

สมการเชิงอนุพันธ์
เล่มที่ 1

Differential Equations Part I

ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ณัฐชนาถ ไตรภาพ
ยุวรีย์ พันธกล้า
สุรัชย์ สมบัติบริบูรณ์

สมการเชิงอนุพันธ์

เล่มที่ 1

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

รองศาสตราจารย์ณัฐนาถ ไตรภาพ

รองศาสตราจารย์ยุวรีย์ พันธุ์กล้า

ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุรัชย์ สมบัติบริบูรณ์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) เล่มที่ 1

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 1

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : กรกฎาคม พ.ศ. 2563

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

ISBN (e-book) : 978-616-568-947-2

พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

หนังสือ สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) เล่มที่ 1 เป็นหนังสือใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา สมการเชิงอนุพันธ์ เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วย

สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น การหาผลเฉลยของสมการแยกตัวแปรได้ สมการเอกพันธ์ สมการแม่นตรง สมการเชิงเส้น การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์ การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว สมการช่วย การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวจากสมการช่วย การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว การหาผลเฉลยโดยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ การหาผลเฉลยโดยใช้ตัวดำเนินการผกผัน การหา $\frac{1}{P(D)}f(x)$ เมื่อ $f(x)$ มีรูปแบบเฉพาะ การประยุกต์ของตัวดำเนินการ $\frac{1}{D}$ ช่วยในการอินทิเกรต การหาผลเฉลยเฉพาะด้วยวิธีการแปรตัวพารามิเตอร์

หนังสือ สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) เล่มที่ 1 ใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา สมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งสอนให้กับนิสิตคณะวิทยาศาสตร์ และ คณะวิศวกรรมศาสตร์ นอกจากนั้นหนังสือเล่มนี้สามารถใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาสมการเชิงอนุพันธ์ในสถาบันการศึกษาอื่น ๆ ได้

คณะผู้เรียบเรียงหวังว่าหนังสือสมการเชิงอนุพันธ์ เล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนสำหรับนิสิตนักศึกษาและอาจารย์ผู้สอนในทุกสถาบันที่ต้องศึกษาวิชาสมการเชิงอนุพันธ์

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

รองศาสตราจารย์ณัฐนาถ ไตรภพ

รองศาสตราจารย์ยุวรีย์ พันธุ์กล้า

ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุรัชย์ สมบัติบริบูรณ์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สิงหาคม 2563

สารบัญ		หน้า
บทที่ 1	สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น	1 – 54
	1.1 สมการแยกตัวแปรได้	3
	1.2 สมการเอกพันธ์	7
	1.3 สมการแม่นตรง	13
	1.4 สมการเชิงเส้น	27
	1.5 การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์	40
บทที่ 2	สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n	55 – 112
	2.1 ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์	56
	2.2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์	76
	2.3 ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์	99
	2.4 ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธ์	106
บทที่ 3	สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว	113 – 162
	3.1 สมการช่วย (auxiliary equation)	113
	3.2 การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวจากสมการช่วย	120
	3.3 รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงและต่างกันทุกตัว	126
	3.4 รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงและมีภาวะรากซ้ำกัน	136
	3.5 รากของสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อน	147
	3.6 รากของสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อนและมีภาวะรากซ้ำ	154
บทที่ 4	สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว	163 – 358
	4.1 การหาผลเฉลยโดยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์	164
	4.2 การหาผลเฉลยโดยใช้ตัวดำเนินการผกผัน	186
	4.3 การหา $\frac{1}{P(D)} f(x)$ เมื่อ $f(x)$ มีรูปแบบเฉพาะ	208
	4.4 การประยุกต์ของตัวดำเนินการ $\frac{1}{D}$ ช่วยในการอินทิเกรต	295
	4.5 การหาผลเฉลยเฉพาะด้วยวิธีการแปรตัวพารามิเตอร์	314

บทที่ 1

สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น ซึ่งเราจะเรียกสมการในลักษณะนี้ว่า **สมการเชิงอนุพันธ์**

มีปัญหามากมายในทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ ซึ่งการแก้ปัญหาเหล่านี้จะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ การศึกษาเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ได้ก่อให้เกิดสาขาใหญ่สาขาหนึ่งทางคณิตศาสตร์ ในบทนี้เราจะกล่าวถึงสมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาเกี่ยวกับเรื่องนี้ต่อไป

ตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์ ได้แก่ $\frac{dy}{dx} = 2xy$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$(y')^2 = 5x \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} - x \frac{dy}{dx} + x^2y = e^{3x}$$

เราสามารถจำแนกชนิดของสมการเชิงอนุพันธ์ได้จากอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ และกำลังของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการนั้นดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1 อันดับ ของสมการเชิงอนุพันธ์คือ อันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการนั้น

บทนิยาม 1.2 ถ้าเราสามารถจัดรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยทำให้อนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ในสมการนั้นมีกำลังเป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว เราจะเรียกกำลังสูงสุดของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการว่า **ดีกรี** ของสมการเชิงอนุพันธ์ ตัวอย่างเช่น

1. $\frac{dy}{dx} = x^2$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ดีกรีหนึ่ง

2. $x \frac{d^2y}{dx^2} + 2y(\frac{dy}{dx})^3 = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง ดีกรีหนึ่ง

3. $xy(\frac{d^2y}{dx^2})^4 - x^2(\frac{d^3y}{dx^3})^2 + 5 = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สาม ดีกรีสอง

4. $xy^2 = y' + \sqrt[3]{1 + (y')^2}$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $xy^2 - y' = \sqrt[3]{1 + (y')^2}$

ยกกำลังสามทั้งสองข้าง จะได้ $(xy^2 - y')^3 = 1 + (y')^2$

$$x^3 y^6 - 3x^2 y^4 y' + 3xy^2 (y')^2 - (y')^3 = 1 + (y')^2$$

เพราะฉะนั้น $xy^2 = y' + \sqrt[3]{1+(y')^2}$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ดีกรีสาม

$$5. \sqrt{1+y+(y')^2} = \sqrt[3]{x(y'')^2} \text{ ยกกำลังหกทั้งสองข้าง จะได้ } (1+y+(y')^2)^3 = (x(y'')^2)^2$$

$$(1+y+(y')^2)^3 = x^2(y'')^4$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{1+y+(y')^2} = \sqrt[3]{x(y'')^2}$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง ดีกรีสี่

ในการศึกษาเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ เราไม่ได้สนใจเพียงแค่อันดับและดีกรีของสมการเท่านั้นแต่เราต้องการทราบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในสมการนั้นด้วย โดยที่ความสัมพันธ์นั้นต้องไม่มีอนุพันธ์มาเกี่ยวข้อง กล่าวคือ เราต้องการหาฟังก์ชันซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันของอนุพันธ์ และสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้นั่นเอง

$$\text{เช่น ถ้าเราพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ } x \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \dots (1)$$

เราอาจหาฟังก์ชันดังกล่าวได้ ดังนี้

เขียนสมการที่กำหนดให้ ในรูปของค่าเชิงอนุพันธ์ได้เป็น $x dy + y dx = 0$

$$\text{จะได้ } d(xy) = 0$$

เพราะฉะนั้น $xy = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

จะเห็นว่าสมการ $xy = c$ เป็นสมการซึ่งนิยาม y เป็นฟังก์ชันของ x โดยปริยาย และสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ และเป็นฟังก์ชันที่เราต้องการนั่นเอง

บทนิยาม 1.3 เราจะเรียกฟังก์ชันซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันของอนุพันธ์และสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ว่า

ผลเฉลยของสมการ

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อาจอยู่ในรูปของฟังก์ชันที่นิยามโดยชัดแจ้ง หรือฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย เราเรียกผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีค่าคงตัวไม่เจาะจงว่า **ผลเฉลยทั่วไป** และเรียกผลเฉลยซึ่งกำหนดค่าคงตัวนั้นให้มีค่าที่แน่นอนว่า **ผลเฉลยเฉพาะ** เช่น จากสมการ (1) เราจะได้ $xy = c$ เป็นผลเฉลยทั่วไป และ $xy = 1$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ

$$\text{เมื่อกำหนด } y(2) = \frac{1}{2}$$

ต่อไปเราจะกล่าวถึงวิธีหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งในบทนี้เราจะศึกษาเฉพาะสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ดีกรีหนึ่งบางแบบเท่านั้น

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ดีกรีหนึ่ง คือ สมการที่เขียนได้ในรูป $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

ซึ่งอาจเขียนในรูปของค่าเชิงอนุพันธ์ ได้เป็น $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$

เราจะพิจารณาวิธีหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ดีกรีหนึ่ง 4 แบบด้วยกัน คือ สมการแยกตัวแปรได้ สมการเอกพันธ์ สมการแม่นตรง และสมการเชิงเส้น

1.1 สมการแยกตัวแปรได้

สมการแยกตัวแปรได้ คือ สมการที่สามารถเขียนได้ในรูป $F(x) dx + G(y) dy = 0$

นั่นคือ สามารถเขียน $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ ได้ในรูปของผลคูณของฟังก์ชันตัวแปรเดียวคือ

$$M(x, y) = M_1(x)M_2(y)$$

$$\text{และ } N(x, y) = N_1(x)N_2(y)$$

การหาผลเฉลยของสมการแยกตัวแปรได้ สามารถทำได้โดยการอินทิเกรตทีละพจน์ กล่าวคือ

$$\text{จาก } F(x) dx + G(y) dy = 0$$

$$\text{เราจะได้ } \int F(x) dx + \int G(y) dy = c \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

ตัวอย่าง 1.1.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$1. 5(1 - y^2) dx - 2xy dy = 0$$

$$2. \frac{dy}{dx} = \frac{3y - xy}{x^2 + 1}$$

$$3. 2xe^{x^2+y} dx + 2^y dy = 0$$

วิธีทำ

$$1. \text{ จาก } 5(1 - y^2) dx - 2xy dy = 0$$

$$\text{จัดรูปใหม่ได้เป็น } \frac{5}{x} dx - \frac{2y}{1-y^2} dy = 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \int \frac{5}{x} dx - \int \frac{2y}{1-y^2} dy = c_1$$

$$5 \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{1-y^2} d(1-y^2) = c_1$$

$$\text{ดังนั้น } 5 \ln |x| + \ln |1-y^2| = c_2$$

$$\ln |x^5 (1-y^2)| = c_2$$

$$\text{เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ } x^5 (1-y^2) = c$$

$$2. \text{ จาก } \frac{dy}{dx} = \frac{3y - xy}{x^2 + 1}$$

$$\text{จัดรูปใหม่ได้เป็น } (x^2 + 1) dy = (3y - xy) dx$$

$$(x^2 + 1) dy - y(3 - x) dx = 0$$

$$\frac{1}{y} dy - \frac{3-x}{x^2+1} dx = 0$$

เพราะฉะนั้น
$$\int \frac{1}{y} dy - \int \frac{3-x}{x^2+1} dx = c_1$$

จะได้
$$\int \frac{1}{y} dy - \int \frac{3}{x^2+1} dx + \int \frac{x}{x^2+1} dx = c_1$$

$$\int \frac{1}{y} dy - 3 \int \frac{1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} d(x^2+1) = c_1$$

เพราะฉะนั้น
$$\ln |y| - 3 \arctan x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) = c_2$$

$$2 \ln |y| - 6 \arctan x + \ln(x^2+1) = c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ
$$\ln(y^2(x^2+1)) - 6 \arctan x = c$$

3. จาก $2xe^{x^2+y} dx + 2^y dy = 0$

จัดรูปใหม่ได้เป็น
$$2xe^{x^2} dx + \frac{2^y}{e^y} dy = 0$$

เพราะฉะนั้น
$$\int 2xe^{x^2} dx + \int \frac{2^y}{e^y} dy = c_1$$

$$\int e^{x^2} d(x^2) + \int \left(\frac{2}{e}\right)^y dy = c_1$$

ดังนั้น
$$e^{x^2} + \frac{\left(\frac{2}{e}\right)^y}{\ln\left(\frac{2}{e}\right)} = c_2$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ
$$\ln\left(\frac{2}{e}\right)e^{x^2} + \left(\frac{2}{e}\right)^y = c$$



ตัวอย่าง 1.1.2 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

1. $(\ln y)^2 y' = x^2 y$ เมื่อ $y(2) = 1$

2. $4 \sin^2 x dy + \sec^2 y dx = 0$ เมื่อ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

วิธีทำ 1. จาก $(\ln y)^2 y' = x^2 y$

จัดรูปใหม่ได้เป็น
$$(\ln y)^2 dy = x^2 y dx$$

$$\frac{(\ln y)^2}{y} dy - x^2 dx = 0$$

เพราะฉะนั้น
$$\int \frac{(\ln y)^2}{y} dy - \int x^2 dx = c_1$$

จะได้
$$\int (\ln y)^2 d(\ln y) - \int x^2 dx = c_1$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{(\ln y)^3}{3} - \frac{x^3}{3} = c_2$$

$$(\ln y)^3 - x^3 = c$$

... (1)

จาก $y(2) = 1$ จะได้ $y = 1$ เมื่อ $x = 2$

โดยการแทนค่าใน (1) จะได้ $(\ln 1)^3 - 2^3 = c$ เพราะฉะนั้น $c = -8$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะคือ $(\ln y)^3 - x^3 + 8 = 0$

2. จาก $\sin^2 x \, dy + \sec^2 y \, dx = 0$

จัดรูปใหม่ได้เป็น $\frac{4}{\sec^2 y} \, dy + \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = 0$

$$4 \cos^2 y \, dy + \operatorname{cosec}^2 x \, dx = 0$$

เพราะฉะนั้น $\int 4 \cos^2 y \, dy + \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = c_1$

จะได้ $2 \int (1 + \cos 2y) \, dy + \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = c_1$

เพราะฉะนั้น $2y + \sin 2y - \cot x = c$

... (2)

จาก $y(\frac{\pi}{2}) = \pi$ จะได้ $y = \pi$ เมื่อ $x = \frac{\pi}{2}$

โดยการแทนค่าใน (2) จะได้ $2\pi + \sin 2\pi - \cot \frac{\pi}{2} = c$ เพราะฉะนั้น $c = 2\pi$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะคือ $2y + \sin 2y - \cot x = 2\pi$



แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$1.1 \quad \frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$$

$$1.2 \quad (y^4 + y) y' = \sin x - \cos x$$

$$1.3 \quad x^3 \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - x^2 y^2} \quad \text{เมื่อ } x > 0$$

$$1.4 \quad 3(2y^2 + 1) dx = y(x - 1) dy$$

$$1.5 \quad \frac{1+e^x}{1-e^{-y}} dy + e^{x+y} dx = 0$$

$$1.6 \quad (x^2 y + x^2) dx = (x y^2 - y^2) dy$$

$$1.7 \quad (x^2 + 1) y' + y^2 + 1 = 0$$

$$1.8 \quad (x^2 y^2 \sec x \tan x + x y^2 \sec x) dx + x y^3 dy = 0$$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$2.1 \quad \cos^2 x \frac{dy}{dx} - \sin^2 y = 0 \quad \text{เมื่อ } y(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$2.2 \quad \sqrt{x^2 + 1} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \text{เมื่อ } y(\sqrt{3}) = 2$$

$$2.3 \quad \frac{1}{9} dy = \frac{e^x}{e y^2 + y^2 e^2} dx \quad \text{เมื่อ } y(1) = 3$$

$$2.4 \quad x \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - x^3} \quad \text{เมื่อ } y(2) = -2$$

1.2 สมการเอกพันธ์

บทนิยาม 1.2.1 เราเรียกฟังก์ชัน $f(x, y)$ ว่า **ฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี n**

ถ้ามีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $f(kx, ky) = k^n f(x, y)$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก k

ตัวอย่างเช่น

$$1. f(x, y) = x^3 + 4xy^2$$

สำหรับจำนวนจริงบวก k ใด ๆ จะได้

$$f(kx, ky) = (kx)^3 + 4(kx)(ky)^2 = k^3 x^3 + 4k^3 xy^2 = k^3(x^3 + 4xy^2) = k^3 f(x, y)$$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี 3

$$2. g(x, y) = \frac{x^2 - 3y^2}{xy}$$

สำหรับจำนวนจริงบวก k ใด ๆ จะได้

$$g(kx, ky) = \frac{(kx)^2 - 3(ky)^2}{(kx)(ky)} = \frac{k^2(x^2 - 3y^2)}{k^2(xy)} = \frac{x^2 - 3y^2}{xy} = k^0 \left(\frac{x^2 - 3y^2}{xy} \right) = k^0 g(x, y)$$

เพราะฉะนั้น g เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี 0

$$3. h(x, y) = \frac{1}{y} \cos \frac{y}{x}$$

$$\text{สำหรับจำนวนจริงบวก } k \text{ ใด ๆ จะได้ } h(kx, ky) = \frac{1}{ky} \cos \frac{ky}{kx} = k^{-1} \frac{1}{y} \cos \frac{y}{x} = k^{-1} h(x, y)$$

เพราะฉะนั้น h เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี - 1

บทนิยาม 1.2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ จะเป็น **สมการเอกพันธ์**

ถ้า $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ที่มีดีกรีเท่ากัน

การหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ สามารถทำได้โดยการแปลงสมการเอกพันธ์ให้เป็นสมการแยกตัวแปรได้ โดยการเปลี่ยนตัวแปรที่เหมาะสมดังนี้

$$\text{ถ้า } M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad \dots (1)$$

เป็นสมการเอกพันธ์ ซึ่ง $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี n เท่ากัน

จะได้ $M(kx, ky) = k^n M(x, y)$ และ $N(kx, ky) = k^n N(x, y)$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก k

ถ้า $x > 0$

$$\text{เราให้ } k = \frac{1}{x} \text{ จะได้ } M(x, y) = x^n M(1, \frac{y}{x}) \text{ และ } N(x, y) = x^n N(1, \frac{y}{x})$$

$$\text{จาก (1) โดยการแทนค่า จะได้ } x^n M(1, \frac{y}{x}) dx + x^n N(1, \frac{y}{x}) dy = 0$$

$$M(1, \frac{y}{x}) dx + N(1, \frac{y}{x}) dy = 0 \quad \dots (2)$$

$$\text{ให้ } v = \frac{y}{x} \text{ ดังนั้น } y = vx \text{ และ } dy = v dx + x dv$$

$$\text{จาก (2) จะได้ } M(1, v) dx + N(1, v)(v dx + x dv) = 0$$

$$[M(1, v) + vN(1, v)] dx + xN(1, v) dv = 0$$

ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้ในพจน์ของตัวแปร x และ v

ถ้า $x < 0$

$$\text{เราให้ } k = -\frac{1}{x} \text{ จะได้ } M(x, y) = (-x)^n M(-1, -\frac{y}{x})$$

$$\text{และ } N(x, y) = (-x)^n N(-1, -\frac{y}{x})$$

$$\text{จาก (1) โดยการแทนค่า จะได้ } (-x)^n M(-1, -\frac{y}{x}) dx + (-x)^n N(-1, -\frac{y}{x}) dy = 0$$

$$M(-1, -\frac{y}{x}) dx + N(-1, -\frac{y}{x}) dy = 0 \quad \dots (3)$$

$$\text{ให้ } v = \frac{y}{x}$$

$$\text{ดังนั้น } y = vx \text{ และ } dy = v dx + x dv$$

$$\text{จาก (3) จะได้ } M(-1, -v) dx + N(-1, -v)(v dx + x dv) = 0$$

$$[M(-1, -v) + vN(-1, -v)] dx + xN(-1, -v) dv = 0$$

ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้ในพจน์ของตัวแปร x และ v

ดังนั้น เราสามารถแปลงสมการเอกพันธ์ให้เป็นสมการแยกตัวแปรได้

โดยการเปลี่ยนตัวแปรจาก x, y เป็น x, v โดยให้ $y = vx$ นั่นเอง

ตัวอย่าง 1.2.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$1. (y^2 - x^2) dx + xy dy = 0$$

$$2. x \frac{dy}{dx} - y = x \cos \frac{y}{x}$$

วิธีทำ

$$1. \text{ ในที่นี้ } M(x, y) = y^2 - x^2 \text{ และ } N(x, y) = xy$$

$$\text{สำหรับจำนวนจริงบวก } k \text{ ใด ๆ จะได้ } M(kx, ky) = (ky)^2 - (kx)^2 = k^2 M(x, y)$$

$$\text{และ } N(kx, ky) = (kx)(ky) = k^2 N(x, y)$$

เพราะฉะนั้น $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี 2 เท่ากัน

แสดงว่า สมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเอกพันธ์

$$\text{ให้ } y = vx \text{ จะได้ } dy = v dx + x dv$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } (v^2 x^2 - x^2) dx + x(vx)(v dx + x dv) = 0$$

$$(v^2 x^2 - x^2) dx + v^2 x^2 dx + v x^3 dv = 0$$

$$\text{จะได้ } x^2 (2v^2 - 1) dx + v x^3 dv = 0$$

$$\frac{1}{x} dx + \frac{v}{2v^2 - 1} dv = 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{2v^2 - 1} d(2v^2 - 1) = c_1$$

$$\ln |x| + \frac{1}{4} \ln |2v^2 - 1| = c_2$$

$$\ln |x^4 (2v^2 - 1)| = c_3$$

$$x^4 (2v^2 - 1) = c$$

$$x^4 \left(\frac{2y^2}{x^2} - 1 \right) = c$$

$$\text{ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ } x^2 (2y^2 - x^2) = c$$

$$2. \text{ จาก } x \frac{dy}{dx} - y = x \cos \frac{y}{x}$$

$$\text{จัดรูปใหม่ได้เป็น } x dy - (y + x \cos \frac{y}{x}) dx = 0$$

$$\text{ในที่นี้ } M(x, y) = -y - x \cos \frac{y}{x} \text{ และ } N(x, y) = x$$

สำหรับจำนวนจริงบวก k ใด ๆ จะได้

$$M(kx, ky) = -ky - kx \cos \frac{ky}{kx} = k M(x, y) \text{ และ } N(kx, ky) = kx = k N(x, y)$$

เพราะฉะนั้น $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี 1 เท่ากัน

แสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเอกพันธ์

ให้ $y = vx$ จะได้ $dy = v dx + x dv$

เพราะฉะนั้น $x(v dx + x dv) - (vx + x \cos \frac{vX}{x}) dx = 0$

$$vx dx + x^2 dv - (vx + x \cos v) dx = 0$$

จะได้ $\sec v dv - \frac{1}{x} dx = 0$

เพราะฉะนั้น $\int \sec v dv - \int \frac{1}{x} dx = c_1$

$$\ln |\sec v + \tan v| - \ln |x| = c_2$$

$$\ln \left| \frac{\sec v + \tan v}{x} \right| = c_2$$

$$\frac{\sec v + \tan v}{x} = c$$

$$\frac{\sec \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}}{x} = c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $\sec \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x} = cx$



ตัวอย่าง 1.2.2 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $xyy' = x^2 e^{-\frac{y}{x}} + y^2$ เมื่อ $y(1) = 0$

วิธีทำ จัดรูปใหม่ได้เป็น $(x^2 e^{-\frac{y}{x}} + y^2) dx - xy dy = 0$

ในที่นี้ $M(x, y) = x^2 e^{-\frac{y}{x}} + y^2$ และ $N(x, y) = -xy$

จะได้ $M(kx, ky) = k^2 M(x, y)$ และ $N(kx, ky) = k^2 N(x, y)$

เพราะฉะนั้น $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี 2 เท่ากัน

แสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเอกพันธ์

ให้ $y = vx$ จะได้ $dy = v dx + x dv$

เพราะฉะนั้น $(x^2 e^{-v} + v^2 x^2) dx - v x^2 (v dx + x dv) = 0$

$$x^2 e^{-v} dx + v^2 x^2 dx - v^2 x^2 dx - v x^3 dv = 0$$

$$x^2 e^{-v} dx - v x^3 dv = 0$$

$$e^{-v} dx - vx dv = 0$$

$$\frac{1}{x} dx - v e^v dv = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$\int \frac{1}{x} dx - \int v e^v dv = c_1$$

$$\int \frac{1}{x} dx - \int v d e^v = c_1$$

$$\ln |x| - v e^v + \int e^v dv = c_2$$

$$\ln |x| - v e^v + e^v = c$$

ดังนั้น

$$\ln |x| + e^{\frac{y}{x}} \left(1 - \frac{y}{x}\right) = c$$

จาก $y(1) = 0$ จะได้ $y = 0$ เมื่อ $x = 1$

โดยการแทนค่า จะได้ $\ln 1 + e^0 (1 - 0) = c$ เพราะฉะนั้น $c = 1$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะคือ $\ln |x| + e^{\frac{y}{x}} \left(1 - \frac{y}{x}\right) = 1$



แบบฝึกหัด 1.2

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$1.1 \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

$$1.2 x dy - (x \tan \frac{y}{x} + y) dx = 0$$

$$1.3 (x^2 y + y^2) dx + x^3 dy = 0$$

$$1.4 2xy dx + (x^2 + y^2) dy = 0$$

$$1.5 xy' = x + y$$

$$1.6 x(1 + \ln \frac{y}{x}) y' = y$$

$$1.7 2x dy - 2y dx = \sqrt{x^2 + 4y^2} dx \text{ เมื่อ } x > 0$$

$$1.8 2ye^{\frac{x}{y}} dx = (2xe^{\frac{x}{y}} - y) dy$$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$2.1 \frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x} \text{ เมื่อ } y(-1) = 0$$

$$2.2 x^2 y dx - (x^3 - y^3) dy = 0 \text{ เมื่อ } y(1) = 1$$

$$2.3 14xyy' = 6x^2 - 7y^2 \text{ เมื่อ } y(-2) = 1$$

$$2.4 x^2 y' = 3x^2 - 2xy + y^2 \text{ เมื่อ } y(1) = \frac{3}{2}$$

1.3 สมการแม่นตรง

บทนิยาม 1.3.1 สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ จะเป็น สมการแม่นตรง

ก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชัน $F(x, y)$ ที่ทำให้ $dF(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy$

สำหรับสมการแม่นตรง $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$

เราอาจเขียนสมการได้เป็น $dF(x, y) = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $F(x, y) = c$

ตัวอย่างเช่น สมการ $x dy + y dx = 0$ จะได้ $d(xy) = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $xy = c$

ต่อไปเราจะหาเงื่อนไขที่จะทำให้เราทราบว่า สมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้เป็นสมการแม่นตรงหรือไม่

ถ้าสมการ $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง จะได้มีฟังก์ชัน $F(x, y)$ ที่ทำให้

$$dF(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy \quad \dots (1)$$

$$\text{แต่ } dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dy$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \text{ และ } \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y) \quad \dots (2)$$

$$\text{และจะได้ } \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) \text{ และ } \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$$

$$\text{ถ้า } M, N, \frac{\partial M}{\partial y} \text{ และ } \frac{\partial N}{\partial x} \text{ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เราจะได้ } \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \quad \dots (3)$$

จะเห็นว่าเงื่อนไข (3) เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการเป็นสมการแม่นตรง

ดังนั้น ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ใดไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขนี้ เราย่อมสรุปได้ว่า สมการนั้นไม่เป็นสมการแม่นตรง

ตัวอย่างเช่น สมการ $(3x^2y + y^2) dx + (x^3 - 2xy) dy = 0$

ในที่นี้ $M(x, y) = 3x^2y + y^2$ และ $N(x, y) = x^3 - 2xy$

$$\text{จะได้ } \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 3x^2 + 2y \text{ และ } \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 2y$$

$$\text{ซึ่งจะเห็นว่า } \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) \neq \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$$

ดังนั้น สมการ $(3x^2y + y^2) dx + (x^3 - 2xy) dy = 0$ ไม่เป็นสมการแม่นตรง

นอกจากนี้ ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ใดสอดคล้องเงื่อนไข (3) เราจะสามารถหา $F(x, y)$ ที่สอดคล้อง (1) ได้ ดังนั้น เงื่อนไข

(3) ก็เป็นเงื่อนไขที่พอเพียงสำหรับการเป็นสมการแม่นตรงด้วย กล่าวคือ ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ใดสอดคล้องกับเงื่อนไข

(3) เราย่อมสรุปได้ว่า สมการนั้นเป็นสมการแม่นตรง สำหรับการหา $F(x, y)$ อาจทำได้โดยอาศัยเงื่อนไข (2) ดังนี้

จาก $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$

ซึ่งการหาอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ นี้ เราถือว่า y เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $F(x, y) = \int M(x, y) dx + C(y)$

... (4)

และเราสามารถหา $C(y)$ ได้จาก $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$ ซึ่งเมื่อได้ $C(y)$ แล้วนำไปแทนใน (4)

เราก็จะได้ $F(x, y)$ ตามต้องการ

ข้อสังเกต

1. การหา $F(x, y)$ นี้ อาจทำได้โดยเริ่มต้นจาก $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$ ก็ได้

โดยเราจะได้ $F(x, y) = \int N(x, y) dy + C(x)$ และเราสามารถหา $C(x)$ ได้จาก $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$

2. โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับค่าเชิงอนุพันธ์รวมของฟังก์ชัน เราสามารถหา $F(x, y)$

โดยการจัดรูป $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ ให้อยู่ในรูป $dF(x, y)$

ตัวอย่างเช่น สมการ $y dx + x dy = 0$ เราจัดรูปได้เป็น $d(xy) = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $xy = c$

ตัวอย่าง 1.3.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(2xy^3 - ye^{-x}) dx + (3x^2y^2 + e^{-x} - 4) dy = 0$$

วิธีทำ ในที่นี้ $M(x, y) = 2xy^3 - ye^{-x}$

และ $N(x, y) = 3x^2y^2 + e^{-x} - 4$

จะได้ $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 6xy^2 - e^{-x}$

และ $\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 6xy^2 - e^{-x}$

ดังนั้น $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$ แสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการแม่นตรง

จาก $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y) = 2xy^3 - ye^{-x}$

จะได้ $F(x, y) = \int (2xy^3 - ye^{-x}) dx = x^2y^3 + ye^{-x} + C(y)$... (1)

แต่ $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y) = 3x^2y^2 + e^{-x} - 4$

ดังนั้น $3x^2y^2 + e^{-x} + C'(y) = 3x^2y^2 + e^{-x} - 4$

จะได้ $C'(y) = -4$

เพราะฉะนั้น $C(y) = \int -4 dy = -4y + c_1$

แทน $C(y)$ ใน (1) จะได้ $F(x, y) = x^2y^3 + ye^{-x} - 4y + c_1$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $x^2y^3 + ye^{-x} - 4y = c$ □

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 1.3.1 โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับค่าเชิงอนุพันธ์รวมของฟังก์ชัน

สมการที่กำหนดให้ $(2xy^3 - ye^{-x}) dx + (3x^2y^2 + e^{-x} - 4) dy = 0$

จัดรูปใหม่ได้เป็น $(2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy) + (-ye^{-x} dx + e^{-x} dy) - 4 dy = 0$

จะได้ $d(x^2y^3) + d(ye^{-x}) - d(4y) = 0$

เพราะฉะนั้น $d(x^2y^3 + ye^{-x} - 4y) = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $x^2y^3 + ye^{-x} - 4y = c$

ตัวอย่าง 1.3.2 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{x+y^2}{xy^2} dy - \frac{y-4}{x^2} dx = 0$ เมื่อ $y(-2) = 1$

วิธีทำ ในที่นี้ $M(x, y) = -\frac{y-4}{x^2}$ และ $N(x, y) = \frac{x+y^2}{xy^2}$

จะได้ $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{x^2}$ และ $\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{x^2}$

ดังนั้น $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$ แสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการแม่นตรง

จาก $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y) = -\frac{y-4}{x^2}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } F(x, y) &= \int \left(-\frac{y-4}{x^2} \right) dx \\ &= -(y-4) \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= -(y-4) \left(-\frac{1}{x} \right) + C(y) \\ &= \frac{y}{x} - \frac{4}{x} + C(y) \end{aligned} \quad \dots (1)$$

แต่ $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y) = \frac{x+y^2}{xy^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}$ และ $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} + C'(y)$

ดังนั้น $\frac{1}{x} + C'(y) = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}$ ซึ่งจะได้ $C'(y) = \frac{1}{y^2}$

เพราะฉะนั้น $C(y) = \int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y} + c_1$

แทน $C(y)$ ใน (1) จะได้ $F(x, y) = \frac{y}{x} - \frac{4}{x} - \frac{1}{y} + c_1$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $\frac{y}{x} - \frac{4}{x} - \frac{1}{y} = c$

จาก $y(-2) = 1$ จะได้ $y = 1$ เมื่อ $x = -2$

โดยการแทนค่า จะได้ $\frac{1}{-2} - \frac{4}{-2} - \frac{1}{1} = c$ เพราะฉะนั้น $c = \frac{1}{2}$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะคือ $\frac{y}{x} - \frac{4}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

□

หมายเหตุ

จากตัวอย่าง 1.3.2 โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับค่าเชิงอนุพันธ์รวมของฟังก์ชันสมการที่กำหนดให้จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{1}{y^2} dy + \frac{1}{x} dy - \frac{y}{x^2} dx + \frac{4}{x^2} dx = 0$$

$$\frac{1}{y^2} dy + \left(-\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy \right) + \frac{4}{x^2} dx = 0$$

จะได้ $d\left(-\frac{1}{y}\right) + d\left(\frac{y}{x}\right) + d\left(-\frac{4}{x}\right) = 0$

เพราะฉะนั้น $d\left(-\frac{1}{y} + \frac{y}{x} - \frac{4}{x}\right) = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $\frac{y}{x} - \frac{4}{x} - \frac{1}{y} = c$

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$1.1 \quad 2x - y^3 - 3xy^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$1.2 \quad (2x - 5y) y' = 6x - 2y$$

$$1.3 \quad x(x \cos(x^2 y) - 2y) y' + 2xy \cos(x^2 y) = y^2$$

$$1.4 \quad (\sin(xy) + xy \cos(xy)) \frac{dy}{dx} + y^2 \cos(xy) = 0$$

$$1.5 \quad \left(\frac{3xy+1}{y}\right) dx + \left(\frac{2y-x}{y^2}\right) dy = 0$$

$$1.6 \quad \pi y + (\pi x + \arcsin y) \frac{dy}{dx} = \sin x$$

$$1.7 \quad \frac{\ln y}{x} dx + \left(\frac{\ln x}{y} + \sin y\right) dy = 0$$

$$1.8 \quad (2xy e^{x^2 y} + \sin y) dx + (x^2 e^{x^2 y} + x \cos y - y) dy = 0$$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$2.1 \quad (3x^2 y + 2xy) dx + (x^3 + x^2 + 2y) dy = 0 \text{ เมื่อ } y(1) = 2$$

$$2.2 \quad (e^y + y e^x) dx + (e^x + x e^y) dy = 0 \text{ เมื่อ } y(1) = 0$$

$$2.3 \quad (\sin^2 x - 2y \cos x) y' + 2y \sin x \cos x + y^2 \sin x = 0 \text{ เมื่อ } y(0) = -2$$

$$2.4 \quad \ln(1 + y^2) = \left(\frac{1}{y} - \frac{2xy}{1+y^2}\right) \frac{dy}{dx} \text{ เมื่อ } y(2) = \sqrt{e-1}$$

ในกรณีที่สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ ไม่เป็นสมการแม่นตรง

แต่มีฟังก์ชัน $\mu(x, y)$ ที่ทำให้ $\mu(x, y)(M(x, y) dx + N(x, y) dy) = 0$ เป็นสมการแม่นตรง

เราจะเรียกฟังก์ชัน $\mu(x, y)$ นี้ว่า **ตัวประกอบอินทิเกรต** ของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

เช่น จากสมการ $2y dx + x dy = 0$

จะเห็นว่าสมการนี้ไม่เป็นสมการแม่นตรง แต่ถ้าเราคูณสมการด้วย x จะได้ $2xy dx + x^2 dy = 0$

เป็นสมการแม่นตรง ซึ่งในที่นี้ตัวประกอบอินทิเกรตของสมการที่กำหนดให้ก็คือ $\mu(x, y) = x$

การหาตัวประกอบอินทิเกรต $\mu(x, y)$ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

... (*)

สามารถกระทำได้นี้

เนื่องจาก $\mu(x, y)M(x, y) dx + \mu(x, y)N(x, y) dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง

$$\text{ดังนั้น } \frac{\partial}{\partial y}(\mu(x, y)M(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, y)N(x, y))$$

เพื่อความสะดวกจะขอละตัวแปร x และ y ไว้ โดยจะเขียนในรูป $\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$

$$\text{จะได้ } \mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \left(N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \right)$$

... (1)

ซึ่งการหา μ ที่สอดคล้อง (1) อาจพิจารณาเป็น 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงตัวเดียว

$$\begin{aligned}\text{จาก (1) จะได้ } \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{1}{\mu} N \frac{d\mu}{dx} \\ &= N \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} \right) \\ &= N \frac{d}{dx} \ln |\mu|\end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{d}{dx} \ln |\mu| = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

เนื่องจาก μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงตัวเดียว

ดังนั้น $\frac{d}{dx} \ln |\mu|$ ย่อมเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงตัวเดียวด้วย

แสดงว่า $\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$ ก็เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงตัวเดียวเช่นกัน

$$\text{ให้ } \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = f(x)$$

$$\text{จะได้ } \frac{d}{dx} \ln |\mu| = f(x)$$

$$\text{ดังนั้น } \ln |\mu| = \int f(x) dx + c_1$$

$$|\mu| = C_1 e^{\int f(x) dx} \quad \text{เมื่อ } C_1 = e^{c_1}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \mu = \pm C_1 e^{\int f(x) dx}$$

เพื่อความสะดวกเราเลือกใช้ $\pm C_1 = 1$ ซึ่งจะได้ $\mu = e^{\int f(x) dx}$ เป็นตัวประกอบอินทิเกรตตัวหนึ่งของ (*)

กรณีที่ 2 μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงตัวเดียว

$$\begin{aligned}\text{จาก (1) จะได้ } \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} &= -\frac{1}{\mu} M \frac{d\mu}{dy} \\ &= -M \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy} \right) \\ &= -M \frac{d}{dy} \ln |\mu|\end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{d}{dy} \ln |\mu| = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

เนื่องจาก μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงตัวเดียว

ดังนั้น $\frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ ย่อมเป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงตัวเดียวด้วย

$$\text{ให้ } \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = g(y)$$

$$\text{จะได้ } \frac{d}{dy} \ln |\mu| = g(y)$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \ln |\mu| &= \int g(y) dy + c_2 \\ |\mu| &= C_2 e^{\int g(y) dy} \quad \text{เมื่อ } C_2 = e^{c_2}\end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \mu = \pm C_2 e^{\int g(y) dy}$$

เพื่อความสะดวกเราเลือกใช้ $\pm C_2 = 1$ ซึ่งจะได้ $\mu = e^{\int g(y) dy}$ เป็นตัวประกอบอินทิเกรตตัวหนึ่งของ (*)

จากทั้งสองกรณี สรุปได้ว่า

$$1. \text{ ถ้า } \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = f(x) \text{ แล้วจะได้ } \mu = e^{\int f(x) dx}$$

$$2. \text{ ถ้า } \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = g(y) \text{ แล้วจะได้ } \mu = e^{\int g(y) dy}$$

หลังจากที่เราหาตัวประกอบอินทิเกรตที่หาได้ไปคูณสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ ก็จะทำให้สมการนั้นเป็นสมการแม่นตรง ซึ่งเราสามารถหาผลเฉลยของสมการได้

ตัวอย่าง 1.3.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$1. (3x + 2y^2) dx + 2xy dy = 0$$

$$2. (x^2 + y^2 + 1) dx + x(x - 2y) dy = 0$$

$$3. (1 + x \sin y) \frac{dy}{dx} + \cos y = 0$$

วิธีทำ

1. ในที่นี้ $M(x, y) = 3x + 2y^2$ และ $N(x, y) = 2xy$

$$\text{จะได้ } \frac{\partial M}{\partial y} = 4y \text{ และ } \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

$$\text{จะเห็นว่า } \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{1}{2xy} (4y - 2y) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น ตัวประกอบอินทิเกรต คือ } \mu &= e^{\int \frac{1}{x} dx} \\ &= e^{\ln|x|} \\ &= |x| \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\mu = x$ เป็นตัวประกอบอินทิเกรตตัวหนึ่งของสมการที่กำหนดให้

$$\text{คูณสมการที่กำหนดให้ด้วย } \mu \text{ จะได้ } x(3x + 2y^2) dx + 2x^2y dy = 0$$

$$3x^2 dx + (2xy^2 dx + 2x^2y dy) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } d(x^3) + d(x^2y^2) = 0$$

$$\text{นั่นคือ } d(x^3 + x^2y^2) = 0$$

$$\text{ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ } x^3 + x^2y^2 = c$$

2. ในที่นี้ $M(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ และ $N(x, y) = x^2 - 2xy$

จะได้ $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$ และ $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x - 2y$

$$\begin{aligned}\text{จะเห็นว่า} \quad \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) &= \frac{1}{x^2 - 2xy} (2y - 2x + 2y) \\ &= \frac{-2(x - 2y)}{x(x - 2y)} \\ &= -\frac{2}{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น ตัวประกอบอินทิเกรต คือ } \mu &= e^{\int \frac{1}{x} dx} \\ &= e^{-2 \ln|x|} \\ &= e^{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

$$\text{คูณสมการที่กำหนดให้ด้วย } \mu \text{ จะได้ } \frac{1}{x^2} (x^2 + y^2 + 1) dx + \frac{1}{x} (x - 2y) dy = 0$$

$$dx + \frac{y^2}{x^2} dx + \frac{1}{x^2} dx + dy - \frac{2y}{x} dy = 0$$

$$dx + dy + \frac{1}{x^2} dx + \left(\frac{y^2}{x^2} dx - \frac{2y}{x} dy \right) = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$dx + dy - d\left(\frac{1}{x}\right) - d\left(\frac{y^2}{x}\right) = 0$$

นั่นคือ

$$d\left(x + y - \frac{1}{x} - \frac{y^2}{x}\right) = 0$$

$$\text{ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ } x + y - \frac{1}{x} - \frac{y^2}{x} = c$$

3. จาก $(1 + x \sin y) \frac{dy}{dx} + \cos y = 0$

จัดรูปใหม่ได้เป็น $\cos y \, dx + (1 + x \sin y) \, dy = 0$

... (1)

ในที่นี้ $M(x, y) = \cos y$ และ $N(x, y) = 1 + x \sin y$

จะได้ $\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin y$ และ $\frac{\partial N}{\partial x} = \sin y$

จะเห็นว่า $\frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = \frac{1}{\cos y} (\sin y + \sin y) = 2 \tan y$

ดังนั้น ตัวประกอบอินทิเกรตคือ $\mu = e^{\int 2 \tan y \, dy}$

$$= e^{2 \ln |\sec y|}$$

$$= \sec^2 y$$

คูณ (1) ด้วย μ จะได้ $\sec^2 y \cos y \, dx + \sec^2 y (1 + x \sin y) \, dy = 0$

$$\sec y \, dx + \sec^2 y \, dy + x \sin y \sec^2 y \, dy = 0$$

$$(\sec y \, dx + x \sec y \tan y \, dy) + \sec^2 y \, dy = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$d(x \sec y) + d(\tan y) = 0$$

นั่นคือ

$$d(x \sec y + \tan y) = 0$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $x \sec y + \tan y = c$



ตัวอย่าง 1.3.4 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$2y(x^2 - y + x) dx + (x^2 - 2y) dy = 0 \text{ เมื่อ } y(0) = -1$$

วิธีทำ ในที่นี้ $M(x, y) = 2x^2y - 2y^2 + 2xy$ และ $N(x, y) = x^2 - 2y$

$$\text{จะได้ } \frac{\partial M}{\partial y} = 2x^2 - 4y + 2x \text{ และ } \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

$$\begin{aligned} \text{จะเห็นว่า } \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) &= \frac{1}{x^2 - 2y} (2x^2 - 4y + 2x - 2x) \\ &= \frac{2(x^2 - 2y)}{x^2 - 2y} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น ตัวประกอบอินทิเกรตคือ } \mu = e^{\int 2 dx} = e^{2x}$$

$$\text{คูณสมการที่กำหนดให้ด้วย } \mu \text{ จะได้ } 2ye^{2x}(x^2 - y + x) dx + e^{2x}(x^2 - 2y) dy = 0$$

$$2x^2ye^{2x} dx - 2y^2e^{2x} dx + 2xye^{2x} dx + x^2e^{2x} dy - 2ye^{2x} dy = 0$$

$$(2x^2ye^{2x} dx + 2xye^{2x} dx + x^2e^{2x} dy) - (2y^2e^{2x} dx + 2ye^{2x} dy) = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$d(x^2ye^{2x}) - d(y^2e^{2x}) = 0$$

นั่นคือ

$$d(x^2ye^{2x} - y^2e^{2x}) = 0$$

$$\text{ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ } x^2ye^{2x} - y^2e^{2x} = c$$

$$\text{จาก } y(0) = -1 \text{ จะได้ } y = -1 \text{ เมื่อ } x = 0$$

$$\text{โดยการแทนค่า จะได้ } 0 - 1 = c \text{ เพราะฉะนั้น } c = -1$$

$$\text{ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะคือ } x^2ye^{2x} - y^2e^{2x} + 1 = 0$$

$$ye^{2x}(x^2 - y) + 1 = 0$$



แบบฝึกหัด 1.3.1

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$1.1 \ 2x^2y \, dx + (x^3 + 2xy) \, dy = 0$$

$$1.2 \ (4xy - 3x - 3x^2) \, dy - (2xy - y^2 + y) \, dx = 0$$

$$1.3 \ (xy + y - 1) \, dx + x \, dy = 0$$

$$1.4 \ y(x + y^3) \, dx + x(y^3 - x) \, dy = 0$$

$$1.5 \ (xy - x^2) y' - xy + 1 = 0$$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$2.1 \ y(1 + x^2y) \, dx - x \, dy = 0 \text{ เมื่อ } y(1) = -1$$

$$2.2 \ (x^2 + y) \, dx + (x^2 \cos y - x) \, dy = 0 \text{ เมื่อ } y(2) = 0$$

$$2.3 \ 1 + (x \tan y - 2 \sec y) y' = 0 \text{ เมื่อ } y(-1) = \pi$$

1.4 สมการเชิงเส้น

สมการเชิงเส้น คือ สมการที่เขียนได้ในรูป $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$... (*)

ซึ่งเราสามารถหาผลเฉลยได้ดังนี้

จาก (*) จัดรูปใหม่ได้เป็น $(P(x)y - Q(x)) dx + dy = 0$

ในที่นี้ $M(x, y) = P(x)y - Q(x)$ และ $N(x, y) = 1$

จะได้ $\frac{\partial M}{\partial y} = P(x)$ และ $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$

จะเห็นว่า $\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = P(x)$

ดังนั้น ตัวประกอบอินทิเกรตคือ $\mu = e^{\int P(x) dx}$

คูณ (*) ด้วย μ จะได้ $\mu \frac{dy}{dx} + \mu P(x)y = \mu Q(x)$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu Q(x)$

เพราะฉะนั้น $\mu y = \int \mu Q(x) dx + c$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = \frac{1}{\mu}(\int \mu Q(x) dx + c)$

ตัวอย่าง 1.4.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$1. \frac{dy}{dx} - 2xy = x$$

$$2. (y \cot x - \sec^2 x) dx + dy = 0$$

วิธีทำ 1. ในที่นี้ $P(x) = -2x$ และ $Q(x) = x$

จะได้ตัวประกอบอินทิเกรตคือ $\mu = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ } y &= \frac{1}{\mu} \left(\int \mu Q(x) dx + c_1 \right) \\ &= \frac{1}{e^{-x^2}} \left(\int e^{-x^2} x dx + c_1 \right) \\ &= e^{x^2} \left(-\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2) + c_1 \right) \\ &= e^{x^2} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} + c \right) \\ &= c e^{x^2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$2. \text{ จาก } (y \cot x - \sec^2 x) dx + dy = 0$$

$$\text{จัดรูปใหม่ได้เป็น } \frac{dy}{dx} + y \cot x = \sec^2 x \quad \dots (1)$$

ในที่นี้ $P(x) = \cot x$ และ $Q(x) = \sec^2 x$

จะได้ตัวประกอบอินทิเกรตคือ $\mu = e^{\int \cot x dx} = e^{\ln |\sin x|} = |\sin x|$

เพราะฉะนั้น $\mu = \sin x$ เป็นตัวประกอบอินทิเกรตตัวหนึ่งของ (1)

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ } y &= \frac{1}{\mu} \left(\int \mu Q(x) dx + c_1 \right) \\ &= \frac{1}{\sin x} \left(\int \sin x \sec^2 x dx + c_1 \right) \\ &= \frac{1}{\sin x} \left(-\int \cos^{-2} x d(\cos x) + c_1 \right) \\ &= \frac{1}{\sin x} \left(-\frac{\cos^{-1} x}{-1} + c \right) \\ &= \frac{1}{\sin x} \left(\frac{1}{\cos x} + c \right) \\ &= \frac{1}{\sin x} (\sec x + c) \end{aligned}$$

นั่นคือ $y \sin x = \sec x + c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ



ตัวอย่าง 1.4.2 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(xy + x + x^3) dx - (1 + x^2) dy = 0 \text{ เมื่อ } y(\sqrt{3}) = 1$$

วิธีทำ จัดรูปใหม่ได้เป็น $\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1+x^2} y = x$... (1)

ในที่นี้ $P(x) = -\frac{x}{1+x^2}$ และ $Q(x) = x$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ตัวประกอบอินทิเกรตคือ } \mu &= e^{\int \frac{-x}{1+x^2} dx} \\ &= e^{-\frac{1}{2} \ln(1+x^2)} \\ &= (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ } y &= \frac{1}{\mu} \left(\int \mu Q(x) dx + c_1 \right) \\ &= (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \left(\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} x dx + c_1 \right) \\ &= (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1+x^2) + c_1 \right) \\ &= (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} (2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}) + c \right) \\ &= 1+x^2 + c \sqrt{1+x^2} \end{aligned}$$

จาก $y(\sqrt{3}) = 1$ จะได้ $y = 1$ เมื่อ $x = \sqrt{3}$

โดยการแทนค่า จะได้ $1 = 1 + 3 + c \sqrt{4}$ เพราะฉะนั้น $c = -\frac{3}{2}$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะคือ $y = 1 + x^2 - \frac{3}{2} \sqrt{1+x^2}$

□

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ดีกรีนึง บางสมการที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้น อาจทำให้เป็นสมการเชิงเส้นได้โดยอาศัยการเปลี่ยนตัวแปรที่เหมาะสม ในที่นี้จะขอกล่าวถึงสมการแบบหนึ่งที่มีลักษณะดังกล่าวนี้ซึ่งเราเรียกว่า **สมการแบร์นูลลี**

สมการแบร์นูลลี เป็นสมการที่เขียนได้ในรูป $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ เมื่อ n เป็นค่าคงตัว

ในกรณีที่ $n = 0$ สมการแบร์นูลลีจะอยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น

และในกรณีที่ $n = 1$ สมการแบร์นูลลีจะอยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y$

จัดรูปได้เป็น $\frac{dy}{dx} + (P(x) - Q(x))y = 0$ ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นเช่นกัน

ต่อไปเราจะพิจารณากรณีที่ $n \neq 0$ และ $n \neq 1$

จาก $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$

คูณตลอดด้วย y^{-n} จะได้ $y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$... (1)

สมมติให้ $z = y^{1-n}$

จะได้ $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$... (2)

แทน (2) ใน (1) จะได้ $\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$

ดังนั้น $\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$ ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นในพจน์ของตัวแปร x และ z

เมื่อสมการแบร์นูลลีสามารถแปลงให้เป็นสมการเชิงเส้นได้ เราก็สามารถหาผลเฉลยของสมการแบร์นูลลีได้โดยอาศัย

วิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น ซึ่งได้กล่าวมาแล้วข้างต้น

ตัวอย่าง 1.4.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3$

วิธีทำ จัดรูปใหม่ได้เป็น $y^{-3} \frac{dy}{dx} + \frac{x}{1+x^2} y^{-2} = \frac{x^3}{1+x^2}$... (1)

ให้ $z = y^{-2}$ จะได้ $\frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$... (2)

แทน (2) ใน (1) จะได้ $-\frac{1}{2} \frac{dz}{dx} + \frac{x}{1+x^2} z = \frac{x^3}{1+x^2}$
 $\frac{dz}{dx} - \frac{2x}{1+x^2} z = -\frac{2x^3}{1+x^2}$... (3)

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น โดยมี $P(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$ และ $Q(x) = -\frac{2x^3}{1+x^2}$

จะได้ ตัวประกอบอินทิเกรตคือ $\mu = e^{\int -\frac{2x}{1+x^2} dx}$
 $= e^{-\int \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2)}$
 $= e^{-\ln(1+x^2)}$
 $= \frac{1}{1+x^2}$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของ (3) คือ $z = \frac{1}{\mu} \left(\int \mu Q(x) dx + c_1 \right)$
 $= (1+x^2) \left(\int \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \left(-\frac{2x^3}{1+x^2} \right) dx + c_1 \right)$
 $= (1+x^2) \left(-\int \frac{2x^3}{(1+x^2)^2} dx + c_1 \right)$
 $= (1+x^2) \left(-2 \int \left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{(1+x^2)^2} \right) dx + c_1 \right)$
 $= (1+x^2) \left(-\ln(1+x^2) - \frac{1}{1+x^2} + c \right)$
 $= -(1+x^2) \ln(1+x^2) - 1 + c(1+x^2)$

แต่ $z = y^{-2}$ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $\frac{1}{y^2} + (1+x^2) \ln(1+x^2) + 1 = c(1+x^2)$

□