) - (3)

$$1000x - 10x = \left(261 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100} + \dots\right) - \left(2 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100} + \dots\right)$$

$$990x = 261 - 2 = 259$$

$$x = \frac{259}{990}$$

$$\therefore 0.2\dot{6}1 = \frac{259}{990}$$

5. จงทำ $0.5\dot{3}1$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

ให้

$$x = 0.5\dot{3}1$$

$$x = 0.5313131...$$

$$x = \frac{5}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots \quad \text{.....(1)}$$

นำ 1000 คูณสมการที่ (1)

$$1000x = 500 + 30 + 1 + \frac{3}{10} + \dots$$

$$1000x = 531 + \frac{3}{10} + \dots \quad \text{.....(2)}$$

นำ 10 คูณสมการที่ (1)

$$10x = 5 + \frac{3}{10} + \frac{1}{100} + \dots \quad \dots\dots\dots(3)$$

สมการ (2) - (3)

$$990x = 531 - 5 = 526$$

$$x = \frac{526}{990}$$

$$\therefore 0.\dot{5}\dot{3}\dot{1} = \frac{526}{990}$$

6. จงทำ $0.\dot{2}\dot{3}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

ให้

$$x = 0.\dot{2}\dot{3}$$

$$x = 0.232323 \dots \quad \dots\dots\dots(1)$$

นำ 100 คูณสมการ (1)

$$100x = 23.2323 \quad \dots\dots\dots(2)$$

สมการ (2) - (1)

$$99x = 23$$

$$x = \frac{23}{99}$$

$$\therefore 0.\dot{2}\dot{3} = \frac{23}{99}$$

7. จงทำ $0.4\dot{6}\dot{3}$ ให้อยู่ในรูปเศษส่วน

ให้

$$x = 0.4\dot{6}\dot{3}$$

$$x = 0.4636363\dots \quad \dots\dots\dots(1)$$

นำ 1000 คูณสมการที่ (1)

$$1000x = 463.6363 \quad \dots\dots\dots(2)$$

นำ 10 คูณสมการที่ (1)

$$10x = 4.6363 \quad \dots\dots\dots(3)$$

นำ (2) - (3)

$$990x = 463 - 4$$

$$x = \frac{459}{990}$$

$$\therefore 0.4\dot{6}\dot{3} = \frac{459}{990}$$

8. จงเปลี่ยนทศนิยมต่อไปนี้เป็นเศษส่วน

8.1 $0.\dot{8}$

8.2 $0.\dot{4}\dot{3}$

8.3 $0.4\dot{7}\dot{5}$

8.4 $0.34\dot{6}\dot{7}\dot{5}$

8.5 $0.32\dot{1}\dot{4}$

8.1 $0.\dot{8} = \frac{8}{9}$

8.2 $0.\dot{4}\dot{3} = \frac{43}{99}$

8.3 $0.4\dot{7}\dot{5} = \frac{475 - 4}{990} = \frac{471}{990}$

8.4 $0.34\dot{6}\dot{7}\dot{5} = \frac{34675 - 34}{99900} = \frac{34641}{99900}$

8.5 $0.32\dot{1}\dot{4} = \frac{3214 - 32}{9900} = \frac{3182}{9900}$

แบบฝึกหัด

1. จำนวนต่อไปนี้ ข้อใดบ้างเป็นจำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ

1.1 π

1.2 $\sqrt{2}$

1.3 $0.34334332\dots$

1.4 $35/99$

1.5 $(-2.7)^3$

1.6 $2 + \sqrt{7}$

2. ข้อความต่อไปนี้ ถูกหรือผิด

2.1 $9.325672 \dots$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

2.2 0 เป็นจำนวนจริง

2.3 $\sqrt{4} + \sqrt{9}$ เป็นจำนวนเต็ม

2.4 $\sqrt[3]{-8}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

2.5 $\sqrt{(a-b)^2} = a-b$

2.6 จำนวนตรรกยะเป็นจำนวนจริง

2.7 มีจำนวนจริงบางจำนวนเป็นจำนวนอตรรกยะ

2.8 $2\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

2.9 จำนวนอตรรกยะบวกกับจำนวนอตรรกยะเป็นจำนวนอตรรกยะ

3. จงเขียนเศษส่วนต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปทศนิยม

3.1 $\frac{3}{8}$

3.2 $\frac{2}{5}$

3.3 $\frac{3}{4}$

3.4 $\frac{7}{12}$

3.5 $\frac{2}{11}$

3.6 $\frac{10}{3}$

4. จงเปลี่ยนทศนิยมต่อไปนี้ให้เป็นเศษส่วน

4.1 $0.\dot{3}\dot{7}$

4.2 $2.\dot{4}\dot{3}$

4.3 $0.5\dot{3}\dot{7}$

4.4 $0.5\dot{6}1\dot{4}$

4.5 $0.127\dot{3}1\dot{9}$

5. จงเปลี่ยนทศนิยมต่อไปนี้ให้เป็นเศษส่วน

5.1 0.23

5.2 1.27

5.3 8.951

5.4 $0.\dot{2}\dot{1}$

5.5 $0.\dot{1}3\dot{5}$

5.6 $0.27\dot{6}$

เซต 2

(Set)

“เซต” หมายถึง กลุ่ม หมู่ พวก โดยต้องทราบแน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่มหรือไม่อยู่ในกลุ่ม สิ่งที่อยู่ในกลุ่มเรียกว่า สมาชิก (Element) ของเซต ซึ่งแต่ละเซตอาจมีสมาชิกหรือไม่มีสมาชิกก็ได้ โดยทั่วไปจะใช้อักษรตัวพิมพ์ใหญ่ A, B, C, ... แทนชื่อของเซต และแทนสมาชิกของเซตด้วยตัวอักษรตัวเล็กหรือด้วยตัวเลขหรือตัวอักษรอื่นก็ได้

ตัวอย่างของเซต เช่น

1. เซตของสีธงชาติไทย
2. เซตของจำนวนเต็มบวกน้อยกว่า 10
3. เซตของสระในคำว่า “กรรม”

จะเห็นว่า เซต 1 มีสมาชิก 3 ตัว คือ แดง, ขาว, น้ำเงิน

เซต 2 มีสมาชิก 9 ตัว คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

เซต 3 ไม่มีสมาชิกเลย

การเขียนเซต

การเขียนเซตเพื่ออธิบายว่าเซตประกอบด้วยสมาชิกใดบ้าง มีวิธีการเขียน 2 วิธี คือ

1. เขียนแบบแจกแจงสมาชิก ให้เขียนสมาชิกทุกตัวของเซตอยู่ในเครื่องหมายวงเล็บปีกกาและใช้เครื่องหมายจุลภาค (,) คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว เช่น

A เป็นเซตของสิ่งชาติไทย

$$A = \{\text{แดง, ขาว, น้ำเงิน}\}$$

B เป็นเซตของสระในภาษาอังกฤษ

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

C เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกจาก 1 ถึง 5

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกนี้ ถ้าเซตมีจำนวนสมาชิกเป็นจำนวนมาก ไม่สะดวกในการที่จะเขียนสมาชิกให้ครบทุกค่าได้ สามารถใช้เครื่องหมาย “...” ละไว้ และหากมีสมาชิกซ้ำกันให้ถือว่ามีสมาชิกที่เขียนซ้ำนั้นเพียงตัวเดียว เช่น

D เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

$$D = \{1, 2, 3, \dots\}$$

E เป็นเซตของพยัญชนะในภาษาไทย

$$E = \{\text{ก, ข, ช, ...อ, ฮ}\}$$

F เป็นเซตของจำนวนเต็ม

$$F = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

G เป็นเซตของเลข 1, 2, 3, 1, 2, 4, 1, 2

$$G = \{1, 2, 3, 4, \}$$

2. เขียนแบบกำหนดเงื่อนไข ใช้ตัวแปรเขียนแทนสมาชิก แล้วบรรยายคุณสมบัติของสมาชิกในรูปตัวแปรในวงเล็บปีกกา โดยใช้เครื่องหมาย “|” ซึ่งอ่านว่า “ซึ่ง” หรือ “โดยที่” คั่นระหว่างตัวแปรและเงื่อนไข เช่น

A เป็นเซตของจำนวนเต็ม

$$A = \{x|x \text{ แทนจำนวนเต็ม}\}$$

B เป็นเซตของจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 50

$$B = \{x|x \text{ เป็นจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 50}\}$$

C เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็นรากของสมการ $x^2 - 9 = 0$

$$C = \{x|x^2 - 9 = 0\}$$

การเป็นสมาชิกของเซต

ใช้สัญลักษณ์ “ $\in$ ” (Epsilon) แทนการเป็นสมาชิกของเซต และใช้สัญลักษณ์ “ $\notin$ ” แทนการไม่เป็นสมาชิกของเซต เช่น

กำหนดให้ $A = \{x, y\}$ และ $B = \{1, 2\}$

x เป็นสมาชิกของเซต A	เขียนแทนด้วย $x \in A$
y เป็นสมาชิกของเซต A	เขียนแทนด้วย $y \in A$
1 เป็นสมาชิกของเซต B	เขียนแทนด้วย $1 \in B$
2 เป็นสมาชิกของเซต B	เขียนแทนด้วย $2 \in B$
x ไม่เป็นสมาชิกของเซต B	เขียนแทนด้วย $x \notin B$
y ไม่เป็นสมาชิกของเซต B	เขียนแทนด้วย $y \notin B$
1 ไม่เป็นสมาชิกของเซต A	เขียนแทนด้วย $1 \notin A$
2 ไม่เป็นสมาชิกของเซต A	เขียนแทนด้วย $2 \notin A$

ชนิดของเซต

โดยพิจารณาเซตจากสมาชิกของเซตเป็นหลัก แบ่งออกได้ดังนี้

1. เซตจำกัด (Finite set) คือเซตที่สามารถบอกได้ว่ามีสมาชิกทั้งหมดเป็นจำนวนเท่าใด จำนวนสมาชิกของเซตจำกัดอาจเป็นศูนย์ หรือเป็นจำนวนเต็มบวก เช่น

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

$$C = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$$

$$D = \{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็มซึ่งอยู่ระหว่าง } 0 \text{ กับ } 1\}$$

จะเห็นว่า A มีสมาชิก 3 ตัว

B มีสมาชิก 5 ตัว

C มีสมาชิก 50 ตัว

D ไม่มีสมาชิกเลยหรือกล่าวว่าสมาชิกของ C มีศูนย์ตัว

2. เซตอนันต์ (Infinite set) คือเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด หรือเซตที่บอกไม่ได้ว่ามีสมาชิกเป็นจำนวนเท่าใด เช่น

$$A = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$B = \{x | x > -5\}$$

$$C = \{x | x \text{ เป็นจำนวนจริงระหว่าง } 0 \text{ กับ } 1\}$$

$$D = \{x | x \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$$

3. เซตว่าง (Empty set, Null set) คือเซตที่ไม่มีจำนวนสมาชิก ใช้สัญลักษณ์ $\{\}$ หรือ $\emptyset$

แทนเซตว่าง เช่น

$$A = \{x | x \text{ เป็นจำนวนนับระหว่าง } 1 \text{ กับ } 2\}$$

$$B = \{x | x \text{ เป็นทะเลทรายในประเทศไทย}\}$$

$$C = \{x | x + 4 = 0 \text{ และ } x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}\}$$

จะเห็นว่า A, B และ C ไม่มีสมาชิกเลย ดังนั้น $A = \emptyset$, $B = \emptyset$ และ $C = \emptyset$ และพบว่าเซตว่างเป็นเซตจำกัดด้วย

ความสัมพันธ์ระหว่างเซต

1. เซตย่อย (Subset) ให้ A และ B เป็นสองเซตใด ๆ A เป็นเซตย่อยของ B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B

A เป็นเซตย่อยของ B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \subset B$

A ไม่เป็นเซตย่อยของ B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \not\subset B$

เช่น กำหนดให้ $A = \{1, 3, 5\}$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, \}$$

จะเห็นว่า $1 \in A$ และ $1 \in B$

$$3 \in A \text{ และ } 3 \in B$$

$$5 \in A \text{ และ } 5 \in B$$

สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B ด้วย แสดงว่า $A \subset B$ นั้นเอง

กำหนดให้ $C = \{2, 4, 6, 8\}$

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

จะเห็นว่า $2 \in C$ และ $2 \in D$

$$4 \in C \text{ และ } 4 \in D$$

$$6 \in C \text{ และ } 6 \in D$$

$$8 \in C \text{ แต่ } 8 \notin D$$

สมาชิกบางตัวของ C ไม่เป็นสมาชิกของ D คือ 8 แสดงว่า $C \not\subset D$

คุณสมบัติบางประการของเซตย่อย

1. เซตใด ๆ จะเป็นเซตย่อยของเซตตัวเองเสมอ

$$A \subset A \text{ เมื่อ } A \text{ เป็นเซตใด ๆ}$$

2. เซตว่างจะเป็นเซตย่อยของเซตทุกเซต

$$\emptyset \subset A \text{ เมื่อ } A \text{ เป็นเซตใด ๆ}$$

3. เซต A เป็นเซตย่อยแท้ (Proper subset) ของ B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B และมีสมาชิกบางตัวของ B ไม่เป็นสมาชิกของ A นั่นคือ $A \neq B$ แต่ $A \subset B$

$$\text{กำหนดให้ } A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

$$C = \{1, 3, 2, 5, 4\}$$

จะเห็นว่า $B \subset A$, $B \subset C$ และเป็นเซตย่อยแท้

$$A \subset C, C \subset A \text{ แต่ไม่เป็นเซตย่อยแท้เพราะ } A = C$$

4. ถ้าเซต A มีสมาชิกทั้งหมด n จำนวน เซต A จะมีเซตย่อยทั้งหมด 2^n เซตย่อย เช่น

$$\text{กำหนดให้ } A = \{1, 2, 3\}$$

$$A \text{ มีสมาชิกทั้งหมด } 3 \text{ จำนวน}$$

ดังนั้น A มีเซตย่อยทั้งหมด $2^3 = 8$ เซตย่อย คือ

$$\emptyset \quad \{1, 2\}$$

$$\{1\} \quad \{1, 3\}$$

$$\{2\} \quad \{2, 3\}$$

$$\{3\} \quad \{1, 2, 3\} \text{ หรือ } A$$

2. เซตเทียบเท่ากัน (Equivalent set) ให้ A และ B เป็นเซตจำกัดใด ๆ A เทียบเท่ากับ B ก็ต่อเมื่อจำนวนสมาชิกของ A เท่ากับจำนวนสมาชิกของ B

$$\text{กำหนดให้ } A = \{ก, ข, ค, ง\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{จะเห็นว่าจำนวนสมาชิกของ } A = B = 4$$

แสดงว่าเซต A เทียบเท่ากับเซต B เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $A \sim B$

3. เซตเท่ากัน (Equal set) ให้ A และ B เป็นสองเซตใด ๆ เซต A เท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อเซตทั้งสองมีสมาชิกเหมือนกันและเท่ากัน หรือ $A \subset B$ และ $B \subset A$

A เท่ากับ B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A = B$

A ไม่เท่ากับ B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \neq B$

กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{1, 0, 2, 3\}$

$C = \{1, 0, 3, 4\}$

แสดงว่า $A = B, A \neq C, B \neq C$

4. เซตอิสระ (Disjoint set) ให้ A และ B เป็นสองเซตใด ๆ A และ B เป็นเซตอิสระต่อกันก็ต่อเมื่อสมาชิกของ A ทุกจำนวนไม่เป็นสมาชิกของ B เช่น

กำหนดให้ $A = \{1, 3, 5, 7\}$

$B = \{2, 4, 6, 8\}$

แสดงว่า A และ B เป็นเซตอิสระต่อกัน

กำหนดให้ $C = \{1, 2, 3\}$

$D = \{3, 4, 5\}$

แสดงว่า A และ B เป็นเซตไม่อิสระต่อกันเพราะสมาชิกของ C คือ 3 เป็นสมาชิกของ D ด้วย

5. เซตกำลัง (Power set) ให้ A เป็นเซตใด ๆ เซตกำลังของ A คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นเซตย่อยของ A ทั้งหมด เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(A)$

กำหนดให้ $A = \emptyset$

$P(A) = \{\emptyset\}$

กำหนดให้ $A = \{1\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$

กำหนดให้ $A = \{4, 5\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{4, 5\}\}$

คุณสมบัติบางประการของเซตกำลัง

1. ถ้า $A = \emptyset$ แล้ว $P(A) = P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
2. ถ้า $P(A) \neq \emptyset$ แล้ว เซตกำลังของ A ใด ๆ จะไม่เท่ากับเซตว่าง
3. ถ้า $A \in P(A)$ และ $\emptyset \in P(A)$ เสมอ
4. ถ้า A เป็นเซตจำกัดและนับจำนวนสมาชิกได้ n จำนวน $P(A)$ จะมีสมาชิกทั้งหมด

2^n จำนวน

6. เอกภพสัมพัทธ์ (Universal set) คือเซตทุกเซตที่ประกอบไปด้วยสมาชิกทั้งหมดในขอบเขตที่กำลังศึกษา ใช้สัญลักษณ์ “U” เช่น

ถ้าต้องการศึกษาเกี่ยวกับจำนวนนับ 1 ถึง 100

$$U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$$

ถ้าต้องการศึกษาเกี่ยวกับจำนวนเต็ม

$$U = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \dots\}$$

กำหนดให้

$$U = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A = \{x \mid x^2 = 4\}$$

จากเงื่อนไขของ A $x^2 = 4$

$$x = -2 \text{ และ } 2$$

$$\therefore A = \{2\} \text{ เพราะว่า } -2 \in U$$

กำหนดให้

$$U = \{-1, 0, 1\}$$

$$B = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$$

จากเงื่อนไขของ B $x^2 + x - 6 = 0$

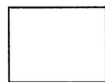
$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -3, 2$$

$$\therefore B = \emptyset \text{ เพราะว่า } -3, 2 \in U$$

แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ (Venn-Euler diagrams)

แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ หรือแผนภาพเวนน์ เป็นการเขียนภาพของเซตต่าง ๆ เพื่อแสดงความสัมพันธ์ของเซตให้ชัดเจนยิ่งขึ้น โดยทั่วไปกำหนดสัญลักษณ์ดังนี้



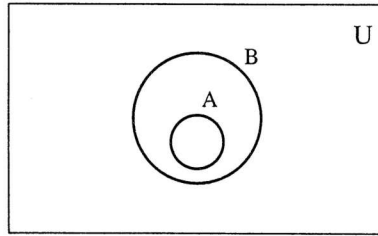
รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าใช้แทนเอกภพสัมพัทธ์



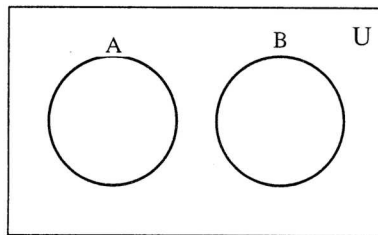
รูปวงรีหรือวงกลมใช้แทนเซตใด ๆ

เช่น ถ้า A, B, C เป็นเซตของ U

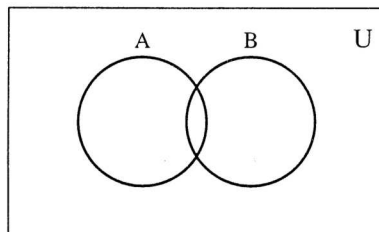
1. แผนภาพเวนน์แทน $A \subset B$ และ $A \neq B$



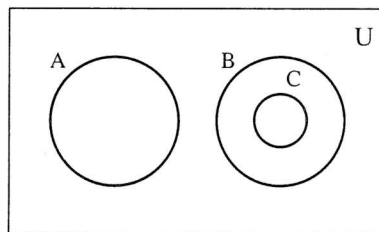
2. แผนภาพเวนน์แทน A และ B เป็นเซตต่างสมาชิกกัน



3. แผนภาพเวนน์แทน A และ B เป็นเซตไม่ต่างสมาชิกกัน (เป็นเซตร่วมกัน)



4. แผนภาพเวนน์แทน $A = B$ และเป็นอิสระต่อกัน $C \subset B$, A และ C ไม่มีสมาชิกร่วมกัน

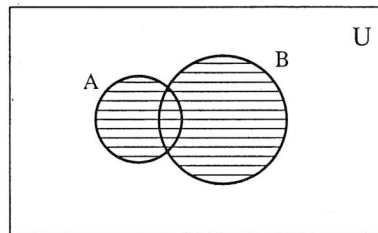


การดำเนินการของเซต (Operation of sets)

การดำเนินการของเซต คือ การนำเซตที่กำหนดให้มาหาความสัมพันธ์ตามวิธีของเซต มีอยู่ 4 ลักษณะคือ ยูเนียน อินเตอร์เซกชัน ผลต่าง และคอมพลีเมนต์

1. ยูเนียน (Union) กำหนดให้ A, B เป็นเซตใด ๆ ยูเนียนของ A และ B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ทั้งในเซต A หรือเซต B เขียนแทนด้วย $A \cup B$ เขียนในรูปเซตได้ดังนี้

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$$

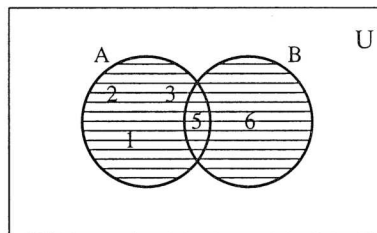


ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 5\}$

$$B = \{5, 6\}$$

วิธีทำ

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$



หรือกำหนด

$$A = \{x | x = 1, 2, 3, 5\}$$

$$B = \{y | y = 5, 6\}$$

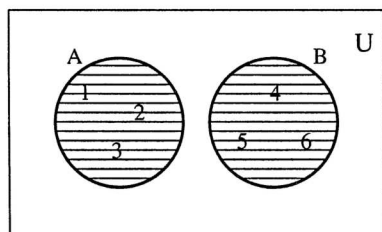
$$A \cup B = \{z | z = 1, 2, 3, 5, 6\}$$

ตัวอย่างที่ 2.2 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

วิธีทำ

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

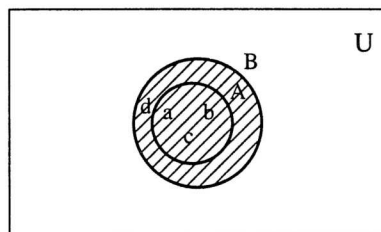


ตัวอย่างที่ 2.3 กำหนดให้ $A = \{a, b, c\}$

$$B = \{a, b, c, d\}$$

วิธีทำ

$$A \cup B = \{a, b, c, d\}$$



ตัวอย่างที่ 2.4 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$$B = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$$

วิธีทำ

จะได้ว่า $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$

ตัวอย่างที่ 2.5 กำหนดให้ $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

$$B = \{1, 4, 9, 16\}$$

$$C = \{2, 10\}$$

วิธีทำ

จะได้ว่า

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 16\}$$

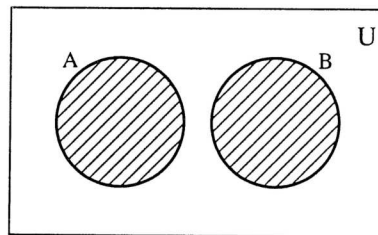
$$A \cup C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$B \cup C = \{1, 2, 4, 9, 10, 16\}$$

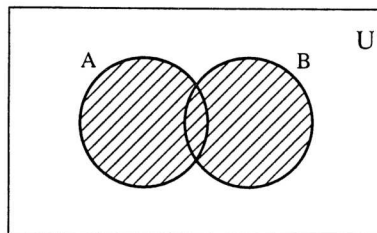
$$A \cup A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} = A$$

การเขียนแผนภาพเวนนแทนการยูเนียนเซต โดยทั่วไปถ้าไม่ทราบสมาชิกของเซตสามารถเขียนแผนภาพโดยใช้พื้นที่แรเงาแทนสมาชิกของการยูเนียนเซต คือ

1. $A \cup B$ และ A, B เป็นเซตต่างสมาชิกกัน



2. $A \cup B$ และ A, B เป็นเซตร่วมกัน



3. $A \cup B$ และ $A \subset B$, $A \cup B$ และ $B \subset A$

