

คณิตศาสตร์ปรัญญ เล่มที่ 30
เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์

โลกอสมการ 2

Analytic Inequalities

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 30

เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์

โลกอสมการ 2

Analytic Inequalities

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : โลกอสมการ 2 (Analytic Inequalities)

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 1

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : มิถุนายน พ.ศ. 2560

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

ISBN (e-book) : 978-616-440-564-6

พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

บทที่ 1	เทคนิคการพิสูจน์อสมการ	1 – 46
บทที่ 2	อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต และ ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก A.M. – G.M. – H.M. Inequality	47 – 72
บทที่ 3	อสมการโคชี-ชวาร์ซ อสมการโฮลเดอร์ อสมการมินคอฟสกี อสมการเชบีเชฟ อสมการแบร์นูลลี	73 – 118
บทที่ 4	อสมการวิเคราะห์	119 – 164
บทที่ 5	ฟังก์ชัน J – convex และ J – concave	165 – 182
บทที่ 6	ฟังก์ชันนูน – ฟังก์ชันเว้า Convex function – Concave function	183 – 202
บทที่ 7	การแก้ปัญหามหาสมการโดยใช้อินทิกรัล	203 – 222
บทที่ 8	การแก้ปัญหามหาสมการจากง่ายไปยาก	223 – 246
บทที่ 9	การแก้ปัญหามหาสมการโดยใช้อนุพันธ์	247 – 270
บทที่ 10	อสมการค่าเฉลี่ยยกกำลัง	271 – 288
แบบฝึกหัดระคนเสริมประสบการณ์การแก้อสมการ	ชุดที่ 1.	289 – 314
	ชุดที่ 2.	315 – 334
	ชุดที่ 3.	335 – 362
	ชุดที่ 4.	363 – 392
	ชุดที่ 5.	393 – 412
	ชุดที่ 6.	413 – 438
	ชุดที่ 7.	439 – 462

คำนำ

หนังสือ คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 30 เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์ โลกอสการ 2 (Analytic Inequalities) เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วย เทคนิคการพิสูจน์อสการ การพิสูจน์แบบเดินหน้าแล้วถอยหลัง กลับ การจัดรูปพีชคณิต การจัดรูปกำลังสองสมบูรณ์ การเปรียบเทียบค่าผลหารหรือผลต่าง การพิสูจน์อสการแบบย้อนกลับ การพิสูจน์อสการในรูปแบบอสการเอกพันธ์ การแก้ปัญหอสการจากง่ายไปยาก การพิสูจน์อสการโดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และบทประยุกต์ช่วยในการพิสูจน์อสการ ภายในเล่มประกอบด้วยบทนิยาม โจทย์อสการ และทฤษฎีบทของอสการที่สำคัญเช่น

- อสการ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต – ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต – ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก (A.M. – G.M. – H.M.)
- อสการ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต – ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต ถ่วงน้ำหนัก อสการค่าเฉลี่ยยกกำลัง
- อสการแบร์นูลลี อสการเชบีเชฟ อสการโคชี – ชวาร์ซ อสการโฮลเดอร์ อสการสามเหลี่ยม
- อสการมินคอฟสกี อสการเจนเสน อสการยัง อสการไวแยร์สตราสส์

ในหนังสือเล่มนี้ผู้เขียนได้เพิ่มเติมแนวคิดและเนื้อหาเกี่ยวกับการแก้ปัญหอสการโดยใช้ความรู้ การวิเคราะห์เชิงจริง (Real Analysis) และ อสการวิเคราะห์ (Analytic Inequalities) เช่น ลิมิตของลำดับและฟังก์ชัน ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ฟังก์ชันลักษณะพิเศษเช่น ฟังก์ชัน J – convex ฟังก์ชัน J – concave ฟังก์ชันนูน (convex function) ฟังก์ชันเว้า (concave function) การแก้ปัญหอสการโดยใช้อินทิกรัล การแก้ปัญหอสการโดยใช้อนุพันธ์

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 30 โลกอสการ 2 และเล่มก่อนหน้า คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 29 โลกอสการ ซึ่งมีโจทย์อสการจำนวนมากจะช่วยให้ นักเรียน ครู อาจารย์ และ ผู้ที่มีความจำเป็นจะต้องเป็นวิทยากรอบรมโครงการโอลิมปิกคณิตศาสตร์ทุกท่าน ได้มีแหล่งข้อมูลของโจทย์เกี่ยวกับอสการซึ่งผู้เขียนได้จัดเนื้อหาและจัดลำดับของการแก้ปัญหจากง่ายไปยากเพื่อเหมาะสมกับระดับความสามารถของผู้เรียน เช่นใช้เหตุผลที่นักเรียนรู้มาก่อนตามหลักสูตร ม.ปลาย เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาแล้วจึงแนะนำวิธีทำแบบใหม่หรือเพิ่มสูตรต่าง ๆ ที่มีใช้กันในระดับคณิตศาสตร์ที่สูงขึ้น

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

บทที่ 1

เทคนิคการพิสูจน์อสมการ

ในการศึกษาเกี่ยวกับอสมการ มีสมบัติเกี่ยวกับจำนวนจริงที่สำคัญในการพิสูจน์อสมการดังต่อไปนี้
เมื่อ a, b, c, d และ k เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $a = b$ หรือ $a < b$ หรือ $a > b$ เป็นจริงเพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น
2. ถ้า $a < \varepsilon$ ทุกจำนวนจริงบวก ε แล้ว $a \leq 0$
3. ถ้า $a > 1$ แล้ว $a^2 > a$, ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $a^2 < a$
4. ถ้า $a \leq b$ และ $c \leq d$ แล้ว $a + c \leq b + d$
5. $a \leq b \leq c$ ก็ต่อเมื่อ $a \leq b$ และ $b \leq c$
6. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a + c < b + d$
7. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $ac < bd$
8. ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$
9. ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
10. ถ้า $a > b$ และ $c > d$ แล้ว $a + c > b + d$
11. ถ้า $a > b$ และ $k > 0$ แล้ว $ka > kb$
12. ถ้า $a > b$ และ $k < 0$ แล้ว $ka < kb$
13. ถ้า $a > b$ และ $ab > 0$ แล้ว $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
14. ถ้า $a \leq b$ และ $b \leq c$ แล้ว $a \leq c$
15. ถ้า $c \geq 0$ และ $0 < a \leq b$ แล้ว $a^c \leq b^c$
16. ถ้า $a \leq b$ แล้ว $a + c \leq b + c$
17. ถ้า $0 \leq a$ และ $0 \leq b$ แล้ว $0 \leq ab$
18. ถ้า $a \leq b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$
19. $a \leq b$ ก็ต่อเมื่อ $a + c \leq b + c$
20. $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $a + c < b + c$
21. $a \leq b$ ก็ต่อเมื่อ $a - b \leq 0$
22. ถ้า $a \leq b$ และ $c \geq 0$ แล้ว $ac \leq bc$
23. ถ้า $a \leq 0$ และ $b \geq 0$ แล้ว $ab \leq 0$
24. ถ้า $a \leq 0$ และ $b \leq 0$ แล้ว $ab \geq 0$
25. $a^2 \geq 0$, ถ้า $a \neq 0$ แล้ว $a^2 > 0$
26. $a < 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{a} < 0$
27. $a > 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{a} > 0$
28. $0 < a < b$ ก็ต่อเมื่อ $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
29. ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ แล้ว $\frac{a}{b} > 0$

การพิสูจน์อสมการมีเทคนิควิธีหลายแบบ จึงขอสรุปเทคนิคที่สำคัญดังต่อไปนี้

1.1 เทคนิควิธี การพิสูจน์แบบย้อนกลับ

การพิสูจน์แบบย้อนกลับ เราจะสมมติว่าอสมการที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง แล้วตรวจสอบย้อนกลับเพื่อดูว่าผลของอสมการที่เป็นจริงนั้นสมมูลกับอสมการใด เพื่อค้นหาเหตุผลสำคัญเพื่อใช้ในการพิสูจน์อสมการที่ต้องการต่อไป

ตัวอย่าง 1.1.1 กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2$

แนวคิด เพราะว่า $(ab^2 - a^2b)^2 \geq 0$ เป็นจริงทุกค่า a, b

$$a^2b^4 - 2a^3b^3 + a^4b^2 \geq 0$$

$$a^2b^4 + a^4b^2 \geq 2a^3b^3$$

$$a^6 + a^2b^4 + a^4b^2 + b^6 \geq a^6 + 2a^3b^3 + b^6$$

เพราะฉะนั้น

$$(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2 \quad \square$$

เบื้องหลังการทดสอบ สมมติ $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2$

$$a^6 + a^2b^4 + a^4b^2 + b^6 \geq a^6 + 2a^3b^3 + b^6$$

$$a^2b^4 + a^4b^2 \geq 2a^3b^3$$

$$a^2b^4 - 2a^3b^3 + a^4b^2 \geq 0$$

$$(ab^2 - a^2b)^2 \geq 0 \quad \dots (1)$$

เพราะฉะนั้นหากเราพิสูจน์ได้ว่า (1) เป็นจริง แล้วทำการพิสูจน์แบบย้อนกลับก็จะได้ผลตามที่ต้องการ

ตัวอย่าง 1.1.2 กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ จงแสดงว่า $\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}$

แนวคิด เพราะว่า $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2 \geq 0$

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}) \geq 0$$

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})[(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}) - \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}] \geq 0$$

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}) - \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) \geq 0$$

$$(a + b) - (\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2}) \geq 0$$

$$3a - 3\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b} - 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2} + 3b \geq 0$$

$$a + 3\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b} + 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2} + b \leq 4a + 4b$$

$$\frac{1}{8}(a + 3\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b} + 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2} + b) \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2}\right)^3 \leq \left(\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}\right)^3$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}} \quad \square$$

เบื้องหลังการทดสอบ

สมมติ

$$\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2}\right)^3 \leq \left(\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}\right)^3$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} (a + 3\sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{b} + 3\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b^2} + b) &\leq \frac{a+b}{2} \\
 a + 3\sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{b} + 3\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b^2} + b &\leq 4a + 4b \\
 3a - 3\sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{b} - 3\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b^2} + 3b &\geq 0 \\
 a - \sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b^2} + b &\geq 0 \\
 a + b - (\sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b^2}) &\geq 0 \\
 (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}) - \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b} (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) &\geq 0 \\
 (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})[(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}) - \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b}] &\geq 0 \\
 (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}) &\geq 0 \\
 (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2 &\geq 0 \quad \dots (1)
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นหากเราพิสูจน์ได้ว่า (1) เป็นจริง แล้วทำการพิสูจน์แบบย้อนกลับก็จะได้ผลตามที่ต้องการ

1.2 เทคนิควิธี โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้

ใช้หลักการและเหตุผลซึ่งกล่าวว่า โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ ตัวแปรต่างที่ปรากฏในพจน์ของอสมการที่ต้องการพิสูจน์มีการเรียงลำดับค่า โดยที่เราจะสมมติว่าเป็นการเรียงลำดับค่าจากมากไปน้อย หรือ น้อยไปมาก ก็ได้ แล้วนำผลของการสมมตินั้นไปช่วยในการพิสูจน์อสมการ

ตัวอย่าง 1.2.1 กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $a^{c+d} + b^{c+d} \geq a^c b^d + a^d b^c$

แนวคิด รูปแบบของอสมการ $a^{c+d} + b^{c+d} \geq a^c b^d + a^d b^c$ จะเห็นว่าการสลับตัวแปร a กับ b และการสลับตัวแปร c กับ d ยังคงได้รูปแบบอสมการเหมือนเดิม การพิสูจน์อสมการนี้เราจึงสามารถใช้เหตุผลว่า โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $0 < a \leq b$ และ $0 < c \leq d$

เพราะว่า $0 < a \leq b$ เพราะฉะนั้น $a^c \leq b^c$ และ $a^d \leq b^d$

เพราะฉะนั้น $a^c - b^c \leq 0$ และ $a^d - b^d \leq 0$

เพราะฉะนั้น $(a^c - b^c)(a^d - b^d) \geq 0$

$$a^c (a^d - b^d) - b^c (a^d - b^d) \geq 0$$

$$a^c (a^d - b^d) \geq b^c (a^d - b^d)$$

$$a^{c+d} - a^c b^d \geq a^d b^c - b^{c+d}$$

$$a^{c+d} + b^{c+d} \geq a^c b^d + a^d b^c$$

□

เบื้องหลังการทดสอบ สมมติ

$$a^{c+d} + b^{c+d} \geq a^c b^d + a^d b^c$$

$$a^{c+d} - a^c b^d \geq a^d b^c - b^{c+d}$$

$$a^c (a^d - b^d) \geq b^c (a^d - b^d)$$

$$a^c (a^d - b^d) - b^c (a^d - b^d) \geq 0$$

$$(a^c - b^c)(a^d - b^d) \geq 0 \quad \dots (1)$$

เพราะฉะนั้นหากเราพิสูจน์ได้ว่า (1) เป็นจริง แล้วทำการพิสูจน์แบบย้อนกลับก็จะได้ผลตามที่ต้องการ

ตัวอย่าง 1.2.2 กำหนดให้ $a, b, c \in [0, 1]$

จงแสดงว่า $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$

แนวคิด จากรูปแบบของอสมการจะเห็นว่าทุกการเรียงสับเปลี่ยน (a, b, c) เป็น $(b, a, c), (b, c, a), \dots$ จะได้ว่ารูปแบบอสมการเหมือนเดิม การพิสูจน์อสมการนี้เราจึงสามารถใช้เหตุผลว่า โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} \leq \frac{a}{a+b+1} + \frac{b}{a+b+1} + \frac{c}{a+b+1} = \frac{a+b+c}{a+b+1} \dots (1)$

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) &= \frac{a+b+1}{a+b+1} - \frac{1-c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \\ &= 1 - \left(\frac{1-c}{a+b+1}\right)(1 - (1+a+b)(1-a)(1-b)) \dots (2) \end{aligned}$$

เพราะว่า $(1+a+b)(1-a)(1-b) \leq (1+a+b+ab)(1-a)(1-b)$
 $= (1+a)(1+b)(1-a)(1-b)$
 $= (1-a^2)(1-b^2)$
 $\leq (1)(1) = 1$ (เพราะว่า $a, b, c \in [0, 1]$)

เพราะฉะนั้น $1 - (1+a+b)(1-a)(1-b) \geq 0$

เพราะว่า $\frac{1-c}{a+b+1} > 0$ เพราะฉะนั้น $\left(\frac{1-c}{a+b+1}\right)(1 - (1+a+b)(1-a)(1-b)) \geq 0$

$$1 - \left(\frac{1-c}{a+b+1}\right)(1 - (1+a+b)(1-a)(1-b)) \leq 1$$

จาก (2) จะได้ $\frac{a+b+c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$

จาก (1) จะได้ $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$ □

1.3 เทคนิควิธี การ normalize ตัวแปรของอสมการ

ในกรณีที่ผลรวมกำลังของตัวแปรแต่ละพจน์ที่คูณกันที่ปรากฏทั้งสองข้างของอสมการเท่ากัน

ตัวอย่างเช่น $a^4 - 2a^2c^2 + c^4 \geq 0$ แต่ละพจน์ของการบวกมีกำลังของตัวแปรรวมกันเท่ากับ 4

$(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2$ แต่ละพจน์ของการบวกมีกำลังของตัวแปรรวมกันเท่ากับ 6

ให้ทำการดัดแปรปัญหา โดยมีขั้นตอนที่สำคัญในการพิสูจน์ดังนี้

ขั้นแรก สมมติ ให้ผลบวกบางพจน์ของอสมการค่าเป็น 1 หรือค่าคงตัวอื่นที่เหมาะสมกับปัญหานั้น

หมายเหตุ ภาษาเฉพาะทางคณิตศาสตร์ของการทำงานแบบนี้เรียกว่า การ normalize ตัวแปรของอสมการ

ขั้นที่ 2. นำผลจากการสมมตินั้นไปช่วยในการพิสูจน์อสมการ

ขั้นที่ 3. นำผลจากกรณีข้างต้นมาช่วยในการพิสูจน์อสมการในกรณีทั่วไป

ตัวอย่าง 1.3.1 กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์

จงแสดงว่า $(ac + bd)^4 \leq 4(a^4 + b^4)(c^4 + d^4)$

แนวคิด เพราะว่าเมื่อเรากระจายพจน์ในอสมการ เป็นการบวกกันของพจน์ย่อย พบว่าแต่ละพจน์ที่บวกกันซึ่งปรากฏในอสมการมีผลรวมของกำลังของตัวแปร $(ac + bd)^4 \leq 4(a^4 + b^4)(c^4 + d^4)$ เท่ากับ 4 ทุกพจน์ เพราะฉะนั้นจึงควรแยกกรณีการพิสูจน์เป็น 2 กรณีคือ

$$1. a^4 + b^4 = 1 \text{ และ } c^4 + d^4 = 1 \text{ หรือ } 2. a^4 + b^4 \neq 1 \text{ หรือ } c^4 + d^4 \neq 1$$

กรณีที่ 1. $a^4 + b^4 = 1$ และ $c^4 + d^4 = 1$

เพราะว่า $(a^2 - c^2)^2 \geq 0$

$$a^4 - 2a^2c^2 + c^4 \geq 0$$

เพราะฉะนั้น $a^4 + c^4 \geq 2a^2c^2$... (1)

ในทำนองเดียวกัน $b^4 + d^4 \geq 2b^2d^2$... (2)

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$$
 ... (3)

$$c^4 + d^4 \geq 2c^2d^2$$
 ... (4)

เพราะว่า $a^4 + b^4 = 1$ และ $c^4 + d^4 = 1$

เพราะฉะนั้น จาก (3) จะได้ $1 \geq 2a^2b^2$... (5)

และจาก (4) จะได้ $1 \geq 2c^2d^2$... (6)

จาก (5) และ (6) จะได้ $(1)(1) \geq (2a^2b^2)(2c^2d^2)$

$$1 \geq 4a^2b^2c^2d^2$$

เพราะฉะนั้น $1 \geq 2abcd$... (7)

จาก (1) และ (2) จะได้ $(a^4 + c^4) + (b^4 + d^4) \geq 2a^2c^2 + 2b^2d^2$

$$(a^4 + b^4) + (c^4 + d^4) \geq 2a^2c^2 + 2b^2d^2$$

เพราะว่า $a^4 + b^4 = 1$ และ $c^4 + d^4 = 1$

เพราะฉะนั้น $1 + 1 \geq 2a^2c^2 + 2b^2d^2$

$$1 \geq a^2c^2 + b^2d^2$$
 ... (8)

จาก (7) และ (8) จะได้ $1 + 1 \geq a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd$

$$2 \geq (ac + bd)^2$$

$$4 \geq (ac + bd)^4$$
 ... (9)

$$4(1)(1) \geq (ac + bd)^4$$

เพราะว่า $a^4 + b^4 = 1$ และ $c^4 + d^4 = 1$

เพราะฉะนั้น $4(a^4 + b^4)(c^4 + d^4) \geq (ac + bd)^4$

กรณีที่ 2. $a^4 + b^4 \neq 1$ หรือ $c^4 + d^4 \neq 1$

ให้ $A = \frac{a}{\sqrt[4]{a^4 + b^4}}$, $B = \frac{b}{\sqrt[4]{a^4 + b^4}}$, $C = \frac{c}{\sqrt[4]{c^4 + d^4}}$ และ $D = \frac{d}{\sqrt[4]{c^4 + d^4}}$

เพราะฉะนั้น $A^4 + B^4 = 1$ และ $C^4 + D^4 = 1$

ในทำนองเดียวกับการพิสูจน์กรณีที่ 1.

จะได้ผลแบบเดียวกับ (9) คือ $4 \geq (AC + BD)^4$

$$4 \geq \left(\frac{a}{\sqrt[4]{a^4 + b^4}} \frac{c}{\sqrt[4]{c^4 + d^4}} + \frac{b}{\sqrt[4]{a^4 + b^4}} \frac{d}{\sqrt[4]{c^4 + d^4}} \right)^4$$

เพราะฉะนั้น $4(a^4 + b^4)(c^4 + d^4) \geq (ac + bd)^4$ □

1.4 เทคนิควิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ใช้ในกรณีสมการที่ต้องการพิสูจน์มีพจน์ของสมการ ข้อความหรือสูตรต่าง ๆ ที่ขึ้นอยู่กับจำนวนนับ n การประยุกต์ใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สามารถเลือกใช้ได้หลายแบบตามความเหมาะสมของรูปแบบสมการที่ต้องการพิสูจน์ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์มีกล่าวไว้หลายแบบเช่น

ทฤษฎีบท 1.4.1 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (แบบที่ 1.)

ให้ $P(n)$ เป็นข้อความในพจน์ของจำนวนนับ n

ถ้า (1) $P(1)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว $P(k + 1)$ เป็นจริง

แล้ว $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ $n \geq 1$

ตัวอย่าง 1.4.1 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$

จงแสดงว่า $(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n) \geq 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

แนวคิด ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

“ $(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n) \geq 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ เมื่อ $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ ”

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $1 - a_1 = 1 - (a_1)$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว $P(k + 1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_k) \geq 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_k)$

เพราะว่า $1 - a_{k+1} \geq 0$

เพราะฉะนั้น $(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_k)(1 - a_{k+1})$

$$\geq (1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_k))(1 - a_{k+1})$$

$$= 1 - a_{k+1} - (a_1 + a_2 + \dots + a_k) + (a_1 + a_2 + \dots + a_k)a_{k+1}$$

$$= 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}) + (a_1 + a_2 + \dots + a_k)a_{k+1}$$

$$\geq 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1})$$

เพราะฉะนั้น $P(k + 1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \geq 1$ □

ตัวอย่าง 1.4.2 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$

จงแสดงว่า $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq n - 1 + a_1 a_2 a_3 \dots a_n$

แนวคิด ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $n \geq 2$ และ $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

“ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq n - 1 + a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ เมื่อ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in [0, 1]$ ”

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 \leq 1 - 1 + a_1$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว $P(k + 1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k \leq k - 1 + a_1 a_2 a_3 \dots a_k$

เพราะฉะนั้น $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + a_{k+1} \leq k - 1 + a_1 a_2 a_3 \dots a_k + a_{k+1}$

เพราะว่า $a_{k+1} \in [0, 1]$ เพราะฉะนั้น $1 - a_{k+1} \geq 0$

เพราะว่า $a_1, a_2, \dots, a_k \in [0, 1]$ เพราะฉะนั้น $a_1 a_2 a_3 \dots a_k \leq 1$

$$1 - a_1 a_2 a_3 \dots a_k \geq 0$$

เพราะฉะนั้น $(1 - a_{k+1})(1 - a_1 a_2 a_3 \dots a_k) \geq 0$

$$1 - a_1 a_2 a_3 \dots a_k - a_{k+1} + a_1 a_2 a_3 \dots a_k a_{k+1} \geq 0$$

$$(k + a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1}) - (k - 1 + a_1 a_2 a_3 \dots a_k + a_{k+1}) \geq 0$$

$$k - 1 + a_1 a_2 a_3 \dots a_k + a_{k+1} \leq k + a_1 a_2 a_3 \dots a_k a_{k+1}$$

$$= (k + 1) - 1 + a_1 a_2 a_3 \dots a_k a_{k+1}$$

เพราะฉะนั้น $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + a_{k+1} \leq (k + 1) - 1 + a_1 a_2 a_3 \dots a_k a_{k+1}$

เพราะฉะนั้น $P(k + 1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \geq 1$

□

ทฤษฎีบท 1.4.2 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (แบบที่ 2.)

ให้ $P(n)$ เป็นข้อความในพจน์ของจำนวนนับ n ให้ m เป็นจำนวนนับ

ถ้า (1) $P(m)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq m$ แล้ว $P(k + 1)$ เป็นจริง

แล้ว $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ $n \geq m$

ตัวอย่าง 1.4.3 จงแสดงว่า $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$ ทุกจำนวนนับ $n \geq 2$

แนวคิด ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$ ”

(1) การแสดงว่า $P(2)$ เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $P(2)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 2$ แล้ว $P(k + 1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 2$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{k}$

$$\text{และ} \quad \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) &= -\frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1} = \frac{-(k+1)^2 + k + (k+1)k}{k(k+1)^2} \\ &= \frac{-k^2 - 2k - 1 + k + k^2 + k}{k(k+1)^2} = \frac{-1}{k(k+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 1 - \frac{1}{k+1}$$

จาก (1) จะได้ $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 1 - \frac{1}{k+1}$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \geq 2$ □

หมายเหตุ เพราะว่า $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n} \right) = 2$

ค่าจริงของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$

ตัวอย่าง 1.4.4 กำหนดให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ และ $b_1, b_2, \dots, b_n$ เป็นจำนวนจริง

จงแสดงว่า $\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2$

หมายเหตุ สมการนี้เรียกว่า **เอกลักษณ์ของลากรองจ์ (Lagrange's identity)**

แนวคิด ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ $a_1, a_2, \dots, a_n$ และ $b_1, b_2, \dots, b_n$ เป็นจำนวนจริง

จะได้ว่า $2 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2$ ”

(1) การแสดงว่า $P(2)$ เป็นจริง

$$\begin{aligned} & (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\ &= a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 - (a_1^2 b_1^2 + 2 a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2) \\ &= a_1^2 b_2^2 - 2 a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2 \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^2 (a_i b_1 - a_1 b_i)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_i)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((a_1 b_1 - a_1 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2)^2 + (a_2 b_2 - a_2 b_2)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2)^2 \right) \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $P(2)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 2$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 2$

เพราะว่า $2 \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 \sum_{i=1}^{k+1} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i \right)^2 \right)$

$$\begin{aligned}
 &= 2\left(\left(\sum_{i=1}^k a_i^2 + a_{k+1}^2\right)\left(\sum_{i=1}^k b_i^2 + b_{k+1}^2\right) - \left(a_{k+1} b_{k+1} + \sum_{i=1}^k a_i b_i\right)^2\right) \\
 &= 2\left(a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 + a_{k+1}^2 \sum_{i=1}^k b_i^2 + b_{k+1}^2 \sum_{i=1}^k a_i^2 + \sum_{i=1}^k a_i^2 \sum_{i=1}^k b_i^2\right. \\
 &\quad \left.- \left(a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 + 2 a_{k+1} b_{k+1} \sum_{i=1}^k a_i b_i + \left(\sum_{i=1}^k a_i b_i\right)^2\right)\right) \\
 &= 2\left(\sum_{i=1}^k a_i^2 \sum_{i=1}^k b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k a_i b_i\right)^2\right) + 2\left(a_{k+1}^2 \sum_{i=1}^k b_i^2 + b_{k+1}^2 \sum_{i=1}^k a_i^2 - 2 a_{k+1} b_{k+1} \sum_{i=1}^k a_i b_i\right) \\
 &= 2\left(\sum_{i=1}^k a_i^2 \sum_{i=1}^k b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k a_i b_i\right)^2\right) + 2\left(\sum_{i=1}^k a_i^2 b_{k+1}^2 - 2 a_i b_{k+1} a_{k+1} b_i + a_{k+1}^2 b_i^2\right) \\
 &= 2\left(\sum_{i=1}^k a_i^2 \sum_{i=1}^k b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k a_i b_i\right)^2\right) + 2 \sum_{i=1}^k (a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (a_i b_j - a_j b_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^k (a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i)^2 \quad (\text{เพราะว่า } P(k) \text{ เป็นจริง}) \\
 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (a_i b_j - a_j b_i)^2 + \sum_{i=1}^k (a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i)^2 + \sum_{i=1}^k (a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^k \left(\left(\sum_{j=1}^k (a_i b_j - a_j b_i)^2\right) + (a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i)^2\right) + \sum_{j=1}^k (a_{k+1} b_j - b_{k+1} a_j)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^k \left(\left(\sum_{j=1}^k (a_i b_j - a_j b_i)^2\right) + (a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i)^2\right) + \left(\sum_{j=1}^k (a_{k+1} b_j - b_{k+1} a_j)^2 + 0\right) \\
 &= \sum_{i=1}^k \left(\left(\sum_{j=1}^k (a_i b_j - a_j b_i)^2\right) + (a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i)^2\right) \\
 &\quad + \left(\sum_{j=1}^k (a_{k+1} b_j - a_j b_{k+1})^2 + (a_{k+1} b_{k+1} - a_{k+1} b_{k+1})^2\right) \\
 &= \sum_{i=1}^{k+1} \left(\left(\sum_{j=1}^k ((a_i b_j - a_j b_i)^2) + (a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i)^2\right)\right) \\
 &= \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} (a_i b_j - a_j b_i)^2
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \geq 2$

□

ทฤษฎีบท 1.4.3 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (แบบที่ 3.)

ให้ $P(n)$ เป็นข้อความในพจน์ของจำนวนนับ n ให้ n_0 เป็นจำนวนนับ

ถ้า (1) $P(n_0)$ เป็นจริง

(2) ทุกจำนวนนับ $m > n_0$ ถ้า $P(k)$ เป็นจริง ทุกค่า $n_0 \leq k \leq m-1$ แล้ว $P(m)$ เป็นจริง

แล้ว $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ $n \geq n_0$

ตัวอย่าง 1.4.5 ให้ $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ จงแสดงว่า $a_n = 2^{n+1} - 1$ ทุกค่า $n \geq 3$

แนวคิด ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ $a_n = 2^{n+1} - 1$ ”

(1) การแสดงว่า $P(3)$ เป็นจริง

$$\text{เพราะว่า } 3a_2 - 2a_1 = 3(7) - 2(3) = 15 = 2^4 - 1 = a_3$$

เพราะฉะนั้น $P(3)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ทุกจำนวนนับ m ถ้า $P(k)$ เป็นจริง ทุกค่า $k = 1, 2, \dots, m-1$ แล้ว $P(m)$ เป็นจริง
สมมติ $P(k)$ เป็นจริง ทุกค่า $k = 3, 4, \dots, m-1$

$$\begin{aligned} a_m &= 3a_{m-1} - 2a_{m-2} \\ &= 3(2^{(m-1)+1} - 1) - 2(2^{(m-2)+1} - 1) \quad (\text{เพราะว่า } P(m-1), P(m-2) \text{ เป็นจริง}) \\ &= 3(2^m - 1) - 2(2^{m-1} - 1) \\ &= 3 \cdot 2^m - 3 - 2^m + 2 = (3-1)2^m - 1 = (2)2^m - 1 = 2^{m+1} - 1 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $P(m)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \geq 3$ □

1.5 เทคนิควิธี บทประยุกต์ของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แบบที่ 1.

ในกรณีสมการที่ต้องการพิสูจน์มีรูปแบบเป็น $L(n) \geq R(n)$ โดยที่ $L(n)$, $R(n)$ เป็นสูตรในพจน์ของ n ในรูปแบบผลคูณ การพิสูจน์สมการควรใช้ บทประยุกต์ของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แบบที่ 1. ซึ่งกล่าวว่า สำหรับ $L(n)$ และ $R(n)$ เป็นพจน์ในเทอมของจำนวนนับ n ให้ n_0 เป็นจำนวนนับ

ถ้า (1) $L(n_0) \geq R(n_0)$

(2) ทุกจำนวนนับ $n \geq n_0$

$$L(n), L(n+1), R(n), R(n+1) \text{ เป็นจำนวนจริงบวก และ } \frac{L(n+1)}{L(n)} \geq \frac{R(n+1)}{R(n)}$$

แล้ว $L(n) \geq R(n)$ ทุกจำนวนนับ $n \geq n_0$

ตัวอย่าง 1.5.1 จงแสดงว่า $\left(\frac{2^n}{n}\right) > \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$ ทุกจำนวนนับ $n \geq 2$

แนวคิด ให้ $L(n) = \left(\frac{2^n}{n}\right)$ และ $R(n) = \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$

(1) การแสดงว่า $L(2) \geq R(2)$

$$\text{เพราะว่า } L(2) = \left(\frac{2^2}{2}\right) = \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ และ } R(2) = \frac{4^2}{2\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} = 4(1.414) = 5.656$$

เพราะฉะนั้น $L(2) > R(2)$

(2) การแสดงว่า ทุกจำนวนนับ $n \geq 2$

$$L(n), L(n+1), R(n), R(n+1) \text{ เป็นจำนวนจริงบวก และ } \frac{L(n+1)}{L(n)} \geq \frac{R(n+1)}{R(n)}$$

จากสูตรของ $L(n)$ และ $R(n)$ จะได้ว่า $L(n), L(n+1), R(n), R(n+1)$ เป็นจำนวนจริงบวก

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} = \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!n!n!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$$

$$\frac{R(n+1)}{R(n)} = \frac{\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}}{\frac{4^n}{2\sqrt{n}}} = \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \left(\frac{L(n+1)}{L(n)}\right)^2 = \frac{4(2n+1)^2}{(n+1)^2} \text{ และ } \left(\frac{R(n+1)}{R(n)}\right)^2 = \frac{16n}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } 4(2n+1)^2(n+1) - 16n(n+1)^2 &= 4(n+1)((2n+1)^2 - 4n(n+1)) \\ &= 4(n+1)(4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 4n) = 4(n+1) > 0 \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 4(2n+1)^2(n+1) > 16n(n+1)^2$$

$$\frac{4(2n+1)^2}{(n+1)^2} > \frac{16n}{n+1}$$

$$\left(\frac{L(n+1)}{L(n)}\right)^2 > \left(\frac{R(n+1)}{R(n)}\right)^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{L(n+1)}{L(n)} > \frac{R(n+1)}{R(n)}$$

โดยบทประยุกต์ของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แบบที่ 1. จะได้ว่า $L(n) > R(n)$ ทุกจำนวนนับ $n \geq 2$ □

1.6 เทคนิควิธี บทประยุกต์ของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แบบที่ 2.

ในกรณีที่ต้องการพิสูจน์มีรูปแบบเป็น $L(n) \geq R(n)$ โดยที่ $L(n), R(n)$ เป็นสูตรในพจน์ของ n ในรูปผลบวก การพิสูจน์อสมการควรใช้ บทประยุกต์ของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แบบที่ 2. ซึ่งกล่าวว่า

สำหรับ $L(n)$ และ $R(n)$ ซึ่งเป็นพจน์ในเทอมของจำนวนนับ n ให้ n_0 เป็นจำนวนนับ

ถ้า (1) $L(n_0) \geq R(n_0)$

(2) ทุกจำนวนนับ $n \geq n_0$

$$L(n), L(n+1), R(n), R(n+1) \text{ เป็นจำนวนจริงบวก}$$

$$\text{และ } L(n+1) - L(n) \geq R(n+1) - R(n)$$

แล้ว $L(n) \geq R(n)$ ทุกจำนวนนับ $n \geq n_0$

ตัวอย่าง 1.6.1 จงแสดงว่า $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$ ทุกจำนวนจริงนับ n

แนวคิด ให้ $L(n) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ และ $R(n) = 2(\sqrt{n+1} - 1)$

(1) การแสดงว่า $L(1) > R(1)$

$$\text{เพราะว่า } L(1) = 1 \text{ และ } R(1) = 2(\sqrt{2} - 1) = 2(1.414 - 1) = 0.828$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } L(1) > R(1)$$

(2) กำหนดให้ $n \geq 1$

$$\text{การแสดงว่า } L(n), L(n+1), R(n), R(n+1) \text{ เป็นจำนวนจริงบวก}$$

และ $L(n+1) - L(n) \geq R(n+1) - R(n)$

เพราะว่า $L(n) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ และ $R(n) = 2(\sqrt{n+1} - 1)$

เพราะฉะนั้น $L(n), L(n+1), R(n), R(n+1)$ เป็นจำนวนจริงบวก

$$L(n+1) - L(n) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\begin{aligned} R(n+1) - R(n) &= (2(\sqrt{n+2} - 1)) - (2(\sqrt{n+1} - 1)) = 2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \\ &= 2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 2 \frac{(n+2) - (n+1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

$$L(n+1) - L(n) - R(n+1) - R(n)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} > 0$$

เพราะฉะนั้น $L(n+1) - L(n) \geq R(n+1) - R(n)$

โดยบทประยุกต์ของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แบบที่ 2. จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ $n \geq 1$ □

หมายเหตุ ผลจากข้างต้นจะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > \lim_{n \rightarrow \infty} (2(\sqrt{n+1} - 1)) = \infty$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

1.7 เทคนิควิธี ฟังก์ชันเอกพันธ์ (Homogeneous function)

การพิสูจน์ในวิธีนี้เราใช้ประโยชน์ของฟังก์ชันเอกพันธ์ (Homogeneous function) โดยการตรวจสอบว่า

$$\text{จากอสมการ} \quad L(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq R(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\text{จัดรูปเป็น} \quad L(x_1, x_2, \dots, x_n) - R(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

$$\text{ให้ } Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = L(x_1, x_2, \dots, x_n) - R(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

แล้วตรวจสอบว่า $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ หรือไม่

บทนิยาม 1.7.1 $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ เป็น ฟังก์ชันเอกพันธ์ (Homogeneous function)

ถ้ามีจำนวนจริง r ที่ทำให้ $Q(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^r Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ทุกจำนวนจริง $t > 0$

ตัวอย่างเช่น $Q(x, y) = x^4 + x^2 y^2 + y^4$

$$\text{เพราะว่า } Q(tx, ty) = t^4 x^4 + t^2 x^2 t^2 y^2 + t^4 y^4 = t^4 x^4 + x^2 y^2 + y^4 = t^4 Q(x, y)$$

เพราะฉะนั้น $Q(x, y) = x^4 + x^2 y^2 + y^4$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์

การพิสูจน์อสมการ $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ ในกรณีที่ $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์

เพราะว่า $Q(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^r Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ และ $t^r > 0$

ต่อไปจึงใช้เหตุผลว่า $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ ก็ต่อเมื่อ $t^r Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$
ก็ต่อเมื่อ $Q(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) \geq 0$

เพราะฉะนั้น เลือกค่า t ที่ทำให้การคำนวณค่า $Q(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$ ง่าย

และพิสูจน์อสมการ $Q(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) \geq 0$ แทน การพิสูจน์อสมการ $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$

การพิสูจน์แบ่งเป็น 2 ขั้นตอนคือ

ขั้นที่ 1. สมมติให้ผลบวกบางชุดของตัวแปรที่มีค่าเท่ากับ 1

ขั้นที่ 2. พิสูจน์กรณีทั่วไปที่ผลบวกของตัวแปรชุดนั้นมีค่าไม่เท่ากับ 1

ตัวอย่าง 1.7.1 กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $\sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt[4]{a^4 + b^4}$

แนวคิด ให้ $L(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$ และ $R(a, b) = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$

ให้ $Q(a, b) = L(a, b) - R(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt[4]{a^4 + b^4}$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } Q(ta, tb) &= \sqrt{t^2a^2 + t^2b^2} - \sqrt[4]{t^4a^4 + t^4b^4} = t\sqrt{a^2 + b^2} - t\sqrt[4]{a^4 + b^4} \\ &= t(\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt[4]{a^4 + b^4}) = tQ(a, b) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $Q(a, b)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์

□

หมายเหตุ เลือกค่า t ที่เหมาะสมเพื่อให้ค่า $t^2 a^2 + t^2 b^2 = 1$

และแยกการพิสูจน์ 2 ขั้นตอนคือ ขั้นที่ 1. สมมติ $a^2 + b^2 = 1$ และขั้นที่ 2. พิสูจน์กรณีที่ $a^2 + b^2 \neq 1$

ขั้นที่ 1. สมมติ $a^2 + b^2 = 1$ เพราะว่า $a > 0$ และ $b > 0$ เพราะฉะนั้น $a^2 < 1$ และ $b^2 < 1$

เพราะฉะนั้น $a^4 < a^2$ และ $b^4 < b^2$ เพราะฉะนั้น $a^4 + b^4 < a^2 + b^2 = 1$

เพราะฉะนั้น $\sqrt[4]{a^4 + b^4} < 1 = \sqrt{a^2 + b^2}$

ขั้นที่ 2. สมมติ $a^4 + b^4 \neq 1$ เลือกค่า $t = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ เพราะฉะนั้น $t > 0$

$$\text{ให้ } x = ta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ และ } y = tb = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x^2 + y^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ของขั้นที่ 1. จะได้ว่า $\sqrt[4]{x^4 + y^4} < \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sqrt[4]{t^4a^4 + t^4b^4} < \sqrt{t^2a^2 + t^2b^2}$$

$$t\sqrt[4]{a^4 + b^4} < t\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sqrt[4]{a^4 + b^4} < \sqrt{a^2 + b^2}$$

(เพราะว่า $t > 0$)

จากที่พิสูจน์มาข้างต้นสรุปได้ว่า $\sqrt[4]{a^4 + b^4} < \sqrt{a^2 + b^2}$

□

1.8 เทคนิควิธี ใช้ผลของค่า discriminant ($B^2 - 4AC$) ของ $F(x) = Ax^2 + Bx + C$

ค่า discriminant ที่นักเรียนศึกษามาตั้งแต่ชั้น ม. ต้น เมื่อเรียนสูงขึ้นในระดับปริญญาตรี-โท-เอก ก็ยังมีการนำประโยชน์ของค่า discriminant มาใช้ ในที่นี้จึงขอนำประโยชน์ของค่า discriminant มาช่วยในการพิสูจน์อสมการ

บทนิยาม 1.8.1 ค่า discriminant ของ สมการ หรือ ฟังก์ชัน $F(x) = ax^2 + bx + c = 0$ คือค่า $b^2 - 4ac$

ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $D = b^2 - 4ac$

จากพื้นฐานคณิตศาสตร์ระดับ ม. ต้น (ถ้าทุกโรงเรียนของประเทศไทยยังมีการสอนเรื่องนี้อยู่) จะได้ข้อสรุปว่า

1. ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ แล้ว $ax^2 + bx + c = 0$ มีราก 2 ตัวค่าต่างกัน คือ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
2. ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ แล้ว $ax^2 + bx + c = 0$ มีราก 1 ค่า คือ $x = -\frac{b}{2a}$ โดยมีภาวะรากซ้ำ = 2
3. ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ แล้ว $ax^2 + bx + c = 0$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง แต่มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน

ประโยชน์จากค่า discriminant มีมากกว่าข้อสรุปข้างต้น ซึ่งเป็นประโยชน์ในการพิสูจน์สมการดังนี้

ให้ $F(x) = ax^2 + bx + c = 0$ จะได้ $F(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$ เมื่อ $D = b^2 - 4ac$

ให้ $x_0 = -\frac{b}{2a}$ จะได้ว่า $F(x_0) = -\frac{D}{4a}$

กรณีที่ 1. $a > 0$ จะได้ว่า

1. $F(x) > F(x_0)$ ทุกค่า $x \neq x_0$
2. $F(x) > 0$ ทุกค่า x ก็ต่อเมื่อ $D < 0$
3. ถ้า $D = 0$ แล้ว $F(x) \geq 0$ ทุกค่า x นอกจากยังได้ว่า $F(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = x_0$
4. ถ้า $D > 0$ และ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ เป็นรากของ $F(x) = 0$
แล้ว $F(x) < 0$ เมื่อ $x_2 < x < x_1$ และ $F(x) > 0$ เมื่อ $x < x_2$ หรือ $x > x_1$

กรณีที่ 2. $a < 0$ จะได้ว่า

1. $F(x) < F(x_0)$ ทุกค่า $x \neq x_0$
2. $F(x) < 0$ ทุกค่า x ก็ต่อเมื่อ $D < 0$
3. ถ้า $D = 0$ แล้ว $F(x) \leq 0$ ทุกค่า x นอกจากยังได้ว่า $F(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = x_0$
4. ถ้า $D > 0$ และ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ เป็นรากของ $F(x) = 0$
แล้ว $F(x) > 0$ เมื่อ $x_2 < x < x_1$ และ $F(x) < 0$ เมื่อ $x < x_2$ หรือ $x > x_1$

ตัวอย่าง 1.8.1 จงแสดงว่า $(\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2)(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2)$ เมื่อ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ และ $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$ มีค่า

$$\begin{aligned} \text{แนวคิด} \quad \text{ให้ } F(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} (ta_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} (t^2 a_i^2 + 2a_i b_i + b_i^2) \\ &= t^2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 + (2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i)t + \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 &= At^2 + Bt + C \end{aligned}$$

เมื่อ $A = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$, $B = 2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ และ $C = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$ เพราะว่า $F(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (ta_i + b_i)^2 \geq 0$

เพราะฉะนั้น $B^2 - 4AC \geq 0$ ซึ่งจะได้ $B^2 \geq 4AC$

$$(2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i)^2 \geq 4(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2)(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2)$$

เพราะฉะนั้น

$$(\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2)(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2)$$

□

1.9 เทคนิควิธี การจัดรูปพีชคณิตเบื้องต้น กำลังสองสมบูรณ์ และ อสมการพื้นฐาน

การพิสูจน์อสมการ พจน์ทางซ้าย (L) $\geq$ พจน์ทางขวา (R) เราสามารถใช้ประโยชน์จากการจัดรูปทางพีชคณิตให้พจน์ของ $L - R$ เป็นรูปแบบกำลังสองสมบูรณ์ หรือรูปแบบอื่น ๆ ที่ยืนยันได้ว่า $L - R \geq 0$ แล้วเราจะสรุปได้ว่า $L \geq R$ นอกจากนั้นเรายังสามารถนำอสมการพื้นฐานมาช่วยในการพิสูจน์อสมการที่มีโครงสร้างของสูตรที่ยุ่งยากได้ด้วย อสมการพื้นฐานมาช่วยในการพิสูจน์เช่น

1. $x^2 + 2xy = (x + y)^2 - y^2$ ทุกจำนวนจริง x, y
- $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ ทุกจำนวนจริง x, y, z
2. $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ ทุกจำนวนจริง $x \geq 0$ และ $y \geq 0$
3. $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ทุกจำนวนจริง $x > 0$
4. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ ทุกจำนวนจริง $x > 0$ และ $y > 0$
5. $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ทุกจำนวนจริง x, y
6. $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ ทุกจำนวนจริง $x \geq 0$ และ $y \geq 0$
7. $1 + x^2 \geq 2x$ ทุกจำนวนจริง x

ตัวอย่าง 1.9.1 กำหนดให้ x, y, z เป็นจำนวนจริง

จงแสดงว่า $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ และ $\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} \geq 3$

แนวคิด เพราะว่า

$$\begin{aligned}(x - y)^2 &\geq 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0 \\ x^2 + y^2 &\geq 2xy\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$y^2 + z^2 \geq 2yz \quad \dots (2)$$

และ

$$z^2 + x^2 \geq 2zx \quad \dots (3)$$

จาก (1), (2), (3) จะได้ $(x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (z^2 + x^2) \geq 2xy + 2yz + 2zx$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$$

เพราะฉะนั้น

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \quad \dots (4)$$

จาก (4) จะได้

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq xy + yz + zx + 2(xy + yz + zx)$$

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} \geq 3 \quad \square$$

ตัวอย่าง 1.9.2 กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวก

จงแสดงว่า $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)(1 + d^2) \geq 16abcd$

แนวคิด เพราะว่า $1 + a^2 \geq 2a$, $1 + b^2 \geq 2b$, $1 + c^2 \geq 2c$ และ $1 + d^2 \geq 2d$

เพราะฉะนั้น $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)(1 + d^2) \geq (2a)(2b)(2c)(2d) = 16abcd$ $\square$

1.10 เทคนิควิธี เปรียบเทียบค่าของผลหาร หรือ ผลต่าง

ใช้หลักการเปรียบเทียบขั้นพื้นฐานระหว่างของสองสิ่ง ด้วยการจับลบกัน หรือ จับมาหารกัน โดยมีหลักเกณฑ์ที่สำคัญดังนี้

1. ถ้า $L - R \geq 0$ แล้ว $L \geq R$
2. ถ้า $L > 0$ และ $R > 0$ และ $\frac{L}{R} \geq 1$ แล้ว $L \geq R$

ปัญหาเกี่ยวกับข้อสมการส่วนใหญ่สามารถใช้แนวคิด 2 แบบข้างต้นช่วยในการพิสูจน์ได้

ตัวอย่าง 1.10.1 จงแสดงว่า $\frac{(2n)!}{n!n!} > \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}$ ทุกค่า $k = 1, 2, \dots, n-1$

แนวคิด ให้ n, k เป็นจำนวนนับ และ $k \leq n-1$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{(2n)!}{n!n!}}{\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}} &= \frac{k!(2n-k)!}{n!n!} \\ &= \left(\frac{k!}{n!}\right) \left(\frac{(2n-k)!}{n!}\right) \\ &= \left(\frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(n-1)n}\right) \left(\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n-k-1)(2n-k)}{1}\right) \\ &= \left(\frac{n+1}{k+1}\right) \left(\frac{n+2}{k+2}\right) \dots \left(\frac{2n-k-1}{n-1}\right) \left(\frac{2n-k}{n}\right) \end{aligned} \quad \dots (1)$$

เพราะว่า k เป็นจำนวนนับ และ $1 \leq k \leq n-1$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{n+1}{k+1} > 1, \frac{n+2}{k+2} > 1, \dots, \frac{2n-k-1}{n-1} > 1, \frac{2n-k}{n} > 1 \quad \dots (2)$$

$$\text{จาก (1) และ (2) จะได้ } \frac{\frac{(2n)!}{n!n!}}{\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}} > (1)(1) \dots (1)(1) = 1$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{(2n)!}{n!n!} > \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} \text{ ทุกค่า } k = 1, 2, \dots, n-1 \quad \square$$

ตัวอย่าง 1.10.2 จงแสดงว่า $a^4 + b^4 \geq ab^3 + a^3b$ ทุกจำนวนจริง a, b

แนวคิด เพราะว่าการสลับตัวแปร a, b เป็น b, a จะได้ข้อสมการเหมือนเดิม

เพราะฉะนั้น การพิสูจน์ข้อสมการนี้สามารถใช้เหตุผล โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $0 \leq a \leq b$

$$\begin{aligned} (a^4 + b^4) - (ab^3 + a^3b) &= (a^4 - a^3b) + (b^4 - ab^3) \\ &= a^3(a-b) + b^3(b-a) \\ &= a^3(a-b) - b^3(a-b) \\ &= (a^3 - b^3)(a-b) \end{aligned} \quad \dots (1)$$

เพราะว่า $0 \leq a \leq b$ เพราะฉะนั้น $a^3 - b^3 \leq 0$ และ $a - b \leq 0$

$$\text{จาก (1) จะได้ } (a^4 + b^4) - (ab^3 + a^3b) \geq 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } a^4 + b^4 \geq ab^3 + a^3b \quad \square$$

1.11 เทคนิควิธี ใช้ผลของทฤษฎีบทเกี่ยวกับอสมการ

การพิสูจน์อสมการโดยอ้างผลทฤษฎีบทที่สำคัญของอสมการ ให้จัดรูปอสมการที่ต้องการพิสูจน์ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบท จะทำให้การพิสูจน์ง่ายขึ้น ตัวอย่างทฤษฎีอสมการที่สำคัญเช่น

1. อสมการ (A.M. – G.M.) กล่าวว่า ทุกจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ $a_1, a_2, \dots, a_n$ จะได้ว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq$ ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต $= \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$
2. อสมการ (A.M. – H.M.) กล่าวว่า ทุกจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ $a_1, a_2, \dots, a_n$ จะได้ว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq$ ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก $= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$
3. อสมการโคชี ซึ่งกล่าวว่า $a_1, a_2, \dots, a_n$ และ $b_1, b_2, \dots, b_n$ เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$

ทฤษฎีบทที่สำคัญเกี่ยวกับอสมการอื่น ๆ จะได้ศึกษาต่อไป

ตัวอย่าง 1.11.1 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก และ $a + b + c = 1$ จงแสดงว่า $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq 9$

แนวคิด โดยอสมการ A.M. – G.M. กับจำนวนจริง a, b, c จะได้ว่า $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{3}{a+b+c} = 3 \quad \dots (1)$

โดยใช้อสมการ A.M.-G.M. กับจำนวนจริง $\frac{a}{bc}, \frac{b}{ca}, \frac{c}{ab}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}}{3} &\geq \sqrt[3]{\left(\frac{a}{bc}\right)\left(\frac{b}{ca}\right)\left(\frac{c}{ab}\right)} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \\ &\geq 3 \end{aligned} \quad (\text{จาก (1)})$$

เพราะฉะนั้น $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq 9 \quad \square$

ตัวอย่าง 1.11.2 กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงและ $a + b + c = 1$ จงแสดงว่า $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$

แนวคิด โดยใช้อสมการโคชีกับจำนวนจริง 1, 1, 1 และ a, b, c จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (1)(a) + (1)(b) + (1)(c) &\leq \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2)} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ a + b + c &\leq \sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ 1 &\leq \sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (\text{เพราะว่า } a + b + c = 1) \\ 1 &\leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3} \quad \square$

1.12 เทคนิควิธี ประยุกต์ใช้ผลของ ฟังก์ชันเพิ่ม - ฟังก์ชันลด

ใช้ความรู้ทางแคลคูลัสเกี่ยวกับ ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด ค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด อนุพันธ์ มาช่วยในการพิสูจน์อสมการ โดยมีหลักการสำคัญดังนี้

1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วง $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ ถ้า $x_1 > x_2$ แล้ว $f(x_1) \geq f(x_2)$
 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ บนช่วง $[a, b]$
 ก็ต่อเมื่อ $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ ถ้า $x_1 > x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$
2. f เป็นฟังก์ชันลด บนช่วง $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ ถ้า $x_1 > x_2$ แล้ว $f(x_1) \leq f(x_2)$
 f เป็นฟังก์ชันลดโดยแท้ บนช่วง $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ ถ้า $x_1 > x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$
3. ถ้า $f'(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วง (a, b)
 ถ้า $f'(x) > 0$ ทุกค่า $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ บนช่วง (a, b)
4. ถ้า $f'(x) \leq 0$ ทุกค่า $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลด บนช่วง (a, b)
 ถ้า $f'(x) < 0$ ทุกค่า $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดโดยแท้ บนช่วง (a, b)
5. ถ้า $f'(c) = 0$ และ $f'(x) > 0$ บนช่วง (a, c) และ $f'(x) < 0$ บนช่วง (c, b)
 แล้ว $f(x) \leq f(c)$ ทุกค่า $x \in (a, b)$
6. ถ้า $f'(c) = 0$ และ $f'(x) < 0$ บนช่วง (a, c) และ $f'(x) > 0$ บนช่วง (c, b)
 แล้ว $f(x) \geq f(c)$ ทุกค่า $x \in (a, b)$
7. ถ้า $f(x), f'(x)$ และ $f''(x)$ หาค่าได้บนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b), f'(c) = 0$ และ $f''(c)$ มีค่า
 - 7.1 ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่า ต่ำสุดสัมพัทธ์ บนช่วง (a, b)
 - 7.2 ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่า สูงสุดสัมพัทธ์ บนช่วง (a, b)

ตัวอย่าง 1.12.1 กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง และ $a < b < c$ หรือ $a < b < c$

จงแสดงว่า $(a + b + c + x)^2 > 8(ac + bx)$ ทุกจำนวนจริง x

แนวคิด ให้ $f(x) = (a + b + c + x)^2 - 8(ac + bx)$ เพราะฉะนั้น $f'(x) = 2(a + b + c + x) - 8b$

$$f'(x) = 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad 2(a + b + c + x) - 8b = 0$$

$$a + b + c + x = 4b$$

$$x = 3b - a - c$$

กราฟของ $y = f(x)$ เป็นพาราโบลาหงาย เพราะฉะนั้น $f(3b - a - c)$ เป็นค่าต่ำสุดของ f

$$\begin{aligned} f(3b - a - c) &= (a + b + c + 3b - a - c)^2 - 8(ac + b(3b - a - c)) \\ &= 16b^2 - 8(ac + 3b^2 - ab - bc) = 16b^2 - 8ac - 24b^2 + 8ab + 8bc \\ &= -8b^2 - 8ac + 8ab + 8bc = 8(ab - b^2 - ac + bc) \\ &= 8(b(a - b) - c(a - b)) = 8(b - c)(a - b) \quad \dots (1) \end{aligned}$$

เพราะว่า $a > b > c$ หรือ $a < b < c$

เพราะฉะนั้น ถ้า $a > b > c$ แล้ว $(b - c)(a - b) > 0$ หรือ ถ้า $a < b < c$ แล้ว $(b - c)(a - b) > 0$

เพราะฉะนั้นจาก (1) จะได้ $f(3b - a - c) = 8(b - c)(a - b) > 0$

เพราะว่า $y = f(x)$ เป็นพาราโบลาหงาย และ $f(3b - a - c)$ เป็นค่าต่ำสุดของ f

เพราะฉะนั้น $f(x) \geq f(3b - a - c) > 0$ ทุกจำนวนจริง x

เพราะฉะนั้น $(a + b + c + x)^2 - 8(ac + bx) > 0$

$(a + b + c + x)^2 > 8(ac + bx)$ ทุกจำนวนจริง x $\square$

1.13 เทคนิควิธี เดินหน้าแล้วถอยหลังกลับ

การพิสูจน์อสมการที่อยู่ในรูปแบบของผลบวก หรือ ผลคูณของ n พจน์ บางอสมการเราจะทำการพิสูจน์แบบเดินหน้าว่าอสมการนั้นเป็นจริงเมื่อ $n = 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ แล้วจึงพิสูจน์แบบถอยหลังกลับในกรณี $n = 3, 5, 6, 7, \dots$ ตัวอย่างเช่น

ตัวอย่าง 1.13.1 กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์

จงแสดงว่า $\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{d}}{4} \leq \sqrt[3]{\frac{a+b+c+d}{4}}$

และ $\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}{3} \leq \sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}$

แนวคิด จากตัวอย่าง 1.1.2 เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ จะได้ว่า $\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{x+y}{2}} \dots (1)$

เทคนิควิธี เดินหน้า คือการประยุกต์ใช้ผลของ (1)

ใช้ผลของ (1) จะได้ $\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}$ และ $\frac{\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{d}}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{c+d}{2}} \dots (2)$

เพราะฉะนั้น $\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{d}}{4} = \frac{\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2} + \frac{\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{d}}{2}}{2}$

$$= \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{d}}{2}\right)^3}}{2}$$

$$\leq \frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{\frac{c+d}{2}}\right)^3}}{2} \quad (\text{จาก (2)})$$

$$\leq \frac{\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c+d}{2}}}{2}$$

$$\leq \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{c+d}{2}\right)}{2}} \quad (\text{จาก (1) เมื่อ } x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{c+d}{2})$$

เพราะฉะนั้น $\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{d}}{4} \leq \sqrt[3]{\frac{a+b+c+d}{4}} \dots (3)$

เทคนิควิธี ถอยหลังกลับ คือ การประยุกต์ใช้ผลของ (1) และ (3)

$$\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}{3} = \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}} - \sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}}{3}$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}}{4} - \sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{3} \left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}}{4} \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}}{4} \right) \\
&= \frac{4}{3} \left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}}{4} \right) - \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}} \right) \quad \dots (4)
\end{aligned}$$

จาก (3) จะได้
$$\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}}{4} \leq \sqrt[3]{\frac{a+b+c + \frac{a+b+c}{3}}{4}} = \sqrt[3]{\frac{4(a+b+c)}{4 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}}$$

เพราะฉะนั้นจาก (4) จะได้
$$\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}{3} \leq \frac{4}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}} \right) - \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}} \right)$$

เพราะฉะนั้น
$$\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}{3} \leq \sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}} \quad \square$$

1.14 เทคนิควิธี สมมติสิ่งที่ต้องการให้เป็นจริง แล้วหาข้อขัดแย้ง

ในกรณีที่เราสงสัยว่า อสมการ 2 อสมการ ต้องเป็นจริงพร้อมกัน หรือ อสมการ 2 อสมการ เป็นจริงพร้อมกันไม่ได้ หรือ อสมการ 2 อสมการ ต้องเป็นเท็จทั้งคู่ แนวทางการพิสูจน์ สามารถทำได้ด้วยการสมมติให้สิ่งที่ต้องการนั้นเป็นจริง แล้วตรวจสอบเพื่อหา ข้อขัดแย้ง หรือ ความสมเหตุสมผล เมื่อสิ่งที่เราต้องการพิสูจน์เป็นจริง

ตัวอย่าง 1.14.1 กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวก

จงแสดงว่า $\left| \frac{a + \sqrt{a^2 + 2b^2}}{2b} \right| < 1$ หรือ $\left| \frac{a - \sqrt{a^2 + 2b^2}}{2b} \right| < 1$ เป็นจริงอย่างน้อย 1 อสมการ

แนวคิด สมมติ $\left| \frac{a + \sqrt{a^2 + 2b^2}}{2b} \right| < 1$ และ $\left| \frac{a - \sqrt{a^2 + 2b^2}}{2b} \right| < 1$ เป็นเท็จทั้งสองอสมการ (*)

เพราะฉะนั้น $\left| \frac{a + \sqrt{a^2 + 2b^2}}{2b} \right| \geq 1$ และ $\left| \frac{a - \sqrt{a^2 + 2b^2}}{2b} \right| \geq 1$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned}
1 &\leq \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + 2b^2}}{2b} \right| \left| \frac{a - \sqrt{a^2 + 2b^2}}{2b} \right| \\
&= \left| \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 2b^2}}{2b} \right) \left(\frac{a - \sqrt{a^2 + 2b^2}}{2b} \right) \right| \\
&= \left| \frac{a^2 - (a^2 + 2b^2)}{4b^2} \right| \\
&= \left| \frac{-2b^2}{4b^2} \right| = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $1 \leq \frac{1}{2}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้นข้อความ (*) ที่เรสมมติไว้ต้องเป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $\left| \frac{a + \sqrt{a^2 + 2b^2}}{2b} \right| < 1$ หรือ $\left| \frac{a - \sqrt{a^2 + 2b^2}}{2b} \right| < 1$ เป็นจริงอย่างน้อย 1 อสมการ $\square$

1.15 เทคนิควิธี กราฟของฟังก์ชัน

จากกราฟของฟังก์ชันพื้นฐานที่นักเรียนได้เรียนมาในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น และ มัธยมศึกษาตอนปลาย เช่น กราฟเส้นตรง $y = mx + c$ กราฟของ $y = \cos x$ กราฟของ $y = x^3$ สามารถนำมาช่วยในการพิสูจน์อสมการที่สำคัญทางคณิตศาสตร์ได้

ตัวอย่าง 1.15.1 กำหนดให้ $a, b \in [0, \frac{\pi}{2}]$ จงแสดงว่า $\frac{\cos a + \cos b}{2} \leq \cos(\frac{a+b}{2})$

แนวคิด จากความรู้ระดับชั้นมัธยมศึกษา กราฟของ $f(x) = \cos x$ เป็นดังรูปที่ 1.15.1

ให้ $a, b \in [0, \frac{\pi}{2}]$

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $a \leq b$

ให้ P, Q มีพิกัดเป็น $P(a, \cos a)$ และ $Q(b, \cos b)$

สมการเส้นตรงผ่านจุด P และ Q คือ $\frac{y - \cos a}{x - a} = \frac{\cos b - \cos a}{b - a}$

เพราะฉะนั้น $y = \cos a + (\frac{\cos b - \cos a}{b - a})(x - a)$

ให้ $g(x) = \cos a + (\frac{\cos b - \cos a}{b - a})(x - a)$

เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่าน PQ

เพราะว่าทุกค่า x บนช่วง $[a, b]$ $g(x) \leq f(x)$

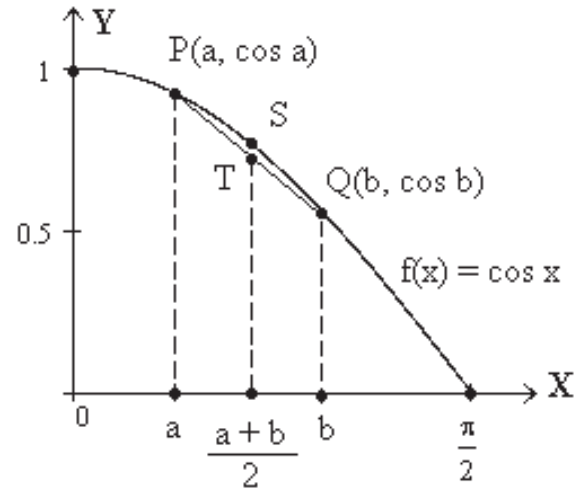
เพราะฉะนั้น $g(\frac{a+b}{2}) \leq f(\frac{a+b}{2})$

$$\cos a + (\frac{a+b}{2} - a)(\frac{\cos b - \cos a}{b - a}) \leq \cos(\frac{a+b}{2})$$

$$\cos a + (\frac{b-a}{2})(\frac{\cos b - \cos a}{b - a}) \leq \cos(\frac{a+b}{2})$$

$$\cos a + \frac{1}{2}(\cos b - \cos a) \leq \cos(\frac{a+b}{2})$$

เพราะฉะนั้น $\frac{\cos a + \cos b}{2} \leq \cos(\frac{a+b}{2})$ □



รูปที่ 1.15.1

ตัวอย่าง 1.15.2 กำหนดให้ $a, b \in [0, 1]$ จงแสดงว่า $(\frac{a+b}{2})^3 \leq \frac{a^3 + b^3}{2}$

แนวคิด กราฟของ $y = x^3$ เป็นดังรูปที่ 1.15.2 ให้ $a, b \in [0, 1]$

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $a \leq b$

ให้ P, Q มีพิกัดเป็น $P(a, a^3)$ และ $Q(b, b^3)$

สมการเส้นตรงผ่านจุด P และ Q คือ $\frac{y - a^3}{x - a} = \frac{b^3 - a^3}{b - a}$

เพราะฉะนั้น $y = a^3 + (\frac{b^3 - a^3}{b - a})(x - a)$

ให้ $g(x) = a^3 + (\frac{b^3 - a^3}{b - a})(x - a)$ เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่าน PQ

เพราะว่าทุกค่า x บนช่วง $[a, b]$ $g(x) \geq f(x)$

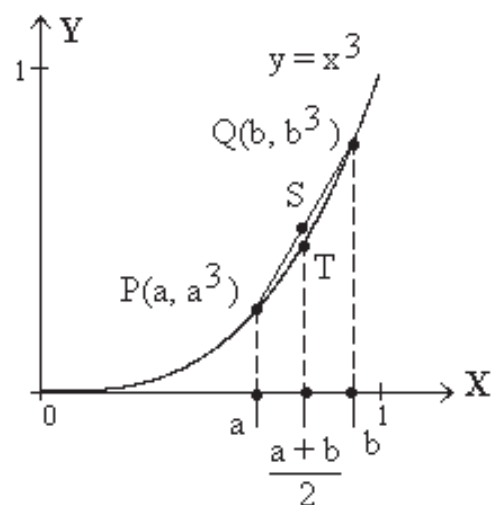
เพราะฉะนั้น $g(\frac{a+b}{2}) \geq f(\frac{a+b}{2})$

$$a^3 + (\frac{a+b}{2} - a)(\frac{b^3 - a^3}{b - a}) \geq (\frac{a+b}{2})^3$$

$$a^3 + (\frac{b-a}{2})(\frac{b^3 - a^3}{b - a}) \geq (\frac{a+b}{2})^3$$

$$a^3 + \frac{1}{2}(b^3 - a^3) \geq (\frac{a+b}{2})^3$$

เพราะฉะนั้น $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^3$ □



รูปที่ 1.15.2

หมายเหตุ ในกรณีที่เขียนกราฟไม่ได้จะตรวจสอบอย่างไร เราจะศึกษาเรื่องนี้เพิ่มเติมในบทที่ 5. และ บทที่ 6.

1.16 เทคนิควิธี การแก้ปัญหาลดความยาก

ใช้วิธีการลดระดับความยากของปัญหา เช่น

1. ลดจำนวนตัวแปรของอสมการ เช่น การพิสูจน์อสมการในเทอมของ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เราควรลองพิสูจน์ในกรณี $n = 2, n = 3, \dots$ เพื่อดูแนวทางในการพิสูจน์กรณีทั่วไป
2. ลดเงื่อนไขของตัวแปร เช่น การพิสูจน์อสมการของจำนวนจริง เราอาจพิจารณาในกรณีที่ตัวแปรนั้นเป็นจำนวนนับ หรือ จำนวนเต็ม เพื่อดูแนวทางในการพิสูจน์กรณีที่ตัวแปรนั้นเป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 1.16.1 ให้ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$

จงแสดงว่า $\sqrt{x_1(1-x_1)} + \sqrt{x_2(1-x_2)} + \dots + \sqrt{x_n(1-x_n)} \leq \sqrt{n-1}$

แนวคิด การแก้อสมการในข้อนี้เราควรลองศึกษาจากง่ายไปยากดังนี้

ให้ $x \geq 0, y \geq 0$ และ $x + y = 1$ จงแสดงว่า $\sqrt{x(1-x)} + \sqrt{y(1-y)} \leq 1$

แนวคิด โดยใช้สมการโคชีกับจำนวนจริงบวก $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ และ $\sqrt{1-x}, \sqrt{1-y}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \sqrt{1-x} + \sqrt{y} \sqrt{1-y} &\leq \sqrt{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2} \sqrt{(\sqrt{1-x})^2 + (\sqrt{1-y})^2} \\ \sqrt{x(1-x)} + \sqrt{y(1-y)} &\leq \sqrt{x+y} \sqrt{1-x+1-y} = (1) \sqrt{2-(x+y)} = (1) \sqrt{2-1} = 1 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{x(1-x)} + \sqrt{y(1-y)} \leq 1$

เพื่อให้มั่นใจในแนวคิดมากขึ้น ควรลองเพิ่มเงื่อนไขเป็น 3 พจน์ดังนี้

ให้ $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ และ $x + y + z = 1$

จงแสดงว่า $\sqrt{x(1-x)} + \sqrt{y(1-y)} + \sqrt{z(1-z)} \leq \sqrt{2}$

แนวคิด โดยใช้สมการโคชีกับจำนวนจริงบวก $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ และ $\sqrt{1-x}, \sqrt{1-y}, \sqrt{1-z}$

จะได้ว่า $\sqrt{x} \sqrt{1-x} + \sqrt{y} \sqrt{1-y} + \sqrt{z} \sqrt{1-z}$

$$\begin{aligned} &\leq \sqrt{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2} \sqrt{(\sqrt{1-x})^2 + (\sqrt{1-y})^2 + (\sqrt{1-z})^2} \\ \sqrt{x(1-x)} + \sqrt{y(1-y)} + \sqrt{z(1-z)} &\leq \sqrt{x+y+z} \sqrt{(1-x)+(1-y)+(1-z)} = (1) \sqrt{3-(x+y+z)} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{x(1-x)} + \sqrt{y(1-y)} + \sqrt{z(1-z)} \leq \sqrt{2}$

การแก้ปัญหาคำถามทั่วไปเป็นดังนี้

เพราะว่า $x_i > 0$ และ $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ เพราะฉะนั้น $1 - x_i > 0$ ทุกค่า $i = 1, 2, \dots, n$

โดยใช้สมการโคชีกับจำนวนจริงบวก $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_n}$ และ $\sqrt{1-x_1}, \sqrt{1-x_2}, \dots, \sqrt{1-x_n}$

จะได้ว่า $\sqrt{x_1} \sqrt{1-x_1} + \sqrt{x_2} \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{x_n} \sqrt{1-x_n}$

$$\begin{aligned} &\leq \sqrt{(\sqrt{x_1})^2 + (\sqrt{x_2})^2 + \dots + (\sqrt{x_n})^2} \sqrt{(\sqrt{1-x_1})^2 + (\sqrt{1-x_2})^2 + \dots + (\sqrt{1-x_n})^2} \\ &= \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \sqrt{(1-x_1) + (1-x_2) + \dots + (1-x_n)} \\ &= (1) \sqrt{n - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)} = \sqrt{n-1} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{x_1(1-x_1)} + \sqrt{x_2(1-x_2)} + \dots + \sqrt{x_n(1-x_n)} \leq \sqrt{n-1}$



ตัวอย่าง 1.16.2 กำหนดให้ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ จงแสดงว่า $\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n} \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n$

แนวคิด การแก้อสมการในข้อนี้เราควรลองศึกษาจากง่ายไปยากดังนี้

1. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$

แนวคิด แบบที่ 1. $(a - b)^2 \geq 0$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$a^2 - ab + b^2 \geq ab$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b)$$

$$a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$$

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

แบบที่ 2. ให้ $x_1 = a, x_2 = b, a_1 = b, a_2 = a$

โดยใช้อสมการโคชีกับจำนวนจริง $u_i = \sqrt{a_i}, v_i = \frac{x_i}{\sqrt{a_i}}$ ทุกค่า $i = 1, 2$ จะได้ว่า

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)$$

$$\left(\sqrt{a_1} \frac{x_1}{\sqrt{a_1}} + \sqrt{a_2} \frac{x_2}{\sqrt{a_2}}\right)^2 \leq (a_1 + a_2)\left(\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2}\right)$$

$$(a + b)^2 \leq (b + a)\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right)$$

เพราะฉะนั้น $a + b \leq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$

เพื่อให้มั่นใจในแนวคิดมากขึ้น ควรลองเพิ่มเงื่อนไขเป็น 3 พจน์ดังนี้

2. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$

แนวคิด ให้ $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$ และ $a_1 = b, a_2 = c, a_3 = a$

โดยใช้อสมการโคชีกับจำนวนจริง $u_i = \sqrt{a_i}, v_i = \frac{x_i}{\sqrt{a_i}}$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$ จะได้ว่า

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$$

$$\left(\sqrt{a_1} \frac{x_1}{\sqrt{a_1}} + \sqrt{a_2} \frac{x_2}{\sqrt{a_2}} + \sqrt{a_3} \frac{x_3}{\sqrt{a_3}}\right)^2 \leq (a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3}\right)$$

$$(a + b + c)^2 \leq (b + c + a)\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)$$

เพราะฉะนั้น $a + b + c \leq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$

กรณีทั่วไปพิสูจน์ดังนี้ โดยใช้อสมการโคชีกับจำนวนจริง $u_i = \sqrt{a_i}, v_i = \frac{x_i}{\sqrt{a_i}}$ เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$ จะได้

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)$$

$$(\sqrt{a_1} \frac{x_1}{\sqrt{a_1}} + \sqrt{a_2} \frac{x_2}{\sqrt{a_2}} + \dots + \sqrt{a_n} \frac{x_n}{\sqrt{a_n}})^2 \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n})$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n})$$

เพราะฉะนั้น

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n}$$

□

หมายเหตุ เทคนิคการแก้ปัญหามาจากง่ายไปยาก ศึกษาเพิ่มเติมได้ในบทที่ 8.

1.17 เทคนิควิธี ใช้พื้นที่ใต้โค้งและการอินทิเกรต

อสมการบางรูปเราสามารถนำมาเปรียบเทียบกับพื้นที่ใต้โค้งได้ แล้วใช้ความรู้ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายเรื่องการหาพื้นที่ด้วยการอินทิเกรต ก็จะสามารถพิสูจน์อสมการที่ต้องการได้

ตัวอย่าง 1.17.1 จงแสดงว่า $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$

แนวคิด ในรูปที่ 1.17.1

ให้ $f(x) = \frac{1}{x^3}$ เมื่อ $x > 0$

เพราะฉะนั้น $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลด บนช่วง $[1, \infty)$

ให้ n เป็นจำนวนนับ

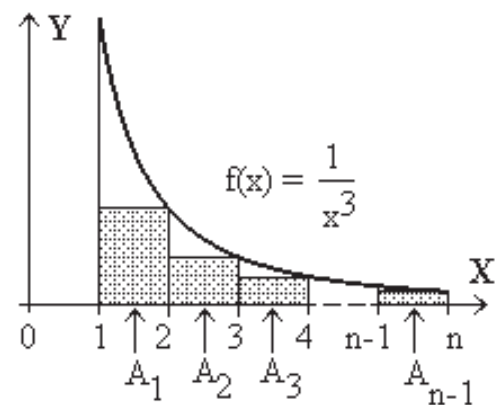
บนช่วง $[1, n]$

พื้นที่ $A_1 + \text{พื้นที่ } A_2 + \text{พื้นที่ } A_3 + \dots + \text{พื้นที่ } A_{n-1}$

$\leq$ พื้นที่ใต้โค้ง $f(x)$ กับแกน X บนช่วง $[1, n]$

$$(2-1)f(2) + (3-2)f(3) + (4-3)f(4) + \dots + (n-(n-1))f(n)$$

$$\leq \int_1^n f(x) dx$$



รูปที่ 1.17.1

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \leq \int_1^n \frac{1}{x^3} dx = \left[\frac{x^{-3+1}}{-3+1} \right]_{x=1}^{x=n} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right)$$

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

□

หมายเหตุ ในวิชา calculus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เรียกว่าอนุกรมพี

โดยที่ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ลู่เข้า เมื่อ $p > 1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ลู่ออก เมื่อ $p \leq 1$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \frac{3}{2}$$

แบบฝึกหัดบทที่ 1.

1. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \frac{a+b}{2}$
2. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ จงแสดงว่า $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$
3. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวก และ $a + b = 1$
จงแสดงว่า $(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 \geq \frac{25}{2}$
4. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก และ $abc = 1$ จงแสดงว่า $a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b} \leq 1$
5. กำหนดให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงบวก และ $x + y + z = 1$
จงแสดงว่า $(\frac{1}{x} - 1)(\frac{1}{y} - 1)(\frac{1}{z} - 1) \geq 8$
6. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ
จงแสดงว่า $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$ และ $\frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n-1})$
7. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $a^a b^b \geq a^b b^a$
8. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $a^a b^b c^c \geq a^c b^a c^b$
9. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $a^a b^b c^c \geq a^b b^c c^a$
10. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$
11. กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$
12. กำหนดให้ $a > b > c > d > 0$ และ $a + d = b + c$ จงแสดงว่า $ad < bc$
13. กำหนดให้ $0 < x < 1$ และ $0 < y < 1$ จงแสดงว่า $0 < x + y - xy < 1$
14. กำหนดให้ a, b, x, y เป็นจำนวนจริงบวก และ $a \geq b$ และ $x \geq y$
จงแสดงว่า $ax + by \geq ay + bx$
15. จงหาจำนวนจริงบวกสองจำนวนที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 39 และ ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตเท่ากับ 15
16. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $\frac{a+b+c}{1+a+b+c} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$
17. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ จงแสดงว่า $(\frac{n}{r}) \frac{1}{n^r} \leq 1$ ทุกค่า $r = 0, 1, 2, \dots, n$
18. จงแสดงว่า $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$ ทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$
19. กำหนดให้ $0 \leq x \leq y \leq 1$ จงแสดงว่า $(1-x)(1-y) \geq 1 - (x+y)$
20. กำหนดให้ $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$ จงแสดงว่า $(1-x)(1-y)(1-z) \geq 1 - (x+y+z)$
21. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$
22. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า $\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$
23. กำหนดให้ $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1)$ จงแสดงว่าข้อความต่อไปนี้มียกอย่างน้อยหนึ่งข้อความที่เป็นจริง
 $x_1 x_2 \dots x_n \leq \frac{1}{2^n}$ หรือ $(1-x_1)(1-x_2) \dots (1-x_n) \leq \frac{1}{2^n}$

24. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ

จงแสดงว่า 24.1 $(1)(3)(5) \dots (2n - 1) < n^n$

24.2 $\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a+b^n}{n+1}$ เมื่อ $a > 0$ และ $b > 0$

24.3 $n! < n^n$ ทุกค่า $n \geq 2$

25. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ จงแสดงว่า $(n + 1)^{\frac{n-1}{2}} < n!$ ทุกค่า $n \geq 2$

26. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$

27. กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)} \leq \frac{(a+b+c+d)^2}{8}$

28. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก

จงแสดงว่า 28.1 ถ้า $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ แล้ว $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{a+b+c}$

28.2 ถ้า $a + b + c = 1$ แล้ว $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq a^2 + b^2 + c^2$

29. กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ จงแสดงว่า $(x + y)^2 \geq 4xy$

30. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง n เป็นจำนวนนับ และ $0 < x < 1$

จงแสดงว่า $(1 + x)^n \leq 1 + (2^n - 1)x$

31. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $(1 + x)^n > \frac{n(n-1)}{2} x^2$ ทุกค่า $n \geq 1$

32. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ และ $n > 1$ จงแสดงว่า $(\frac{n^2}{n^2-1})^n > 1 + \frac{1}{n}$

33. กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนนับ จงแสดงว่า $(n + m)! \geq n!(n + 1)^m$

34. กำหนดให้ $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$ และ $f_1 = f_2 = 1$

จงแสดงว่า $f_n < 2^n$ ทุกจำนวนนับ n

35. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ จงแสดงว่า $n(x - 1) < x^n - 1 < n(x - 1)x^{n-1}$

36. กำหนดให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก r, s เป็นจำนวนจริงบวก และ $0 < r < s$

จงแสดงว่า $(a_1^s + a_2^s + \dots + a_n^s)^{\frac{1}{s}} \leq (a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r)^{\frac{1}{r}}$

37. กำหนดให้ t เป็นจำนวนจริง และ $0 \leq t \leq 1$

จงแสดงว่า $4t(1 - t) \leq 1$ และ สมการเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ $t = \frac{1}{2}$

38. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ และ $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1$

จงแสดงว่า $abc \geq 8$

39. กำหนดให้ $a, b, c \in (0, 1)$ และ $a + b + c = 2$

จงแสดงว่า $(\frac{a}{1-a})(\frac{b}{1-b})(\frac{c}{1-c}) \geq 8$

40. กำหนดให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงบวก และ $x + y + z = 1$

จงแสดงว่า 40.1 $(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y})(1 + \frac{1}{z}) > 8$

40.2 $(1 + x)(1 + y)(1 + z) < 8$

41. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง และ $a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 48$

จงหาค่าสูงสุดของ $a + 2b + 3c$

42. กำหนดให้ a, b, c เป็นความยาวด้านของสามเหลี่ยม ABC

จงแสดงว่า $\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{2}} \geq \max(a, b, c)$

43. จงแสดงว่า $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^4}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}}) \leq 2$

44. จงแสดงว่า $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^3}) \dots (1 + \frac{1}{2^n}) \leq \frac{5}{2}$

45. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$

46. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวก และ $a \geq b$

จงแสดงว่า $\frac{(a-b)^2}{8a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{8b}$

47. กำหนดให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $a_1 a_2 \dots a_n = G^n$

จงแสดงว่า $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq nG$

48. กำหนดให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

จงแสดงว่า $a_1 a_2 \dots a_n \leq A^n$

49. กำหนด a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+c)(b+d)}$

50. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก และ $a^2 = b^2 + c^2$

จงแสดงว่า $a^n > b^n + c^n$ ทุกค่า $n = 3, 4, 5, \dots$

51. กำหนดให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงบวก

จงแสดงว่า $\min((x-y)^2, (y-z)^2, (z-x)^2) \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$

52. กำหนดให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริง

จงแสดงว่า $\min\{(a_j - a_i)^2 \mid i \neq j\} \leq \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^n a_i^2$

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 1.

1. แนวคิด เพราะว่า $a > 0$ และ $b > 0$ เพราะฉะนั้น $2(a - b)^2 + ab \geq 0$

$$2(a^2 - 2ab + b^2) + ab \geq 0$$

$$2(a^2 - ab + b^2) - 2ab + ab \geq 0$$

$$2(a^2 - ab + b^2) \geq ab$$

$$2(a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b)$$

$$2(a^3 + b^3) \geq ab(a + b)$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \frac{a+b}{2}$$

□

2. แนวคิด แบบที่ 1. โดยอสมการ A.M. - G.M. จะได้ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$a^2 - ab + b^2 \geq ab$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b)$$

$$a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$$

แบบที่ 2. เพราะว่า $(a - b)^2 \geq 0$ เพราะฉะนั้น $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$$a^2 - ab + b^2 \geq ab$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b)$$

เพราะฉะนั้น

$$a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$$

แบบที่ 3. โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $0 \leq a \leq b$

เพราะฉะนั้น $0 \leq a^2 \leq b^2$ โดยใช้สมการเชบีเชฟ กับจำนวนจริง $a \leq b$ และ $a^2 \leq b^2$ จะได้

$$(a^2)(b) + (b^2)(a) \leq (a^2)(a) + (b^2)(b)$$

เพราะฉะนั้น

$$ab(a + b) \leq a^3 + b^3$$

□

หมายเหตุ อสมการเชบีเชฟ กล่าวไว้ที่หัวข้อ 3.10 บทที่ 3.

3. แนวคิด $(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + 2 + \frac{1}{b^2} = a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 4$

เพราะว่า

$$(a - b)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2) \geq 2ab + (a^2 + b^2)$$

$$2(a^2 + b^2) \geq a^2 + 2ab + b^2$$

$$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$$

$$2(a^2 + b^2) \geq 1$$

(เพราะว่า $a + b = 1$)

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2} \quad \dots (1)$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \geq \frac{1}{2a^2 b^2} \quad \dots (2)$

โดยอสมการ A.M. - G.M. จะได้ว่า $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
 $\frac{1}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{เพราะว่า } a + b = 1)$

$$\frac{1}{16} \geq a^2 b^2$$

$$\frac{1}{2a^2 b^2} \geq 8$$

จาก (2) จะได้ $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 8 \quad \dots (3)$

จาก (2) และ (3) จะได้ $a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 4 \geq \frac{1}{2} + 8 + 4 = \frac{25}{2}$

เพราะฉะนั้น $(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 \geq \frac{25}{2} \quad \square$

4. แนวคิด เพราะว่า $b + c < a + b + c$ เพราะฉะนั้น $a^{b+c} \leq a^{a+b+c} \quad \dots (1)$

ในทำนองเดียวกัน $b^{c+a} \leq b^{a+b+c} \quad \dots (2)$

และ $c^{a+b} \leq c^{a+b+c} \quad \dots (3)$

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ $a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b} \leq a^{a+b+c} b^{a+b+c} c^{a+b+c}$
 $= (abc)^{a+b+c}$

เพราะว่า $abc = 1$ เพราะฉะนั้น $a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b} \leq 1 \quad \square$

5. แนวคิด $(\frac{1}{x} - 1)(\frac{1}{y} - 1)(\frac{1}{z} - 1) = \frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{xyz}$
 $= \frac{1-x-y-z+xy+yz+zx-xyz}{xyz} = \frac{1-(x+y+z)+xy+yz+zx-xyz}{xyz}$
 $= \frac{1-1+xy+yz+zx-xyz}{xyz} \quad (\text{เพราะว่า } x+y+z=1)$
 $= \frac{xy+yz+zx-xyz}{xyz} \quad \dots (1)$

โดยอสมการ A.M. - H.M. จะได้ว่า $\frac{xy+yz+zx}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}}$
 $\frac{xy+yz+zx}{3} \geq \frac{3}{(\frac{x+y+z}{xyz})} = \frac{3xyz}{x+y+z} = \frac{3xyz}{1} = 3xyz$

เพราะฉะนั้น $xy + yz + zx \geq 9xyz$
 $xy + yz + zx - xyz \geq 8xyz$
 $\frac{xy + yz + zx - xyz}{xyz} \geq 8 \quad \dots (2)$

จาก (1) และ (2) จะได้ $(\frac{1}{x} - 1)(\frac{1}{y} - 1)(\frac{1}{z} - 1) \geq 8 \quad \square$

6. แนวคิด ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

เพราะฉะนั้น
$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} > 2$$

$$\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} > 2$$

$$\left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right) (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$\frac{(n+1) - n}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

เพราะฉะนั้น
$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

เพราะว่า
$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} < 2$$

$$\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} < 2$$

$$\frac{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n}} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$\frac{n - (n-1)}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

เพราะฉะนั้น
$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$
 □

7. แนวคิด โดยไม่สูญเสียความสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $a \geq b$

เพราะฉะนั้น
$$a - b \geq 0$$

เพราะฉะนั้น
$$a^{a-b} \geq b^{a-b}$$

$$a^a a^{-b} \geq b^a b^{-b}$$

$$a^a b^b \geq a^b b^a$$
 □

8. แนวคิด โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $a \geq b \geq c$

เพราะฉะนั้น $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{b}$ และ $a - c \geq b - c$ เพราะฉะนั้น $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-c} \geq \left(\frac{c}{b}\right)^{b-c}$

$$a^{a-c} b^{-a+c} \geq c^{b-c} b^{-b+c}$$

$$a^{a-c} b^{-a+c+b-c} c^{-b+c} \geq 1$$

$$a^a b^b c^c \geq a^c b^a c^b$$
 □

หมายเหตุ ในทำนองเดียวกันเราสามารถสรุปได้ว่า

$$a^a b^b c^c \geq a^c b^a c^b$$

$$a^a b^b c^c \geq a^c b^b c^a$$

$$a^a b^b c^c \geq a^b b^a c^c$$

เพราะฉะนั้น $a^a b^b c^c \geq a^{x_1} b^{x_2} c^{x_3}$ เมื่อ (x_1, x_2, x_3) เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ (a, b, c)

9. แนวคิด โดยไม่สูญเสียความสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $a \geq b \geq c$

แบบที่ 1. ให้ $a = c + x$ และ $b = c + y$ เพราะฉะนั้น $x \geq y \geq 0$

$$(c + x)y \geq 0$$

$$xy \geq -cy$$

$$cx + xy \geq cx - cy$$

$$x(c + y) \geq c(x - y)$$

$$\frac{x}{c} \geq \frac{x-y}{c+y}$$

$$1 + \frac{x}{c} \geq 1 + \frac{x-y}{c+y}$$

$$\frac{c+x}{c} \geq \frac{c+x}{c+y}$$

$$\left(\frac{c+x}{c}\right)^x \geq \left(\frac{c+x}{c+y}\right)^y$$

$$(c+x)^x (c+y)^y \geq c^x (c+x)^y$$

$$(c+x)^x (c+x)^c (c+y)^y (c+y)^c c^c \geq c^x (c+x)^c (c+x)^y (c+y)^c c^c$$

$$(c+x)^{c+x} (c+y)^{c+y} c^c \geq (c+x)^{c+y} (c+y)^c c^{c+x}$$

เพราะฉะนั้น

$$a^a b^b c^c \geq a^b b^c c^a$$

แบบที่ 2. เพราะว่า $a \geq b \geq c$ เพราะฉะนั้น $ab \geq ac$, $\frac{a}{c} \geq \frac{a}{b}$ และ $a - c \geq b - c$

เพราะฉะนั้น

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^{b-c}$$

$$a^{a-c} c^{-a+c} \geq a^{b-c} b^{-b+c}$$

$$a^{a-c-b+c} b^{b-c} c^{-a+c} \geq 1$$

$$a^{a-b} b^{b-c} c^{-a+c} \geq 1$$

$$a^a b^b c^c \geq a^b b^c c^a$$

□

10. แนวคิด เพราะว่า

$$a^a b^b c^c \geq a^a b^b c^c$$

$$a^a b^b c^c \geq a^b b^c c^a$$

$$a^a b^b c^c \geq a^c b^a c^b$$

เพราะฉะนั้น

$$(a^a b^b c^c)^3 \geq a^{a+b+c} b^{a+b+c} c^{a+b+c}$$

$$(a^a b^b c^c)^3 \geq (abc)^{a+b+c}$$

เพราะฉะนั้น

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

□

11. แนวคิด เพราะว่า x และ y เป็นจำนวนจริงบวก เพราะฉะนั้น $x + y \geq 0$ และ $(x - y)^2 \geq 0$

เพราะฉะนั้น

$$(x + y)(x - y)^2 \geq 0$$

$$(x + y)(x - y)(x - y) \geq 0$$

$$(x^2 - y^2)(x - y) \geq 0$$

$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 \geq 0$$

$$x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} &\geq x + y \\
\frac{x^2}{y} + 2\sqrt{xy} + \frac{y^2}{x} &\geq x + 2\sqrt{xy} + y \\
\frac{x^2}{y} + 2\sqrt{\frac{x^2}{y}}\sqrt{\frac{y^2}{x}} + \frac{y^2}{x} &\geq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \\
\left(\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}}\right)^2 &\geq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \\
\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} &\geq \sqrt{x} + \sqrt{y}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

□

12. แนวคิด เพราะว่า $a > b > c > d > 0$ และ $a + d = b + c$

เพราะฉะนั้น $c - d = a - b$, $a - b > 0$ และ $-a - b + c + d = (c - a) + (d - b) < 0$... (1)

เพราะฉะนั้น $(a + d)^2 = (b + c)^2$

$$a^2 + 2ad + d^2 = b^2 + 2bc + c^2$$

$$2ad - 2bc = b^2 + c^2 - a^2 - d^2 = (b^2 - a^2) + (c^2 - d^2)$$

$$= (b^2 - a^2) + (c - d)(c + d)$$

$$= (b^2 - a^2) + (a - b)(c + d)$$

(จาก (1))

$$= (b - a)(b + a) + (a - b)(c + d) = (a - b)(-(b + a) + (c + d))$$

$$= (a - b)(-a - b + c + d)$$

$$< 0$$

(จาก (1))

เพราะฉะนั้น

$$2ad < 2bc$$

$$ad < bc$$

□

13. แนวคิด เพราะว่า $0 < x < 1$ และ $0 < y < 1$

เพราะฉะนั้น $1 - x > 0$ และ $1 > y$ เพราะฉะนั้น $(1 - x)(1) > (1 - x)y$

$$1 - x > y - xy$$

$$1 > x + y - xy$$

... (1)

เพราะว่า $0 < x < 1$ และ $0 < y < 1$ เพราะฉะนั้น $0 < 1 - x < 1$ และ $0 < 1 - y < 1$

$$0 < (1 - x)(1 - y) < 1$$

$$0 < 1 - y - x + xy < 1$$

$$0 > x + y - xy - 1 > -1$$

$$x + y - xy > 0$$

... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $0 < x + y - xy < 1$

□

14. แนวคิด กำหนด $a \geq b$ และ $x \geq y$ เพราะฉะนั้น $a - b \geq 0$

$$(a - b)x \geq (a - b)y$$

$$ax - bx \geq ay - by$$

เพราะฉะนั้น

$$ax + by \geq ay + bx$$

□

15. แนวคิด ให้ $x > 0$ และ $y > 0$ เป็นจำนวนที่มี ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 39 และ ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต = 15

เพราะฉะนั้น $\frac{x+y}{2} = 39$ และ $\sqrt{xy} = 15$ เพราะฉะนั้น $x + y = 78$ และ $xy = 225$

เพราะฉะนั้น

$$x(78 - x) = 225$$

$$x^2 - 78x + 225 = 0$$

$$(x - 3)(x - 75) = 0$$

$$x = 3, 75$$

เพราะฉะนั้นจำนวนสองจำนวน คือ 3 และ 75

□

16. แนวคิด

$$\frac{a+b+c}{1+a+b+c} = \frac{a}{1+a+b+c} + \frac{b}{1+a+b+c} + \frac{c}{1+a+b+c}$$

$$\leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

□

17. แนวคิด ให้ n เป็นจำนวนนับ และ $r \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$

$$\text{เพราะว่า } \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-r+1)(n-r+2)(n-r+3)\dots(n-1)n}{r!}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \binom{n}{r} \frac{1}{n^r} = \frac{1}{r!} \left(\frac{n-r+1}{n} \right) \left(\frac{n-r+2}{n} \right) \left(\frac{n-r+3}{n} \right) \dots \left(\frac{n-1}{n} \right) (1) \leq 1$$

$$\text{เพราะว่า } \binom{n}{0} \frac{1}{n^0} = 1 \text{ และ } \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \leq 1 \text{ เพราะฉะนั้น } \binom{n}{r} \frac{1}{n^r} \leq 1 \text{ ทุกค่า } r = 0, 1, 2, \dots, n$$

□

18. แนวคิด ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$ ”

(1) การแสดงว่า $P(2)$ เป็นจริง

$$\text{เพราะว่า } \sqrt[2]{2!} = \sqrt{2} \geq \sqrt{2} \text{ เพราะฉะนั้น } P(2) \text{ เป็นจริง}$$

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 2$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 2$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sqrt[k]{k!} \geq \sqrt{k} \text{ เพราะฉะนั้น } (k!)^{\frac{1}{k}} \geq k^{\frac{1}{2}} \text{ และ } k! \geq k^{\frac{k}{2}}$$

$$\text{เพราะว่า } \binom{n}{r} \frac{1}{n^r} \leq 1 \text{ ทุกค่า } r = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } \binom{k}{0} + \binom{k}{1} \frac{1}{k} + \binom{k}{2} \frac{1}{k^2} + \dots + \binom{k}{k} \frac{1}{k^k} &\leq 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \\ &= 1 + k \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq 1 + k$$

$$(k+1)^k \leq (1+k)k^k$$

$$k^k \geq (k+1)^{k-1}$$

$$k^{\frac{k}{2}} \geq (k+1)^{\frac{k-1}{2}}$$

$$(k+1)\left(k^{\frac{k}{2}}\right) \geq (k+1)(k+1)^{\frac{k-1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } k! &\geq k^{\frac{k}{2}} \text{ เพราะฉะนั้น} & (k+1)(k!) &\geq (k+1)^{\frac{k+1}{2}} \\ & & (k+1)! &\geq (k+1)^{\frac{k+1}{2}} \\ & & k+1\sqrt{(k+1)!} &\geq \sqrt{k+1} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \geq 2$ □

19. แนวคิด ให้ x, y เป็นจำนวนจริง และ $0 \leq x \leq y \leq 1$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } xy &\geq 0 \text{ เพราะฉะนั้น} & 1-x-y+xy &\geq 1-x-y \\ & & (1-x)-y(1-x) &\geq 1-(x+y) \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad (1-x)(1-y) \geq 1-(x+y) \quad \square$$

20. แนวคิด กำหนดให้ x, y, z เป็นจำนวนจริง และ $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } z &\leq 1 \text{ เพราะฉะนั้น} & xyz &\leq xy \\ \text{และจะได้} & & xyz &\leq xy + yz + zx \end{aligned}$$

$$xy + yz + zx - xyz \geq 0$$

$$1-x-y-z+xy+yz+zx-xyz \geq 1-x-y-z$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad (1-x)(1-y)(1-z) \geq 1-(x+y+z) \quad \square$$

21. แนวคิด แบบที่ 1. ให้ x เป็นจำนวนจริง เพราะว่ามี $x^4 \geq 0$

$$x^4 + 4x^2 + 4 \geq 4x^2 + 4$$

$$(x^2 + 2)^2 \geq 4(x^2 + 1)$$

$$x^2 + 2 \geq 2\sqrt{x^2 + 1}$$

$$\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$$

แบบที่ 2. ให้ $a = x^2 + 1$ และ $b = 1$ โดยอสมการ A.M. - G.M. จะได้ $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad \sqrt{x^2 + 1} \leq \frac{(x^2 + 1) + 1}{2}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad 2 \leq \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \square$$

22. แนวคิด แบบที่ 1. ให้ x เป็นจำนวนจริง เพราะว่ามี $(x^2 - 1)^2 \geq 0$

$$x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0$$

$$x^4 + 1 \geq 2x^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad \frac{1}{2} \geq \frac{x^2}{x^4 + 1}$$

แบบที่ 2. ให้ $a = x^4$, $b = 1$ โดยอสมการ A.M. - G.M. จะได้ว่า $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

เพราะฉะนั้น
$$\sqrt{x^4} \leq \frac{x^4+1}{2}$$
$$\frac{x^2}{x^4+1} \leq \frac{1}{2}$$

□

23. แนวคิด เพราะว่า ทุกจำนวนจริง a จะได้ $(2a - 1)^2 \geq 0$

$$4a^2 - 4a + 1 \geq 0$$

$$4a - 4a^2 \leq 1$$

$$a(1 - a) \leq \frac{1}{4}$$

$$a(1 - a) \leq \frac{1}{2^2}$$

เพราะฉะนั้น $x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) \dots x_n(1 - x_n) \leq \left(\frac{1}{2^2}\right)^n$

$$(x_1 x_2 \dots x_n)((1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n)) \leq \left(\frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{1}{2^n}\right) \dots (1)$$

ถ้า $x_1 x_2 \dots x_n > \frac{1}{2^n}$ และ $(1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n) > \frac{1}{2^n}$

แล้ว $(x_1 x_2 \dots x_n)((1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n)) > \left(\frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{1}{2^n}\right)$ ขัดแย้งกับ (1)

เพราะฉะนั้น $x_1 x_2 \dots x_n \leq \frac{1}{2^n}$ หรือ $(1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n) \leq \frac{1}{2^n}$

□

24. แนวคิด 24.1 เพราะว่า 1, 3, 5, ..., $2n - 1$ เป็นจำนวนจริง n จำนวน

โดยใช้อสมการ A.M. - G.M. กับจำนวนจริง 1, 3, 5, ..., $2n - 1$ จะได้ว่า

$$\sqrt[n]{(1)(3)(5) \dots (2n-1)} \leq \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{n}{2} (1 + (2n - 1)) \right) = n$$

เพราะฉะนั้น $(1)(3)(5) \dots (2n-1) \leq n^n$

24.2 เพราะว่า a และ $b, b, b, \dots, b$ จำนวน n ตัว เป็นจำนวนจริงบวกทั้งหมด $n + 1$ ตัว

โดยใช้อสมการ A.M. - G.M. กับจำนวนจริง a จำนวน 1 ตัว และ $b, b, b, \dots, b$ จำนวน n ตัว จะได้

$$\sqrt[n+1]{abbb \dots b} \leq \frac{a+b+b+b+\dots+b}{n+1}$$

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a+nb}{n+1}$$

24.3 แบบที่ 1. เพราะว่า $1 < n$

$$2 < n$$

:

$$n - 1 < n$$

$$n \leq n$$

เพราะฉะนั้น $n! < n^n$ ทุกค่า $n = 2, 3, 4, \dots$

แบบที่ 2. สมมติ $P(n)$ แทนข้อความ “ $n! < n^n$ ”

(1) การแสดงว่า $P(2)$ เป็นจริง

เพราะว่า $2! = 2 < 4 = 2^2$ เพราะฉะนั้น $P(2)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 2$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 2$ เพราะฉะนั้น $k! < k^k$

เพราะว่า $(k+1)! = k!(k+1) < k^k(k+1) < (k+1)^k(k+1) = (k+1)^{k+1}$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า n □

25. แนวคิด $P(n)$ แทนข้อความ “ $(n+1)^n < n!(n+1)!$ ”

(1) การแสดงว่า $P(2)$ เป็นจริง

เพราะว่า $(2+1)^2 = 9 < 2! \cdot 3!$ เพราะฉะนั้น $P(2)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เพราะฉะนั้น $(k+1)^k < k!(k+1)!$... (1)

$$\begin{aligned} ((k+1)+1)^{k+1} &= ((k+1)+1)^k ((k+1)+1) = ((k+1)+1)^k (k+2) \\ &= ((k+1)^k + \binom{k}{1}(k+1)^{k-1} + \binom{k}{2}(k+1)^{k-2} + \dots + 1)(k+2) \\ &< ((k+1)^k + (k+1)^k + (k+1)^k + \dots + (k+1)^k)(k+2) \\ &= (k+1)^k (1+1+1+\dots+1)(k+2) \\ &= (k+1)^k (k+1)(k+2) \\ &< k!(k+1)!(k+1)(k+2) \quad \text{(จาก (1))} \\ &= (k+1)!(k+2)! \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \geq 2$

เพราะฉะนั้น $(n+1)^n < n!(n+1)!$ ทุกค่า $n = 2, 3, 4, \dots$
 $= n!n!(n+1)$

$$(n+1)^{n-1} < (n!)^2$$

$$(n+1)^{\frac{n-1}{2}} < n! \quad \text{ทุกค่า } n = 2, 3, 4, \dots$$

หมายเหตุ การแสดงว่า $\binom{k}{r}(k+1)^{k-r} \leq (k+1)^k$

เพราะว่า $\binom{k}{r} = \frac{k!}{r!(k-r)!}$ เมื่อ $r = 1, 2, 3, \dots, k$

$$\begin{aligned} &= \frac{(k-r+1)(k-r+2)\dots k}{(1)(2)\dots r} = (k-r+1)\left(\frac{k-r+2}{2}\right)\dots\left(\frac{k}{r}\right) \\ &< (k+1)(k+1)\dots(k+1) = (k+1)^r \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\binom{k}{r}(k+1)^{k-r} \leq (k+1)^r (k+1)^{k-r} = (k+1)^k$ □

26. แนวคิด เพราะว่ $(a-b)^2 \geq 0$ เพราะฉะนั้น $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{4ab}{a+b} \leq a+b$$

ในทำนองเดียวกัน $\frac{4bc}{b+c} \leq b+c$, $\frac{4ca}{c+a} \leq c+a$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{4ab}{a+b} + \frac{4bc}{b+c} + \frac{4ca}{c+a} \leq 2(a+b+c)$$

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$$

□

27. แนวคิด ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวก เพราะว่า $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ ทุกจำนวนจริงบวก x, y

ให้ $x = ad + bc$ และ $y = ab + cd$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } \sqrt{(ad+bc)(ab+cd)} &\leq \frac{(ad+bd) + (ab+cd)}{2} \\ 2\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)} &\leq ad+bc+ab+cd \end{aligned} \quad \dots (1)$$

$$\text{เพราะว่า } (a-b+c-d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd$$

$$\text{และ } (a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } (a+b+c+d)^2 - (a-b+c-d)^2 = 4ab + 4ad + 4bc + 4cd \quad \dots (2)$$

$$\begin{aligned} \text{จาก (1) จะได้ } 8\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)} &\leq 4(ab+ad+bc+cd) \\ &= (a+b+c+d)^2 - (a-b+c-d)^2 \quad (\text{จาก (2)}) \\ &\leq (a+b+c+d)^2 \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sqrt{(ad+bc)(ab+cd)} \leq \frac{(a+b+c+d)^2}{8} \quad \square$$

28. แนวคิด 28.1 เพราะว่า $\frac{a^2}{b+c} \geq \frac{a^2}{a+b+c}$, $\frac{b^2}{c+a} \geq \frac{b^2}{a+b+c}$, $\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{c^2}{a+b+c}$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2}{a+b+c} + \frac{b^2}{a+b+c} + \frac{c^2}{a+b+c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \quad \dots (1)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น ถ้า } a^2 + b^2 + c^2 = 1 \text{ แล้ว } \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{a+b+c}$$

$$28.2 \text{ จาก (1) เมื่อ } a+b+c=1 \text{ จะได้ } \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น ถ้า } a+b+c=1 \text{ แล้ว } \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq a^2 + b^2 + c^2 \quad \square$$

29. แนวคิด แบบที่ 1. เพราะว่า $(x-y)^2 \geq 0$ เพราะฉะนั้น $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$$

$$(x+y)^2 \geq 4xy$$

แบบที่ 2. โดยใช้สมการ A.M. - G.M. กับจำนวนจริงบวก x, y จะได้ $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } (x+y)^2 \geq 4xy \quad \square$$

30. แนวคิด ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ $(1 + x)^n \leq 1 + (2n - 1)x$ ”

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $(1 + x)^1 = 1 + x = 1 + (2^1 - 1)x$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว $P(k + 1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ เพราะฉะนั้น $(1 + x)^k \leq 1 + (2^k - 1)x$

$$\begin{aligned} (1 + x)^{k+1} &= (1 + x)(1 + x)^k && \leq (1 + x)(1 + (2^k - 1)x) \\ &= (1 + x) + (1 + x)(2^k - 1)x \\ &= (1 + x) + 2(2^k - 1)x && \text{(เพราะว่า } 0 < x < 1 \text{ เพราะฉะนั้น } 1 + x < 2) \\ &= (1 + x) + (2^{k+1} - 1)x - x && = 1 + (2^{k+1} - 1)x \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $P(k + 1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \geq 1$ □

31. แนวคิด $(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n > \binom{n}{2}x^2 = \frac{n(n-1)}{2}x^2$ □

32. แนวคิด เพราะว่า $n^2 > n^2 - 1$ เพราะฉะนั้น $\frac{n}{n^2-1} > \frac{1}{n}$... (1)

$$\begin{aligned} \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n &= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{n^2-1}\right) + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n^2-1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n^2-1}\right)^n \\ &> 1 + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{n^2-1}\right) = 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n} \quad \text{(จาก (1))} \end{aligned} \quad \square$$

33. แนวคิด $(n + m)! = n!(n + 1)(n + 2) \dots (n + m) \geq n!(n + 1)(n + 1) \dots (n + 1)$
 $\geq n!(n + 1)^m$ □

34. แนวคิด ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ $f_n < 2^n$ ”

(1) การแสดงว่า $P(1)$ และ $P(2)$ เป็นจริง

เพราะว่า $f_1 = 1 < 2$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $f_2 = 1 < 2^2$ เพราะฉะนั้น $P(2)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ เมื่อ $n \geq 3$ แล้ว $P(n)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ เมื่อ $n \geq 3$

เพราะฉะนั้น $f_k < k^2$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} < 2^{n-1} + 2^{n-2} < 2^{n-2}(2 + 1) \\ &< 2^{n-2}(3) < 2^{n-2}(4) < 2^{n-2}2^2 = 2^n \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $P(n)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \geq 1$

เพราะฉะนั้น $f_n < 2^n$ ทุกจำนวนนับ n □

หมายเหตุ จำนวน f_n เรียกว่า Fibonacci number

35. แนวคิด เพราะว่า $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$

เพราะฉะนั้น $\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$

เพราะว่า $1 < x$ เพราะฉะนั้น $1 < x^i < x^{n-1}$ ทุกค่า $i = 1, 2, \dots, n - 1$

เพราะฉะนั้น $1 + 1 + \dots + 1 + 1 < x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 < x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}$
 $n < x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 < n x^{n-1}$
 $n < \frac{x^n - 1}{x - 1} < n x^{n-1}$

เพราะว่า $x - 1 > 0$ เพราะฉะนั้น $n(x - 1) < x^n - 1 < n(x - 1)x^{n-1}$ □

36. แนวคิด แบบที่ 1.
$$\frac{(\sum_{i=1}^n a_i^s)^{\frac{1}{s}}}{(\sum_{j=1}^n a_j^r)^{\frac{1}{r}}} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^s}{(\sum_{j=1}^n a_j^r)^{\frac{s}{r}}} \right)^{\frac{1}{s}} = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i^r}{\sum_{j=1}^n a_j^r} \right)^{\frac{s}{r}} \right)^{\frac{1}{s}} \dots (1)$$

เพราะว่า $0 < r < s$ เพราะฉะนั้น $1 < \frac{s}{r}$ เพราะว่า $\frac{a_i^r}{\sum_{j=1}^n a_j^r} < 1$ เพราะฉะนั้น $\left(\frac{a_i^r}{\sum_{j=1}^n a_j^r} \right)^{\frac{s}{r}} \leq \frac{a_i^r}{\sum_{j=1}^n a_j^r} \dots (2)$

จาก (1) และ (2) จะได้
$$\frac{(\sum_{i=1}^n a_i^s)^{\frac{1}{s}}}{(\sum_{j=1}^n a_j^r)^{\frac{1}{r}}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^r}{\sum_{j=1}^n a_j^r} \right)^{\frac{1}{s}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i^r}{\sum_{j=1}^n a_j^r} \right)^{\frac{1}{s}} = 1^{\frac{1}{s}} = 1$$

เพราะฉะนั้น $(\sum_{i=1}^n a_i^s)^{\frac{1}{s}} \leq (\sum_{i=1}^n a_i^r)^{\frac{1}{r}}$

แบบที่ 2. ใช้เทคนิควิธี normalize กรณีที่ 1. $\sum_{i=1}^n a_i^r = 1$ เพราะฉะนั้น $a_i \leq 1$ ทุกค่า $i = 1, 2, \dots, n$

เพราะฉะนั้น $a_i^s \leq a_i^r$ เมื่อ $0 < r < s$

$$\sum_{i=1}^n a_i^s \leq \sum_{i=1}^n a_i^r = 1$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq (1)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

กรณีที่ 2. $\sum_{i=1}^n a_i^r > 1$ ให้ $X = \left(\sum_{i=1}^n a_i^r \right)^{\frac{1}{r}}$ และ $A_i = \frac{a_i}{X}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^n A_i^r = 1$ จากกรณีที่ 1. จะได้ $\left(\sum_{i=1}^n A_i^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{i=1}^n A_i^r \right)^{\frac{1}{r}}$

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^s}{X^s} \right)^{\frac{1}{s}} \leq 1$$

$$\frac{1}{X} \left(\sum_{i=1}^n a_i^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq 1$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq X = \left(\sum_{i=1}^n a_i^r \right)^{\frac{1}{r}} \quad \square$$

37. แนวคิด ให้ $0 \leq t \leq 1$ โดยอสมการ A.M. - G.M. จะได้ $\sqrt{t(1-t)} \leq \frac{t+(1-t)}{2} = \frac{1}{2} \quad \dots (1)$

เพราะฉะนั้น $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$ ซึ่งจะได้ว่า $4t(1-t) \leq 1$

สมการ (1) เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ $t = 1 - t$ เพราะฉะนั้น $t = \frac{1}{2} \quad \square$

38. แนวคิด ให้ $x = \frac{1}{1+a}, y = \frac{1}{1+b}, z = \frac{1}{1+c}$ เพราะฉะนั้น $x + y + z = 1$

จากข้อ 5. จะได้ $\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right)\left(\frac{1}{z} - 1\right) \geq 8 \quad \dots (1)$

เพราะว่า $\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right)\left(\frac{1}{z} - 1\right) = ((1+a) - 1)((1+b) - 1)((1+c) - 1) = abc \quad \dots (2)$

จาก (1) และ (2) จะได้ $abc \geq 8 \quad \square$

40. แนวคิด 40.1 โดยอสมการ A.M. - G.M. กับจำนวนจริงบวก x จะได้ $x + \frac{1}{x} > 2\sqrt{(x)\left(\frac{1}{x}\right)} = 2$

เพราะว่า x, y, z เป็นจำนวนจริงบวก และ $x + y + z = 1$

เพราะฉะนั้น $1 > x$ เพราะฉะนั้น $1 + \frac{1}{x} > x + \frac{1}{x} > 2 \quad \dots (1)$

ในทำนองเดียวกัน $1 + \frac{1}{y} > y + \frac{1}{y} > 2 \quad \dots (2)$

$1 + \frac{1}{z} > z + \frac{1}{z} > 2 \quad \dots (3)$

เพราะฉะนั้นจาก (1), (2) และ (3) จะได้ว่า $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) > 8$

40.2 เพราะว่ $1 + x < 2, 1 + y < 2, 1 + z < 2$ เพราะฉะนั้น $(1+x)(1+y)(1+z) < 8 \quad \square$

41. แนวคิด $(a + 2b + 3c)^2 = a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 2((a)(2b) + (a)(3c) + (2b)(3c))$
 $= 48 + 2((a)(2b) + (a)(3c) + (2b)(3c)) \quad \dots (1)$

เพราะว่า $(x - y)^2 \geq 0$ เพราะฉะนั้น $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

$x^2 + y^2 \geq 2xy$ ทุกจำนวนจริง x, y

เพราะฉะนั้น $a^2 + (2b)^2 \geq 2(a)(2b) \quad \dots (2)$

$a^2 + (3c)^2 \geq 2(a)(3c) \quad \dots (3)$

$(2b)^2 + (3c)^2 \geq 2(a)(2b) \quad \dots (4)$

เพราะฉะนั้น $2(a^2 + 4b^2 + 9c^2) \geq 2((a)(2b) + (a)(3c) + (2b)(3c))$

$2(48) \geq 2((a)(2b) + (a)(3c) + (2b)(3c)) \quad \dots (5)$

จาก (1) และ (5) จะได้ $(a + 2b + 3c)^2 \leq 48 + 2(48) = 144$

เพราะฉะนั้น $a + 2b + 3c \leq 12 \quad \dots (6)$

สมการ (6) เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ สมการ (5) เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ สมการ (2), (3) และ (4) เป็นจริง

ก็ต่อเมื่อ $a = 2b = 3c$

เพราะว่า $a + 2b + 3c = 12$ และ $a = 2b = 3c$ เพราะฉะนั้น $a = 4, b = 2$ และ $c = \frac{4}{3}$

เพราะฉะนั้น $a + 2b + 3c$ มีค่าสูงสุด $= 12$ เมื่อ $a = 4, b = 2$ และ $c = \frac{4}{3}$

□

42. แนวคิด โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $a \geq b \geq c$

เพราะว่า a, b, c เป็นความยาวด้านของสามเหลี่ยม เพราะฉะนั้น $b + c > a$ และ $b + c - a > 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2}(b + c - a)((a + b)^2 + (a + c)^2 + (b - c)^2) \geq 0$

โดยการกระจายพจน์ของ $\frac{1}{2}(b + c - a)((a + b)^2 + (a + c)^2 + (b - c)^2)$ จะได้

$$\frac{1}{2}(b + c - a)((a + b)^2 + (a + c)^2 + (b - c)^2) = (-a)^3 + b^3 + c^3 - 3(-a)bc$$

เพราะฉะนั้น $(-a)^3 + b^3 + c^3 - 3(-a)bc \geq 0$

$$-a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq 0$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq 2a^3$$

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{2} \geq a^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{2}} \geq \sqrt[3]{a^3} = a = \max(a, b, c)$$

เบื้องหลังการทดสอบ โดยการพิสูจน์แบบย้อนกลับ สมมติ $\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{2}} \geq a$

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{2} \geq a^3$$

$$-a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq 0$$

$$(-a)^3 + b^3 + c^3 - 3(-a)bc \geq 0 \quad \dots (1)$$

เพราะฉะนั้นหากเราแสดงได้ว่า (1) เป็นจริง แล้วเขียนพิสูจน์แบบย้อนกลับก็จะได้ผลตามต้องการ

□

43. แนวคิด $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^4}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}})$

$$= \frac{1}{(1 - \frac{1}{2})} (1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^4}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}})$$

$$= 2(1 - \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^4}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}}) = 2(1 - \frac{1}{2^4})(1 + \frac{1}{2^4}) \dots (1 + \frac{1}{2^{2^n}})$$

:

$$= 2(1 - \frac{1}{2^{2^{n+1}}}) < 2$$

□

44. แนวคิด ให้ $L(n) = \frac{5}{2}(1 - \frac{1}{2^n})$ และ $R(n) = (1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{2^3}) \dots (1 + \frac{1}{2^n})$

(1) การแสดงว่า $L(1) \geq R(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $L(1) = \frac{5}{2}(1 - \frac{1}{2}) = 5$ และ $R(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ เพราะฉะนั้น $L(1) \geq R(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า $\frac{L(n+1)}{L(n)} \geq \frac{R(n+1)}{R(n)}$ เป็นจริง

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2^n}} = \frac{2^{n+1} - 1}{2(2^n - 1)} \quad \text{และ} \quad \frac{R(n+1)}{R(n)} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} + 1}{2^{n+1}}$$

$$\text{เพราะว่า } \frac{L(n+1)}{L(n)} - \frac{R(n+1)}{R(n)} = \frac{2^{n+1} - 1}{2(2^n - 1)} - \frac{2^{n+1} + 1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}(2^{n+1} - 1) - 2(2^n - 1)(2^{n+1} + 1)}{2(2^n - 1)2^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } 2^{n+1}(2^{n+1} - 1) - 2(2^n - 1)(2^{n+1} + 1) &= 2^{2n+2} - 2^{n+1} - 2(2^{2n+1} + 2^n - 2^{n+1} - 1) \\ &= 2^{2n+2} - 2^{n+1} - 2^{2n+2} - 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2 = 2 > 0 \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{L(n+1)}{L(n)} \geq \frac{R(n+1)}{R(n)} \text{ เป็นจริง}$$

โดยบทประยุกต์ของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แบบที่ 1. จะได้ว่า $L(n) \geq R(n)$ ทุกค่า $n \geq 1$ □

45. แนวคิด กรณีที่ 1. $ab \geq 0$ จะได้ $|a + b| = |a| + |b|$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 1 + |a + b| = 1 + |a| + |b| > 1 + |a| \quad \text{และ} \quad 1 + |a + b| = 1 + |a| + |b| > 1 + |b|$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{|a|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} \quad \text{และ} \quad \frac{|b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|b|}{1 + |b|}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{|a + b|}{1 + |a + b|} = \frac{|a| + |b|}{1 + |a + b|} = \frac{|a|}{1 + |a + b|} + \frac{|b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}$$

$$\text{กรณีที่ 2. } ab < 0 \quad \text{เพราะฉะนั้น } |a + b| < |a| \quad \text{และ} \quad \frac{|a|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{|a + b|}{1 + |a + b|} < \frac{|a|}{1 + |a + b|} < \frac{|a|}{1 + |a|} < \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|} \quad \square$$

$$\begin{aligned} \text{46. แนวคิด} \quad \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab})(\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab})}{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}} = \frac{(\frac{a+b}{2})^2 - ab}{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}} = \frac{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - ab}{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2(a+b+2\sqrt{ab})} = \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \quad \dots (1) \end{aligned}$$

เพราะว่า $b \leq a$ เพราะฉะนั้น

$$2\sqrt{b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{a}$$

$$4b \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leq 4a$$

$$8b \leq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leq 8a$$

$$\frac{1}{8a} \leq \frac{1}{2(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \leq \frac{1}{8b}$$

$$\frac{(a-b)^2}{8a} \leq \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} \leq \frac{(a-b)^2}{8b} \quad \dots (2)$$

$$\text{จาก (1) และ (2) จะได้} \quad \frac{(a-b)^2}{8a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{8b} \quad \square$$

47. แนวคิด ให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก และ ให้ $G = \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n}$

ขั้นตอนเริ่มต้น พิจารณาค่าของ $a_1, a_2, \dots, a_n$

ขั้นที่ 1. $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ เพราะฉะนั้น $a_i = G$ ทุกค่า i เพราะฉะนั้น $a_1 + a_2 + \dots + a_n = nG$

ขั้นที่ 2. $a_1, a_2, \dots, a_n$ ไม่เท่ากันทุกตัว ให้เปลี่ยนลำดับของ a_i เพื่อให้ค่าของ a_1, a_2 มีค่าเป็น

$$a_1 = \min(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{และ} \quad a_2 = \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$$