

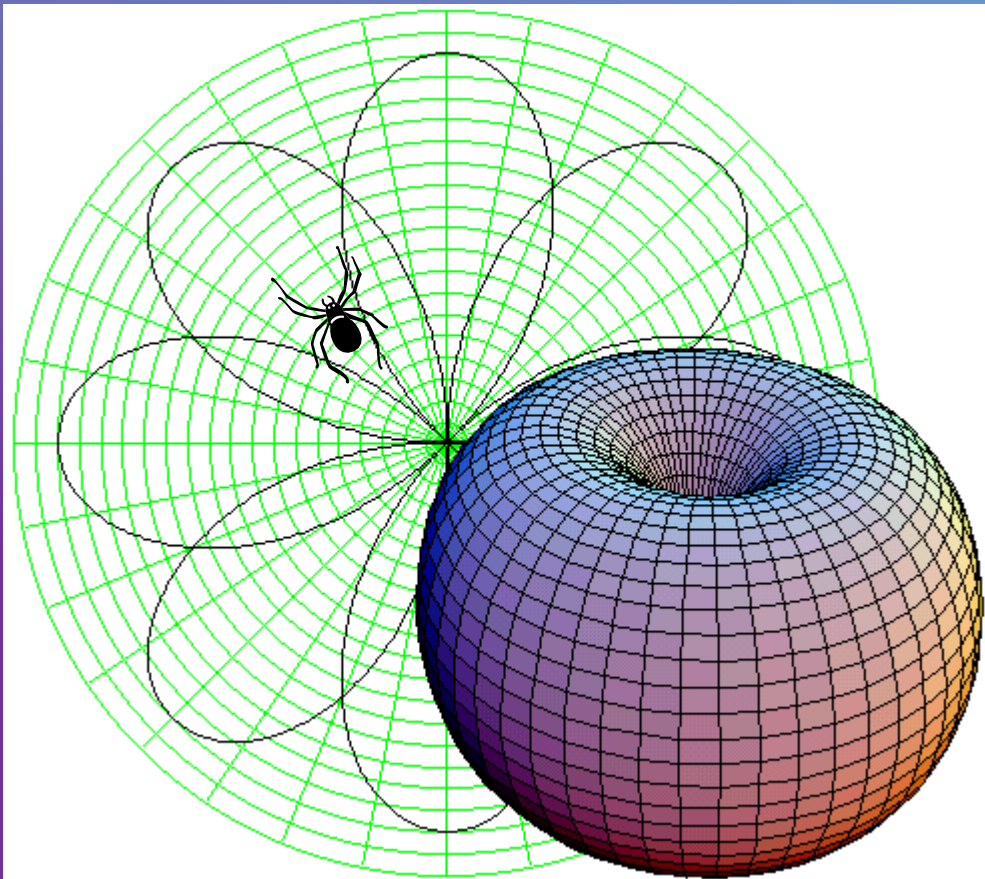
เทคนิคการทำข้อสอบโดยใช้ วิธีตัดตัวเลือก VS. วิธีจริง

คณิตศาสตร์ปรัณัย เล่มที่ 25

คู่มือตัดตัวเลือก

ข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ปลาย

ฉบับสมบูรณ์



รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คู่มือตัดตัวเลือก

ข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ปลาย

ฉบับสมบูรณ์

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<http://www.math.sc.chula.ac.th>

<http://www.math.sc.chula.ac.th/~tdumrong/homepage>

<http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~tdumrong/homepage>

ชื่อหนังสือ : คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 25 คู่มือตัดตัวเลือก ข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ปลาย ฉบับสมบูรณ์

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 2

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : มีนาคม พ.ศ. 2560

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

ISBN (e-book) : 978-616-429-839-2

พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

ข้อสอบคณิตศาสตร์ที่สามารถหาคำตอบโดยวิธีตัดตัวเลือกมีมานานหลายปีแล้ว คาดว่าตั้งแต่มีการเปลี่ยนแปลงวิธีสอบวัดผล จากข้อสอบอัตนัยมาเป็นข้อสอบแบบปรนัย หนังสือ คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 1 (พ.ศ. 2537) เป็นเล่มแรกที่คุณเขียนได้ชี้ให้เห็นว่าข้อสอบ ENTRANCE คณิตศาสตร์ ก. และคณิตศาสตร์ กข. 2537 มีข้อสอบหลายข้อที่หาคำตอบได้โดยวิธีตัดตัวเลือก จนหมดยุคของข้อสอบคณิตศาสตร์ ก. คณิตศาสตร์ กข. เมื่อเข้าสู่วิธีสอบ Admission ก็ยังมีข้อสอบที่หาคำตอบได้โดยวิธีตัดตัวเลือก

หนังสือคณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 25 คู่มือตัดตัวเลือก ข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ปลาย ฉบับสมบูรณ์ เป็นหนังสือที่รวบรวมเทคนิคต่างๆ ของการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ มาช่วยในการทำข้อสอบแบบปรนัยให้ได้คำตอบเร็วที่สุด โดยแสดงวิธีหาคำตอบด้วยวิธีจริงตามหลักสูตร และวิธีตัดตัวเลือก ผู้เขียนขอสรุปว่าการตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ไม่ใช่การเดาคำตอบ แต่เป็นการใช้เหตุผลคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องเหมาะสม รัดกุม และ รวดเร็ว กับข้อสอบคณิตศาสตร์ข้อนั้น ๆ

ข้อสอบคณิตศาสตร์แบบตัดตัวเลือกได้ ทั้งข้อสอบคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน ข้อสอบ ENTRANCE ระบบใหม่ ข้อสอบ Admission หรือข้อสอบแข่งขันต่างๆ ครูผู้สอนและกรรมการออกข้อสอบคณิตศาสตร์ทุกคนอยากให้ข้อสอบที่ออกมานั้นสามารถวัดความรู้ได้ตรงวัตถุประสงค์ และต้องใช้ความรู้จริงตามหลักสูตรโดยต้องมีขั้นตอนการคำนวณต่าง ๆ ครบถ้วนจึงจะได้คำตอบที่ต้องการ แต่สาเหตุที่ยังมีข้อสอบคณิตศาสตร์ที่หาคำตอบได้ด้วยการตัดตัวเลือก อาจเป็นเพราะเหตุผลบางประการเช่น

1. หลักสูตรบังคับให้ถาม ตัวอย่างเช่น
 - ต้องถามว่าเซตคำตอบคือตัวเลือกใด เราจึงใช้การแทนค่าช่วยในการตัดตัวเลือกได้
 - ต้องถามว่าประพจน์ใดเป็นสัจนิรันดร์ เราจึงใช้การแทนค่า T F ช่วยในการตัดตัวเลือกได้
2. มีเวลาในการออกข้อสอบน้อยจึงไม่มีเวลาป้องกันการตัดตัวเลือกได้
3. การออกข้อสอบแบบตัดตัวเลือกต้องมีการสร้างตัวลอง ซึ่งตัวลองนี้เองทำให้เราสามารถใช้อะไรช่วยในการตัดตัวเลือกได้ นั่นคือลองทั้งคนทำข้อสอบ และคนออกข้อสอบ
4. ปัญหาคณิตศาสตร์ข้อเดียวกันมีวิธีทำได้หลายวิธี ทำให้ป้องกันการตัดตัวเลือกบางวิธีไม่ได้
5. ข้อสอบคณิตศาสตร์เป็นความลับ เมื่อเป็นความลับ ก็ไม่สามารถตรวจสอบได้ ทำให้ไม่สามารถปรับปรุงคุณภาพข้อสอบให้ดีขึ้นได้ ดังนั้นตัวเลือกบางตัวจึงยังมีข้อบกพร่อง ทำให้เราตัดทิ้งได้

หนังสือเล่มนี้ผู้เขียนต้องการให้กรรมการออกข้อสอบ Admissionทุกท่าน กรุณาอ่านให้มาก ๆ เพื่อจะได้นำประโยชน์ไปปรับปรุงคุณภาพข้อสอบสำหรับนักเรียนในประเทศไทยให้ดียิ่งขึ้นต่อไป สำหรับนักเรียนขอให้ศึกษาหนังสือเล่มนี้ทั้งการตัดตัวเลือก และ วิธีจริง เพราะว่าการหาคำตอบโดยวิธีจริงจะเป็นประโยชน์ในการศึกษาระดับสูงขึ้นไป

ผู้เขียนหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อ การเรียน การสอน การสอบ วิชาคณิตศาสตร์ และขอขอบคุณผู้อ่านทุกท่านที่ติดตามผลงานของผู้เขียนจนถึง คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 25 นี้

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

เทคนิคการตัดตัวเลือก	หน้า
บทที่ 1 โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร	1-34
บทที่ 2 เซตคำตอบคือตัวเลือกใด	35-44
บทที่ 3 เซตคำตอบเป็นสับเซตของตัวเลือกใด	45-52
บทที่ 4 โดเมนและเรนจ์คือเซตใด	53-62
บทที่ 5 เขียนรูปดุกี่ตัดตัวเลือกได้	63-94
บทที่ 6 ความชันก็ตัดตัวเลือกได้	95-104
บทที่ 7 คำหาย-เปิดซ้ายขวาก็ตัดตัวเลือกได้	105-110
บทที่ 8 ประพจน์จริงเท็จก็ตัดตัวเลือกได้	111-114
บทที่ 9 ฟังก์ชัน $f(x)$ มีสูตรตรงกับตัวเลือกใด	115-124
บทที่ 10 มุมแหลมหรือมุมป้านก็ตัดตัวเลือกได้	125-128
บทที่ 11 ใช้เหตุผลเกี่ยวกับควอดรนต์ตัดตัวเลือก	129-132
บทที่ 12 นำค่าที่โจทย์กำหนดแทนค่าในตัวเลือก	133-136
บทที่ 13 ทดเลขเท่าที่จำเป็นแล้วค่อย ๆ ตัดตัวเลือก	137-150
บทที่ 14 นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์	151-156
บทที่ 15 ใช้การยกตัวอย่างเพื่อช่วยตัดตัวเลือก	157-160
บทที่ 16 เทคนิคการจำสูตรคณิตศาสตร์	161-170
บทที่ 17 เทคนิคการประมาณค่าช่วยในการตัดตัวเลือก	171-188
บทที่ 18 เทคนิคการใช้วงกลมหนึ่งหน่วยช่วยตัดตัวเลือก	189-202
ภาคผนวกที่ 1. ทวินามและไฮเพอร์จีโอเมตริก	203-208
ภาคผนวกที่ 2. สูตร 6 สูตรของการหาพื้นที่สามเหลี่ยม	209-214
ภาคผนวกที่ 3. ข้อสอบคณิตศาสตร์ที่มีโครงสร้างเหมือนกัน	215-220
ภาคผนวกที่ 4. ข้อสอบต่างประเทศก็ตัดตัวเลือกได้	221-228
ภาคผนวกที่ 5. ข้อสอบ GMATH SAT และ ม. ต้น ก็ตัดตัวเลือกได้	229-236
โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 1	237-256
ชุดที่ 2	257-270
ชุดที่ 3	271-284
ชุดที่ 4	285-298
ชุดที่ 5	299-314
ชุดที่ 6	315-330
ชุดที่ 7	331-348
ชุดที่ 8	349-368

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

ข้อสอบในลักษณะของโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร เป็นข้อสอบที่พบในการสอบหลายชุดข้อสอบ เพราะว่าเป็นข้อสอบที่ออกได้ง่าย เช่น นำนุกรมเลขคณิต $1 + 2 + 3 + \dots + n$ มาถามสูตรผลบวกของ นุกรมเลขคณิต นำเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ มีค่าเท่ากับสูตรในตัวเลือกใด นำสูตรที่นักเรียนไม่ค่อยคุ้นเคยมาเป็นตัวเลือก 4 ข้อ แล้วถามว่าตัวเลือกใดถูก หรือ ตัวเลือกใดผิด กล่าวโดยรวมของข้อสอบแบบโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรที่นิยมออกสอบคือ นำสูตรต่าง ๆ ในทางคณิตศาสตร์ มาเป็นตัวเลือก มักจะกำหนดโจทย์ในรูปแบบของ ผลบวกหรือผลคูณของนุกรมเลขคณิต นุกรมเรขาคณิต ผลบวกของ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ ซึ่งอาจเป็นสูตรในพจน์ของ θ , x หรือ n แล้วตัวเลือกก็จะเป็นสูตรในพจน์ของ θ , x หรือ n ด้วย เพราะฉะนั้นเมื่อเราแทนค่า θ , x หรือ n ที่เหมาะสมก็จะสามารถตัดตัวเลือกทิ้งได้

ในบทนี้จะนำข้อสอบต่าง ๆ ที่สามารถจัดอยู่ในกลุ่มโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร มาให้นักเรียนศึกษาหลาย ๆ ข้อ เพื่อจะได้เห็นรูปแบบต่าง ๆ ที่หลากหลายและซับซ้อนมากขึ้น และจะได้เปรียบเทียบการหาคำตอบโดยใช้วิธีจริงตามหลักสูตรกับ เทคนิคการตัดตัวเลือกโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

ตัวอย่างที่ 1.1 ผลลัพธ์ของ $\frac{1 + \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ ตรงกับข้อใด

1. 1
2. $1 + \cos x + \sin x$
3. $2 \operatorname{cosec} x$
4. $2 \sec x$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แทนค่า $x = \frac{\pi}{2}$ จะได้ค่าของโจทย์ $\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} + \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1 + \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1+0}{1} + \frac{1}{1+0} = 2$

พิจารณาค่าทุกตัวเลือกเมื่อแทนค่า $x = \frac{\pi}{2}$

1. 1
2. $1 + \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 2$
3. $2 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} = 2$
4. $2 \sec \frac{\pi}{2}$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

เลือก $x = \frac{3\pi}{2}$ แทนค่าจะได้ค่าของโจทย์ $\frac{1 + \cos \frac{3\pi}{2}}{\sin \frac{3\pi}{2}} + \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{1 + \cos \frac{3\pi}{2}} = \frac{1+0}{-1} + \frac{-1}{1+0} = -2$

แทนค่า $x = \frac{3\pi}{2}$ เฉพาะตัวเลือก 2. กับ 3.

จะได้ $2. 1 + \cos \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} = 1 + 0 - 1 = 0$ $3. 2\operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2} = -2$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

วิธีจริง $\frac{1 + \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{(1 + \cos x)^2 + \sin^2 x}{(\sin x)(1 + \cos x)} = \frac{1 + 2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(\sin x)(1 + \cos x)} = \frac{1 + 2\cos x + 1}{(\sin x)(1 + \cos x)}$
 $= \frac{2(1 + \cos x)}{(\sin x)(1 + \cos x)} = \frac{2}{\sin x} = 2\operatorname{cosec} x$

ตัวอย่างที่ 1.2 ค่าของ $\frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1}{\tan \theta - \sin \theta \cos \theta}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2 \cot^2 \theta$

2. $2 \cot \theta$

3. $2 \cos^2 \theta \sec^2 \theta$

4. $2 \cos \theta \operatorname{cosec} \theta$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร เพราะฉะนั้นแทนค่า $\theta = \frac{\pi}{6}$ จะได้ค่าของโจทย์

$$\frac{(\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6})^2 - 1}{\tan \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} - (\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{\frac{1}{4} + 2(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{3}{4} - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})}{(\frac{4-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}})} = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})}{(\frac{1}{4\sqrt{3}})} = 6$$

แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{6}$ ในตัวเลือกทุกตัวเลือกจะได้ค่าดังนี้

1. $2 \cot^2 \frac{\pi}{6} = 2(\sqrt{3})^2 = 6$

2. $2 \cot \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$

3. $2 \cos^2 \frac{\pi}{6} \sec^2 \frac{\pi}{6} = 2(\frac{3}{4})(\frac{4}{3}) = 2$

4. $2 \cos \frac{\pi}{6} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = 2(\frac{\sqrt{3}}{2})(2) = 2\sqrt{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.

ข้อสังเกต 1. เพราะว่า $2 \cos \theta \operatorname{cosec} \theta = 2 \cot \theta$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. และ 4. เหมือนกัน

2. ตัวเลือก 3. เป็นค่าคงตัวเนื่องจาก $2 \cos^2 \theta \sec^2 \theta = 2$

ด้วยเหตุผลแบบนี้เราสามารถตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.

วิธีจริง $\frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1}{\tan \theta - \sin \theta \cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta - 1}{\tan \theta - \sin \theta \cos \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\tan \theta - \sin \theta \cos \theta}$
 $= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \sin \theta \cos \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos^2 \theta}{\sin \theta - \sin \theta \cos^2 \theta}$
 $= \frac{2 \cos^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 2 \cot^2 \theta$

ตัวอย่างที่ 1.3 กำหนด $f(x) = \frac{x}{x-1}$ อินเวอร์สของฟังก์ชัน $f(x)$ คือข้อใดต่อไปนี้

$$1. f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$2. f^{-1}(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$3. f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$4. f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x}$$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จาก $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ดูการส่งค่าบางตัวก็พอ

เพราะว่า $f(0) = 0$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(0) = 0$

แทนค่า $x = 0$ ในตัวเลือกจะได้

$$1. f^{-1}(0) = \frac{0}{0-1} = 0$$

$$2. f^{-1}(0) = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$3. f^{-1}(0) = \frac{0-1}{0} \text{ ไม่มีค่า}$$

$$4. f^{-1}(0) = \frac{0+1}{0} \frac{x+1}{x} \text{ ไม่มีค่า}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

เพราะว่า $f(2) = 2$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(2) = 2$

แทนค่า $x = 2$ ในตัวเลือก 1. $f^{-1}(2) = \frac{2}{2-1} = 2$ และ 2. $f^{-1}(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

วิธีจริง เมื่อ $y = f(x) = \frac{x}{x-1}$

จะได้ $y(x-1) = x$

$$xy - x = y$$

$$x(y-1) = y$$

$$x = \frac{y}{y-1}$$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$

ตัวอย่างที่ 1.4 ถ้า $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$ สำหรับจำนวนจริง $x \neq 0, 1$ และ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

แล้ว $f(\sec^2 \theta)$ มีค่าเท่าใด

$$1. \sin^2 \theta$$

$$2. \cos^2 \theta$$

$$3. \tan^2 \theta$$

$$4. \cot^2 \theta$$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ θ เพราะฉะนั้นเลือก $\theta = \frac{\pi}{4}$

แทนค่าในโจทย์จะได้ $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ และ $f\left(\sec^2 \frac{\pi}{4}\right) = f(2) = f\left(\frac{2}{2-1}\right) = \frac{1}{2}$

แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{4}$ ที่ตัวเลือกแต่ละตัวจะได้

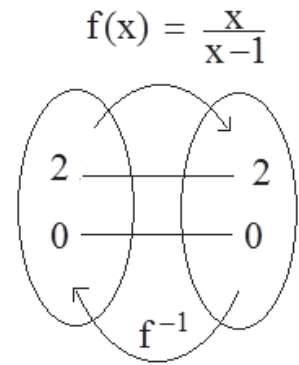
$$1. \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$2. \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$3. \tan^2 \frac{\pi}{4} = 1$$

$$4. \cot^2 \frac{\pi}{4} = 1$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.



ต่อไปแทนค่า $\theta = \frac{\pi}{3}$ จะได้ $\sec^2 \frac{\pi}{3} = 2^2 = 4$ เพราะฉะนั้น $f(\sec^2 \frac{\pi}{3}) = f(4) = f(\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}-1}) = \frac{1}{(\frac{4}{3})} = \frac{3}{4}$

แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{3}$ ในตัวเลือกที่เหลือจะได้ 1. $\sin^2 \frac{\pi}{3} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$ 2. $\cos^2 \frac{\pi}{3} = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

วิธีจริง

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$$

แทน x ด้วย $x+1$;

$$f\left(\frac{x+1}{(x+1)-1}\right) = \frac{1}{x+1}$$

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{x+1}$$

$$f\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+1}$$

แทน x ด้วย $\frac{1}{x}$;

$$f(1+x) = \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{x}{1+x}$$

แทน x ด้วย $x-1$;

$$f(1+(x-1)) = \frac{x-1}{1+x-1} = \frac{x-1}{x}$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} f(\sec^2 \theta) &= 1 - \frac{1}{\sec^2 \theta} \\ &= 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.5 กำหนดให้ $f(x) = x|x|$ แล้ว $f^{-1}(x)$ คือข้อใด

$$1. f^{-1}(x) = |x| \sqrt{|x|}$$

$$2. f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x|x|} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$3. f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{|x| \sqrt{|x|}}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$4. f^{-1}(x) = \sqrt{x|x|}$$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โดยการแทนค่าบางค่า เพราะว่า $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$

แทนค่า $x = \frac{1}{4}$ ในตัวเลือก

$$1. \left|\frac{1}{4}\right| \sqrt{\left|\frac{1}{4}\right|} = \frac{1}{8}$$

$$2. \frac{1}{(\frac{1}{4})|\frac{1}{4}|} = 16$$

$$3. \frac{|\frac{1}{4}| \sqrt{|\frac{1}{4}|}}{(\frac{1}{4})} = \frac{1}{2}$$

$$4. \sqrt{(\frac{1}{4})|\frac{1}{4}|} = \frac{1}{4}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4.

วิธีจริง $f(x) = x |x| = \begin{cases} -x^2 & ; x < 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ x^2 & ; x > 0 \end{cases}$

เพราะว่า $y < 0 ; f^{-1}(y) = -\sqrt{|y|} = \frac{|y|\sqrt{|y|}}{y}$

$y = 0 ; f^{-1}(0) = 0$

$y > 0 ; f^{-1}(y) = \sqrt{y} = \frac{|y|\sqrt{|y|}}{y}$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{|y|\sqrt{|y|}}{y} & ; y \neq 0 \\ 0 & ; y = 0 \end{cases}$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

ตัวอย่างที่ 1.6 จงหาตำแหน่งของจำนวนจริง θ บนวงกลมหนึ่งหน่วยซึ่ง $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = 1$

1. อยู่บนเส้นตรง $y = x$

2. อยู่บนแกน X

3. อยู่บนแกน Y

4. อยู่บนกราฟพาราโบลา $y^2 = x$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์เป็นสูตรในทอมของมุม θ

เพราะว่า $\theta = \frac{\pi}{2}$ ทำให้ $\sin^4 \frac{\pi}{2} - \cos^4 \frac{\pi}{2} = 1$

และตำแหน่ง $\theta = \frac{\pi}{2}$ ไม่อยู่บนแกน X และไม่อยู่บนเส้นตรง $y = x$

และไม่อยู่บนกราฟพาราโบลา $y^2 = x$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4.

วิธีจริง $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = 1$

$(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = 1$

$-\cos 2\theta = 1$

$\cos 2\theta = -1$

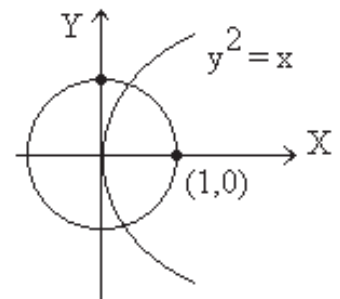
$\cos 2\theta = \cos \pi$

$2\theta = 2n\pi \pm \pi$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้น θ อยู่บนแกน Y



ตัวอย่างที่ 1.7 สามเหลี่ยม ABC มี a, b, c เป็นด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ และวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC มีรัศมีเท่ากับ R ค่าของ $\frac{a+b+c}{2R}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sin A + \sin B + \sin(A + B)$

2. $\frac{\sin A \sin B \sin(A + B)}{\sin A + \sin B + \sin(A + B)}$

3. $\frac{\sin A + \sin B - \sin(A + B)}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2(A + B)}$

4. $\frac{\sin A + \sin B + \sin(A + B)}{2\sqrt{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2(A + B)}}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของมุมและความยาวด้าน

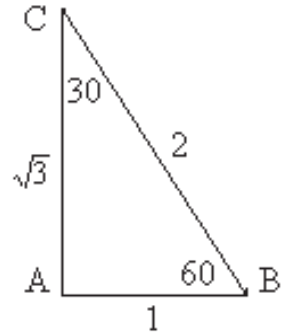
เพราะฉะนั้นลองแทนค่ากับรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป จากรูป $a + b + c = 3 + \sqrt{3}$

ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากมี BC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

เพราะฉะนั้นวงกลมล้อมรอบมีรัศมี $R = 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{a+b+c}{2R} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

แทนค่าในแต่ละตัวเลือกด้วยค่าที่ได้จาก $\triangle ABC$



$$1. \sin 90^\circ + \sin 60^\circ + \sin(90^\circ + 60^\circ) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$2. \frac{\sin 90^\circ \sin 60^\circ \sin(90^\circ + 60^\circ)}{\sin 90^\circ + \sin 60^\circ + \sin(90^\circ + 60^\circ)} = \frac{(1)(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2})}{(\frac{3+\sqrt{3}}{2})} \neq \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$3. \frac{\sin 90^\circ + \sin 60^\circ - \sin(90^\circ + 60^\circ)}{\sin^2 90^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2(90^\circ + 60^\circ)} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \neq \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$4. \frac{\sin 90^\circ + \sin 60^\circ + \sin(90^\circ + 60^\circ)}{2\sqrt{\sin^2 90^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2(90^\circ + 60^\circ)}} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{2}} \neq \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.

วิธีจริง การพิสูจน์สูตรนี้เป็นเรื่องที่ยากพอสมควรสำหรับนักเรียน ม. ปลาย เพราะว่าหลักสูตรปัจจุบันไม่ได้เน้นความสำคัญของความสัมพันธ์ของความยาว a, b, c และขนาดของมุม A, B, C กับ ค่า R ที่เป็นรัศมีวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC

ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC

เพราะฉะนั้น

$$OF \text{ ตั้งฉาก } BC \text{ และ } BF = FC = \frac{a}{2}$$

$$OD \text{ ตั้งฉาก } AB \text{ และ } BD = DA = \frac{c}{2}$$

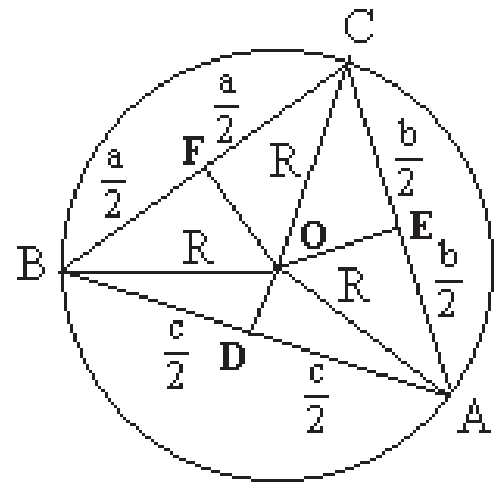
$$OE \text{ ตั้งฉาก } AC \text{ และ } CE = EA = \frac{b}{2}$$

และมุม $\angle BOF = \angle FOC$, $\angle COE = \angle EOA$, $\angle AOD = \angle DOB$

เพราะว่ามุมที่จุดศูนย์กลางเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวง

เพราะฉะนั้นมุม $\angle BOC = 2 \angle BAC$, $\angle BOA = 2 \angle ACB$, $\angle AOC = 2 \angle ABC$

เพราะฉะนั้นมุม $\angle BOF = \angle BAC$, $\angle EOC = \angle ABC$, $\angle BOD = \angle ACB$



ในสามเหลี่ยมมุมฉาก BOF $\sin \hat{A} = \sin \angle BOF = \frac{BF}{BO} = \frac{(\frac{a}{2})}{R} = \frac{a}{2R}$

ในสามเหลี่ยมมุมฉาก AOE $\sin \hat{B} = \sin \angle EOA = \frac{EA}{OA} = \frac{(\frac{b}{2})}{R} = \frac{b}{2R}$

ในสามเหลี่ยมมุมฉาก BDO จะได้ $\sin \hat{C} = \sin \hat{BOD} = \frac{BD}{OB} = \frac{(\frac{c}{2})}{R} = \frac{c}{2R}$

เพราะฉะนั้น $\frac{a+b+c}{2R} = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \sin A + \sin B + \sin C = \sin A + \sin B + \sin(180 - C)$
 $= \sin A + \sin B + \sin(A + B)$

ตัวอย่างที่ 1.8 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \geq 0$ และ $b \geq 0$ ข้อใดถูกต้อง

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ | 2. $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab}$ |
| 3. $\frac{a+b}{2} \neq \sqrt{ab}$ | 4. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ |

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร โดยการแทนค่าตัวเลขที่เราคิดเลขได้ง่าย

เช่น $a = 2$ และ $b = 8$ จะได้ว่า $\frac{2+8}{2} = 5$ และ $\sqrt{(2)(8)} = 4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

ต่อไปเลือก $a = 2$ และ $b = 2$ จะได้ $\frac{2+2}{2} = \sqrt{(2)(2)}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \geq 0$ และ $b \geq 0$ $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$

$$a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geq 0$$

$$a + b \geq 2\sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

ตัวอย่างที่ 1.9 ให้ I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก สำหรับ $n \in I^+$

ให้ D_n แทนช่วงเปิดโดยที่ $D_n = (0, \frac{1}{n})$ เมื่อ $s, t \in I^+$ ถ้า $s < t$ แล้ว $D_s \cup D_t$ เท่ากับข้อใด

- | | |
|-------------------|-----------|
| 1. $D_s \cap D_t$ | 2. D_t |
| 3. D_s | 4. D_t' |

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ s, t แทนค่า $s = 1$ และ $t = 2$

จากโจทย์ $D_s = D_1 = (0, 1)$, $D_t = D_2 = (0, \frac{1}{2})$, $D_s \cup D_t = (0, 1)$ ต่อไปพิจารณาค่าในตัวเลือก

- | | |
|--|---|
| 1. $D_s \cap D_t = (0, \frac{1}{2}) \neq (0, 1)$ | 2. $D_t = (0, \frac{1}{2}) \neq (0, 1)$ |
| 3. $D_s = (0, 1)$ | 4. $D_t' \neq (0, 1)$ |

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4.

วิธีจริง $s, t \in I^+$ $s < t$

$$\frac{1}{t} < \frac{1}{s}$$

$$(1, \frac{1}{t}) \subset (1, \frac{1}{s})$$

$$D_t \subset D_s$$

เพราะฉะนั้น

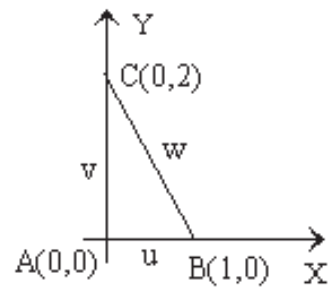
$$D_s \cup D_t = D_s$$

ตัวอย่างที่ 1.10 ถ้า ABC เป็นสามเหลี่ยม $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ และ $\overrightarrow{BC} = \vec{w}$ แล้วพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{2} \sqrt{(\vec{v} \cdot \vec{v})(\vec{w} \cdot \vec{w}) - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2}$
2. $\frac{1}{2} \sqrt{(\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) + (\vec{w} \cdot \vec{w})^2}$
3. $\frac{1}{2} \sqrt{(\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$
4. $\frac{1}{2} \sqrt{(\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{v} \cdot \vec{w}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})^2}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตรใน
เทอมของเวกเตอร์ เพราะฉะนั้นแทนค่า $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = 2\vec{j}$ และ $\vec{w} = \overrightarrow{BC} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ จะได้รูปของสามเหลี่ยม ABC ใน
พิกัดมุมฉากตั้งรูปและ พ.ท. $\Delta ABC = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} (1)(2) = 1$
แทนค่า $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{j}$, $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ ในตัวเลือกแต่ละตัวจะได้



1. $\frac{1}{2} \sqrt{(2\vec{j} \cdot 2\vec{j})(-\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j}) - (\vec{j} \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j}))^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(4)(5) - 4} = 2 \neq 1$
2. $\frac{1}{2} \sqrt{(\vec{i} \cdot \vec{i})(2\vec{j} \cdot 2\vec{j}) + ((-\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j}))^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(1)(4) + 25} \neq 1$
3. $\frac{1}{2} \sqrt{(\vec{i} \cdot \vec{i})(2\vec{j} \cdot 2\vec{j}) - (\vec{i} \cdot 2\vec{j})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4} = 1$
4. $\frac{1}{2} \sqrt{(\vec{i} \cdot 2\vec{j})(2\vec{j} \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j}) + (\vec{i} \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j}))^2} = \frac{1}{2} \sqrt{0 + 1} = \frac{1}{2} \neq 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4.

วิธีจริง ให้ $\Delta =$ พื้นที่สามเหลี่ยม $ABC = \frac{1}{2} |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$

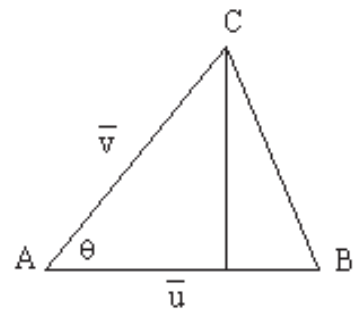
$$2\Delta = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sin \theta$$

$$4\Delta^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \sin^2 \theta = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \left(1 - \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}\right)^2\right) = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

$$2\Delta = \sqrt{(\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$$

เพราะฉะนั้น $\Delta = \frac{1}{2} \sqrt{(\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$



ตัวอย่างที่ 1.11 ให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|x + 1| > x + |x - 1|$

ข้อใดต่อไปนี้มีความจริงเป็นจริง เมื่อกำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซต A

1. $\forall x [|x + 3| < 1]$
2. $\forall x [\frac{x(x+3)^2}{x-1} < 0]$
3. $\forall x [x^2 - 4 > 0]$
4. $\forall x [(x - 5) | x | < 0]$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จากโจทย์ $x = 1$ ได้ แสดงว่า $1 \in A$ ต่อไปพิจารณาตัวเลือกแต่ละตัว

1. เป็นเท็จ, เพราะว่า $|1 + 3|$ ไม่น้อยกว่า 1

2. เป็นเท็จ, เพราะว่า $\frac{x(x+3)^2}{x-1}$ หาค่าไม่ได้

3. เป็นเท็จ, เพราะว่า $0 - 4$ ไม่มากกว่า 0

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3.

วิธีจริง $A = \{x \mid |x + 1| > x + |x - 1|\}$ เพราะฉะนั้น $-1 \notin A, 1 \in A$

$$\begin{aligned} x < -1 \quad & |x + 1| > x + |x - 1| \\ & -(x + 1) > x - (x - 1) \\ & x < -2 \end{aligned} \quad \text{เพราะฉะนั้น } x \in (-\infty, -2)$$

$$\begin{aligned} -1 < x < 1 \quad & |x + 1| > x + |x - 1| \\ & (x + 1) > x - (x - 1) \\ & x > 0 \end{aligned} \quad \text{เพราะฉะนั้น } x \in (0, 1)$$

$$\begin{aligned} x > 1 \quad & |x + 1| > x + |x - 1| \\ & (x + 1) > x + (x - 1) \\ & x < 2 \end{aligned} \quad \text{เพราะฉะนั้น } x \in (1, 2)$$

เพราะฉะนั้น $A = (-\infty, -2) \cup (0, 2)$

1. $\forall x \in A \mid |x + 3| < 1$ เป็นเท็จเมื่อ $x = 1$

2. $\forall x \in A \mid \frac{x(x+3)^2}{x-1} < 0$ เป็นเท็จเมื่อ $x = 0.5$

3. $\forall x \in A \mid x^2 - 4 > 0$ เป็นเท็จเมื่อ $x = 1$

เพราะฉะนั้น $\forall x \in A \mid (x - 5) \mid x < 0$ เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 1.12 ถ้า $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \frac{A + B \cos x \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$ แล้ว $A + B$ เท่ากับข้อใด

1. 1

2. 3

3. 2

4. 4

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แทนค่า $x = 0$ จะได้ $\frac{1 + \tan 0}{1 - \tan 0} = \frac{A + B \cos 0 \sin 0}{\cos^2 0 - \sin^2 0} = \frac{A + 0}{1 - 0}$

$$\frac{1 - 0}{1 + 0} = A$$

เพราะฉะนั้น $A = 1$

แทนค่า $x = \frac{\pi}{3}$ จะได้ $\frac{1 + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{1 + B \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3}}{\cos^2 \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{\pi}{3}}$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{1+B(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})}{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{4+\sqrt{3}B}{-2}$$

$$\frac{(1+\sqrt{3})^2}{1-3} = \frac{4+\sqrt{3}B}{-2}$$

$$4+2\sqrt{3} = 4+\sqrt{3}B$$

เพราะฉะนั้น $B = 2$ เพราะฉะนั้น $A + B = 3$

วิธีจริง เพราะว่า $\frac{1+\tan x}{1-\tan x} = \frac{1+\frac{\sin x}{\cos x}}{1-\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\right)\left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$

$$= \frac{\cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1+2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1+2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{A+B\cos x \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$ เพราะฉะนั้น $A = 1, B = 2$ เพราะฉะนั้น $A + B = 3$

ตัวอย่างที่ 1.13 ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$
ข้อความในข้อใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

1. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2)$
3. $\frac{1}{2}|\vec{u} - \vec{v}| = \left|\sin \frac{\theta}{2}\right|$
4. $\frac{1}{2}|\vec{u} - \vec{v}| = \left|\sin^2 \frac{\theta}{2}\right|$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โดยการแทนค่าที่คิดเลขได้ง่ายเช่น $\vec{u} = \vec{i}, \vec{v} = \vec{j}$ จะได้ $\theta = \frac{\pi}{2}$

ต่อไปแทนค่า $\vec{u} = \vec{i}, \vec{v} = \vec{j}$ ในตัวเลือก

1. $(\vec{i} + \vec{j}) \cdot (\vec{i} - \vec{j}) = 0 = |\vec{i}|^2 - |\vec{j}|^2$
2. $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ และ $\frac{1}{4}(|\vec{i} + \vec{j}|^2 - |\vec{i} - \vec{j}|^2) = 0$
3. $\frac{1}{2}|\vec{i} - \vec{j}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ และ $\left|\sin \frac{\pi}{4}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$
4. $\frac{1}{2}|\vec{i} + \vec{j}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ และ $\left|\sin^2 \frac{\pi}{4}\right| = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4. เป็นเท็จ เลือกตัวเลือก 4. เป็นคำตอบได้เลย

วิธีจริง 1. เพราะว่า $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$

เพราะฉะนั้น $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$ เป็นจริงสำหรับทุกเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}$

2. เพราะว่า $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$ และ $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$

เพราะฉะนั้น $4\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2$

เพราะฉะนั้น $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2)$ เป็นจริงสำหรับทุกเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}$

3. เพราะว่าทุกเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{u}, \vec{v}$ ให้ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 1 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 1 = 2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{1}{2} |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 1 - \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = 1 - \cos \theta \quad (\text{เพราะว่า } \vec{u}, \vec{v} \text{ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย})$$

$$\text{เพราะว่า } \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos \theta}{2} \text{ เพราะฉะนั้น } \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{4} |\vec{u} - \vec{v}|^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{1}{2} |\vec{u} - \vec{v}| = \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \text{ เป็นจริงสำหรับทุกเวกเตอร์หนึ่งหน่วย } \vec{u}, \vec{v}$$

ตัวอย่างที่ 1.14 ถ้าสามเหลี่ยม ABC มีมุมเป็น $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ และมีด้านตรงข้ามมุมเป็น a, b, c ตามลำดับ

กำหนด Δ = พ.ท.ของสามเหลี่ยม ABC ค่าของ $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}$ เท่ากับเท่าใด

$$1. \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}$$

$$2. \frac{(a+b+c)^2}{4\Delta}$$

$$3. \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4\Delta}$$

$$4. \frac{(ab+bc+ca)^2}{4\Delta}$$

ตอบ 2.

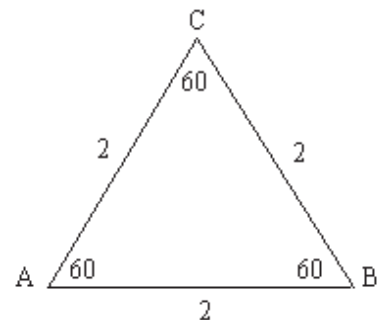
แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ มุม และความยาวด้านของสามเหลี่ยม

เพราะฉะนั้นเลือก สามเหลี่ยม ABC ดังรูป

$$a = b = c = 2, \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{แทนค่าในโจทย์ } \Delta = \frac{1}{2} (2)(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} &= \cot \frac{\pi}{6} + \cot \frac{\pi}{6} + \cot \frac{\pi}{6} \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$



พิจารณาค่าจากตัวเลือกเมื่อ $a = b = c = 2$

$$1. \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta} = \frac{4+4+4}{4\sqrt{3}} = \frac{12}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \neq 3\sqrt{3}$$

$$2. \frac{(a+b+c)^2}{4\Delta} = \frac{(2+2+2)^2}{4\sqrt{3}} = \frac{36}{4\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

$$3. \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4\Delta} = 3\sqrt{3}$$

$$4. \frac{(ab+bc+ca)^2}{4\Delta} = \frac{(4+4+4)^2}{4\sqrt{3}} \neq 3\sqrt{3}$$

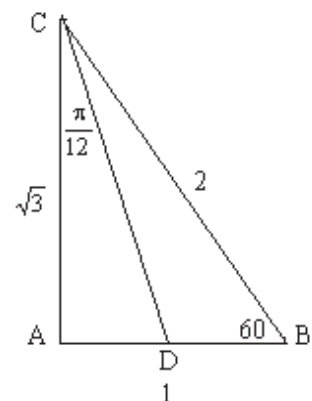
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

ต่อไปเลือกสามเหลี่ยมมุมฉากดังภาพ $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$

$$\hat{A} = \frac{\pi}{2}, \hat{B} = \frac{\pi}{3}, \hat{C} = \frac{\pi}{6}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} (1)(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot \frac{\hat{A}}{2} + \cot \frac{\hat{B}}{2} + \cot \frac{\hat{C}}{2} = \cot \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{6} + \cot \frac{\pi}{12} = 1 + \sqrt{3} + \cot \frac{\pi}{12}$$



อยากรู้ $\cot \frac{\pi}{12}$ เท่ากับเท่าไรจะพิสูจน์สูตรตรีโกณมิติก็ได้

แต่ขณะนี้ขอให้ลองลากเส้นแบ่งครึ่งมุม C มาตัดด้าน AB ที่ D โดยการวัดจะได้ว่า AD ยาวเท่ากับ 0.5

$$\text{เพราะฉะนั้น } \cot \frac{\pi}{12} = \frac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}} = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{0.5} = 2\sqrt{3}$$

เพราะฉะนั้นค่าจากโจทย์ $\cot \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{6} + \cot \frac{\pi}{12} \approx 1 + 3\sqrt{3} = 6.2$ ต่อไปดูที่ตัวเลือกที่เหลือ

$$2. \frac{(2+\sqrt{3}+1)^2}{4(\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{(3+\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}} = \frac{9+6\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}} = \frac{12+6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 3 + 2\sqrt{3} = 3 + 2(1.732) = 6.464$$

$$3. \frac{3(2\sqrt{3}+\sqrt{3}+2)^2}{4(\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{3(2+3\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} (4 + 12\sqrt{3} + 27) > 26$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง จากสามเหลี่ยม ABC ให้ $s = \frac{a+b+c}{2}$ และ $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2 - 2bc}{2bc} = \frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2bc} - 1$$

$$\cos A = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} - 1$$

$$\cos A = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc} - 1 = \frac{(a+b+c-2a)(2s)}{2bc} - 1 = \frac{(2s-2a)(2s)}{2bc} - 1 = \frac{(s-a)(2s)}{bc} - 1$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{1+\cos A}{2} = \frac{(s-a)s}{bc} \quad \text{เพราะฉะนั้น } \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad \dots (1)$$

$$\text{เพราะว่า } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2\Delta}{abc} \quad \text{เพราะฉะนั้น } \frac{\sin A}{a} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{abc}$$

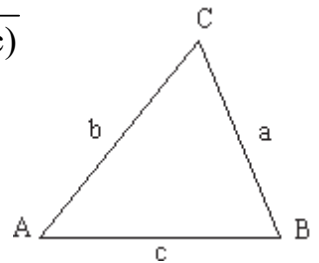
$$2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \sin A = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc} \cdot \frac{1}{2 \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \quad \dots (2)$$

$$\text{จาก (1) และ (2) เพราะฉะนั้น } \cot \frac{A}{2} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$$

$$\text{ในทำนองเดียวกัน } \cot \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}} \quad \text{และ } \cot \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$$

$$\begin{aligned} \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}} + \sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}} + \sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}} \\ &= \sqrt{\frac{s^2(s-a)^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}} + \sqrt{\frac{s^2(s-b)^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}} + \sqrt{\frac{s^2(s-c)^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \\ &= \frac{s(s-a)}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} + \frac{s(s-b)}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} + \frac{s(s-c)}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \end{aligned}$$



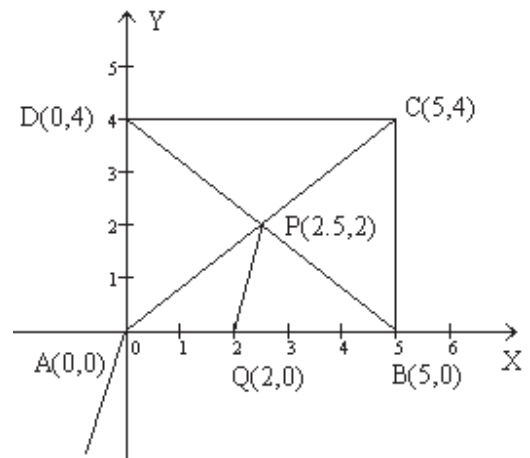
$$\begin{aligned}
 &= \frac{s(s-a)}{\Delta} + \frac{s(s-b)}{\Delta} + \frac{s(s-c)}{\Delta} = \frac{s}{\Delta} ((s-a) + (s-b) + (s-c)) \\
 &= \frac{s}{\Delta} (3s - (a+b+c)) = \frac{s}{\Delta} (3s - 2s) \\
 &= \frac{s^2}{\Delta} = \frac{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2}{\Delta} = \frac{(a+b+c)^2}{4\Delta}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.15 ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน P เป็นจุดที่เส้นทแยงมุมตัดกัน จุด Q อยู่บนด้าน AB ทำให้ AQ : QB = 2 : 3 ถ้าให้ $\vec{u}$ แทนเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ และ $\vec{v}$ แทนเวกเตอร์ $\overrightarrow{AD}$ แล้ว $\overrightarrow{PQ}$ เท่ากับเวกเตอร์ใด

1. $\frac{1}{6}(\vec{u} - 3\vec{v})$
2. $\frac{1}{6}(7\vec{u} + 3\vec{v})$
3. $-\frac{1}{10}(\vec{u} + \vec{v})$
4. $-\frac{1}{10}(\vec{u} + 5\vec{v})$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก สี่เหลี่ยมผืนผ้าก็เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน เพราะฉะนั้นเราสามารถนำมาช่วยตัดตัวเลือกได้โดยการเลือกค่าให้เหมาะสมดังภาพ เลือกพิกัดของ A, B, C และ D ให้คิดเลขง่าย ๆ และสอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์แล้วเขียนรูปก็สามารถช่วยในการตัดตัวเลือกได้



จากรูป $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = 5\vec{i}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2 \end{bmatrix} = -0.5\vec{i} - 2\vec{j}, \quad |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \frac{\sqrt{17}}{2} \approx \frac{4.12}{2} = 2.06$$

ใช้ขนาดของเวกเตอร์จากรูปและเวกเตอร์จากตัวเลือกช่วยในการตัดตัวเลือกได้

1. $\left| \frac{1}{6}(\vec{u} - 3\vec{v}) \right| = \left| \frac{1}{6}(5\vec{i} - 12\vec{j}) \right| = \frac{1}{6}\sqrt{25 + 144} = \frac{13}{6} = 2.17$
2. $\left| \frac{1}{6}(7\vec{u} + 3\vec{v}) \right| = \left| \frac{1}{6}(35\vec{i} + 12\vec{j}) \right| = \frac{1}{6}\sqrt{1225 + 144} = \frac{\sqrt{1369}}{6} = \frac{37}{6} = 6.16 \neq 2.06$
3. $\left| -\frac{1}{10}(\vec{u} + \vec{v}) \right| = \left| -\frac{1}{10}(5\vec{i} + 4\vec{j}) \right| = \frac{1}{10}\sqrt{25 + 16} = \frac{\sqrt{41}}{10} = 0.6 \neq 2.06$
4. $\left| -\frac{1}{10}(\vec{u} + 5\vec{v}) \right| = \left| -\frac{1}{10}(5\vec{i} + 20\vec{j}) \right| = \frac{1}{10}\sqrt{25 + 400} = \frac{\sqrt{425}}{10} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

จากสี่เหลี่ยม ABCD ข้างต้นสรุปได้ว่าตัวเลือก 1., 2., 3 ผิด เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2., 3

หมายเหตุ ดูเครื่องหมายของสัมประสิทธิ์ $\vec{i}$ กับ $\vec{j}$ ก็ตัดตัวเลือก 1., 2., 3 ตัดทิ้งได้

เครื่องหมายของสัมประสิทธิ์ $\vec{i}$ กับ $\vec{j}$ ของ $\overrightarrow{PQ} = -0.5\vec{i} - 2\vec{j}$ เป็น $(-, -)$

1. $\frac{1}{6}(5\vec{i} - 12\vec{j})$ เครื่องหมายของสัมประสิทธิ์ $\vec{i}$ กับ $\vec{j}$ เป็น $(+, -)$
2. $\frac{1}{6}(35\vec{i} + 12\vec{j})$ เครื่องหมายของสัมประสิทธิ์ $\vec{i}$ กับ $\vec{j}$ เป็น $(+, +)$
3. $-\frac{1}{10}(5\vec{i} + 4\vec{j})$ เครื่องหมายของสัมประสิทธิ์ $\vec{i}$ กับ $\vec{j}$ เป็น $(-, -)$

4. $-\frac{1}{10}(5\bar{i} + 20\bar{j})$ เครื่องหมายของสัมประสิทธิ์ $\bar{i}$ กับ $\bar{j}$ เป็น $(-, -)$

จากเครื่องหมายนี้ทำให้เราตัดตัวเลือก 1. และ 2.

ต่อไปดูเฉพาะสัมประสิทธิ์ของ $\bar{i}$ ทำให้ตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

นอกจากนั้นหากแทนค่าจริงจะได้ $\overrightarrow{PQ} = -0.5\bar{i} - 2\bar{j} = -\frac{1}{10}(5\bar{i} + 20\bar{j})$ ตรงกับตัวเลือก 4. ตัวเดียวเท่านั้น

วิธีจริง $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \bar{u} + \bar{v}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v})$

และ $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\bar{u} - \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v})$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{PQ} = (\frac{2}{5}\bar{u} - \frac{1}{2}\bar{u}) - \frac{1}{2}\bar{v} = -\frac{1}{10}\bar{u} - \frac{1}{2}\bar{v} = -\frac{1}{10}(\bar{u} + 5\bar{v})$

ตัวอย่างที่ 1.16

ผลบวกของ $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots - (2n-1)^2 + (2n)^2$ เท่ากับเท่าใด

1. $n(2n+1)$ 2. $-n(2n+1)$ 3. $n(2n-1)$ 4. $-n(2n-1)$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ข้อสอบข้อนี้ตรงตามหลักสูตร โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร อย่างชัดเจน

แทนค่า $n = 1$ จะได้ผลบวกของโจทย์เมื่อ $n = 1$ มีค่าเท่ากับ $-1^2 + 2^2 = -1 + 4 = 3$

คำนวณค่าที่ตัวเลือกเมื่อ $n = 1$ จะได้

1. $(1)(2(1) + 1) = 3$ 2. $-(1)(2(1) + 1) = -3 \neq 3$
 3. $(1)(2(1) - 1) = 1 \neq 3$ 4. $-(1)(2(1) - 1) = -1 \neq 3$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.

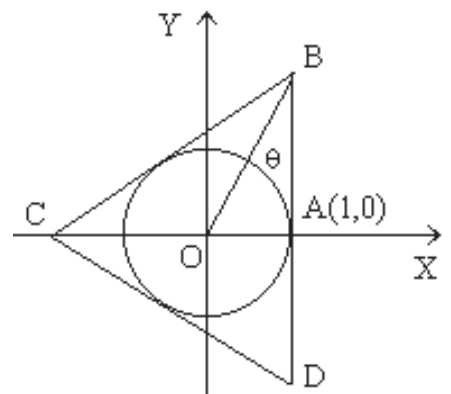
วิธีจริง $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots - (2n-1)^2 + (2n)^2$

$= (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2) + (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2)$

$= -\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 + \sum_{i=1}^n (2i)^2 = -\sum_{i=1}^n (4i^2 - 4i + 1) + \sum_{i=1}^n (4i^2) = -\sum_{i=1}^n 4i^2 + 4\sum_{i=1}^n i - n + \sum_{i=1}^n 4i^2$

$= 4\sum_{i=1}^n i - n = 4(\frac{n}{2}(n+1)) - n = 2n^2 + n = n(2n+1)$

ตัวอย่างที่ 1.17 จากรูป BD เป็นเส้นสัมผัสวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลาง BD สัมผัสวงกลมที่จุด A(1, 0) OB ทำมุม θ เรเดียนกับ OA โดยที่ $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ BC และ DC เป็นเส้นสัมผัสวงกลมซึ่งพบส่วนต่อของ AO ที่ C พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม BCD เท่ากับกี่ตารางหน่วย



1. $2\cos\theta\cot\theta$ 2. $-\tan^2\theta\tan 2\theta$
 3. $-\tan^2\theta\tan 2\theta$ 4. $2\sin\theta\sin\theta$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ข้อนี้โจทย์เป็นสูตรกำหนดโดยใช้รูปประกอบและตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์

บทที่ 1 โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

ของ θ วาดรูปโดยให้ OB ยาว 2 หน่วย จะได้ $\angle OBA = \frac{\pi}{3}$ และ

สามเหลี่ยม BCD เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าโดยมีพิกัด C เป็น $(-2, 0)$

จากโจทย์เมื่อ $\angle BOA = \frac{\pi}{3}$ จะได้ $\theta = \frac{\pi}{3}$ ด้วย

เพราะว่าพื้นที่ $\triangle BCD = \frac{1}{2}$ ฐาน สูง

$$= \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} (2\sqrt{3})(3) = 3\sqrt{3}$$

ต่อไปแทนค่า $\theta = \frac{\pi}{3}$ ในตัวเลือก

$$1. 2\cos \frac{\pi}{3} \cot \frac{\pi}{3} = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \neq 3\sqrt{3}$$

$$2. -\tan^2 \frac{\pi}{3} \tan \frac{2\pi}{3} = -(\sqrt{3})^2(-\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$$

$$3. -\tan^2 \frac{\pi}{3} \cot \frac{2\pi}{3} = -(\sqrt{3})^2\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \neq 3\sqrt{3}$$

$$4. 2\sin \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3}) = 3 \neq 3\sqrt{3}$$

จากกรณีตัวอย่างที่เราเลือกทำให้ตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 1.18 กำหนดให้ $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$, $|\vec{w}| = 3$, $\vec{w} \perp \vec{v}$ และ $\vec{w}$ ทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$

ค่าของ $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$ เท่ากับเท่าใด

$$1. \sqrt{5}$$

$$2. 2\sqrt{5}$$

$$3. 5$$

$$4. 20$$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์ข้อนี้เข้ากฎเกณฑ์ของโจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของขนาดเวกเตอร์ เพราะฉะนั้นเราเพียงแต่เลือก $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ให้สอดคล้องกับโจทย์ก็จะสามารถตัดตัวเลือกได้

เช่นเลือก $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = 2\vec{j}$, $\vec{w} = 3\vec{i}$ จะได้ว่า $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$, $|\vec{w}| = 3$ และ $\vec{w} \perp \vec{v}$ และ $\vec{w}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ พิจารณาขนาดเวกเตอร์ที่โจทย์ต้องการคือ

$$|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = |\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{i}| = |4\vec{i} + 2\vec{j}| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4.

วิธีจริง เพราะว่า $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{w}| = 3$ และ $\vec{w}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ เพราะฉะนั้น $\vec{w} = 3\vec{u}$

เพราะว่า $\vec{w} \perp \vec{v}$ และ $\vec{w}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ เพราะฉะนั้น $\vec{u} \perp \vec{v}$

เพราะฉะนั้น $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$ และ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{u}|^2 = |4\vec{u} + \vec{v}|^2 = (4\vec{u} + \vec{v}) \cdot (4\vec{u} + \vec{v})$$

$$= |4\vec{u}|^2 + 8\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 16|\vec{u}|^2 + 8(0) + |\vec{v}|^2 = 16 + 0 + 4 = 20$$

เพราะฉะนั้น $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = 2\sqrt{5}$

ตัวอย่างที่ 1.19 กำหนดให้เอกภาพสัมพัทธ์คือ U ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

$$1. \text{ ถ้า } A - B = B \text{ แล้ว } A \cap B = \phi$$

$$2. \text{ ถ้า } A - B = A \text{ แล้ว } A \cap B \neq \phi$$

$$3. \text{ ถ้า } A \subset B \cup C \text{ แล้ว } B' \cup C' \subset A'$$

$$4. \text{ ถ้า } A \subset B \cap C \text{ แล้ว } A' \subset B' \cup C'$$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์แบบนี้ใช้ยกตัวอย่างเซตก็สามารถตัดตัวเลือกได้

หรือบางครั้งอาจได้คำตอบที่ต้องการเลยก็ได้ เช่น เลือก $A = U, B = \emptyset, C = U$ และ $U \neq \emptyset$

1. ถ้า $U - \emptyset = \emptyset$ แล้ว $U \cap \emptyset = \emptyset$ มีค่าความจริงเป็นจริง
2. ถ้า $U - \emptyset = U$ แล้ว $U \cap \emptyset \neq \emptyset$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.
3. ถ้า $U \subset \emptyset \cup U$ แล้ว $U \cup \emptyset \subset \emptyset$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.
4. ถ้า $U \subset \emptyset \cap U$ แล้ว $\emptyset \subset U \cup \emptyset$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ต่อไปเลือก $U = \{1, 2, 3, \dots\}, A = \{1\}, B = \{1, 2\}$ และ $C = U$ พิจารณาเฉพาะตัวเลือก 1. กับ 4.

1. $A - B = \emptyset, B = \{1, 2\}$ เพราะฉะนั้น (ถ้า $A - B = B$ แล้ว $A \cap B = \emptyset$) มีค่าความจริงเป็นจริง
4. $A = \{1\}, B \cap C = \{1, 2\}, A' = \{2, 3\}, B' \cup C' = \{1\}$

เพราะฉะนั้น (ถ้า $A \subset B \cap C$ แล้ว $A' \subset B' \cup C'$) มีค่าความจริงเป็นเท็จ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

วิธีจริง สมมติ $A - B = B$ เพราะว่า $A - B = A \cap B'$ เพราะฉะนั้น $A \cap B' = B$

เพราะว่า $B = A \cap B' \subset B'$ และ $B \cap B' = \emptyset$ เพราะฉะนั้น $B = \emptyset$ เพราะฉะนั้น $A \cap B = \emptyset$

เพราะฉะนั้น ถ้า $U - \emptyset = \emptyset$ แล้ว $U \cap \emptyset = \emptyset$ มีค่าความจริงเป็นจริง

หมายเหตุ 1. การทำโจทย์ที่ถามว่าตัวเลือกใดต่อไปนี้ผิด หรือตัวเลือกต่อไปนี้ถูกต้อง วิธีทำส่วนใหญ่ก็ต้องทำการยกตัวอย่างแสดง หรือต้องทำการพิสูจน์ข้อความ

2. จากตัวเลือก 1. ถ้าจำสูตรได้จะพบว่า $A - B = A \cap B' \subset B'$ เพราะฉะนั้นในกรณี $B \neq \emptyset$ จะได้ว่า $A - B = B$ เป็นเท็จ เพราะฉะนั้น (ถ้า $A - B = B$ แล้ว $A \cap B = \emptyset$) เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 1.20 กำหนดให้ $x, y \in \mathbb{R}^+$ ค่าน้อยที่สุดของ $\frac{x^2y + y + xy^2 + x}{xy}$ เท่ากับเท่าใด

1. 1
2. 4
3. 6
4. 8

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x, y

แทนค่า $x = y = 1$ ในโจทย์จะได้ $\frac{x^2y + y + xy^2 + x}{xy} = \frac{(1)^2(1) + (1) + (1)(1)^2 + (1)}{(1)(1)} = 4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

วิธีจริง เนื่องจาก $(k-1)^2 \geq 0$

$$k^2 - 2k + 1 \geq 0$$

$$k^2 + 1 \geq 2k$$

$$k + \frac{1}{k} \geq 2$$

ทุกค่า $k \in \mathbb{R}^+$

เพราะฉะนั้น $(x + \frac{1}{x}) + (y + \frac{1}{y}) \geq 2 + 2 = 4$

เพราะว่า $\frac{x^2y + y + xy^2 + x}{xy} = (x + \frac{1}{x}) + (y + \frac{1}{y}) \geq 4$ เพราะฉะนั้น $\frac{x^2y + y + xy^2 + x}{xy} \geq 4$

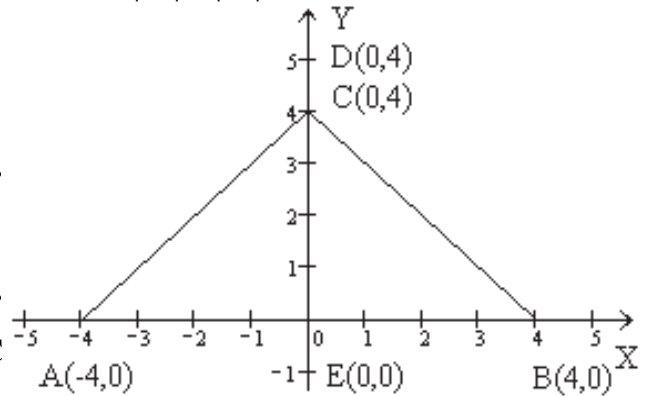
ตัวอย่างที่ 1.21 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ลาก BD ตั้งฉากกับด้าน AC และ CE ตั้งฉากกับด้าน AB ถ้าให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ แทนเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$ ตามลำดับ แล้วเวกเตอร์ $\overrightarrow{DE}$ จะเท่ากับเท่าใด

1. $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} - \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right)$
2. $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right)$
3. $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} + \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right)$
4. $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} - \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right)$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

ในเทอมของสามเหลี่ยมใด ๆ จากคำว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเราเลือกเป็นสามเหลี่ยมที่มีพิกัดตั้งรูปเพื่อช่วยในการตัดตัวเลือกได้เลย ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากที่มีพิกัดตั้งรูป โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก เพราะว่า $BD \perp AC$



เพราะฉะนั้น C กับ D เป็นจุดเดียวกัน เพราะว่า $CE \perp AB$ เพราะฉะนั้นจะได้พิกัด E (0, 0)

ขณะนี้เราได้สามเหลี่ยมที่สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์แล้ว จากรูปจะได้เวกเตอร์ต่าง ๆ เป็นดังนี้

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = 8\vec{i}, |\vec{u}|^2 = 64, \vec{v} = \overrightarrow{AC} = 4\vec{i} + 4\vec{j}, |\vec{v}|^2 = 32$$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{DE} = -4\vec{j}$ และ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 32$ ต่อไปพิจารณาตัวเลือกแต่ละตัว

$$1. (\vec{u} \cdot \vec{v}) \left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} - \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) = 32 \left(\frac{\vec{u}}{64} - \frac{\vec{v}}{32} \right) = \frac{\vec{u}}{2} - \vec{v} = 4\vec{i} - 4\vec{i} - 4\vec{j} = -4\vec{j}$$

$$2. (\vec{u} \cdot \vec{v}) \left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) = 32 \left(\frac{\vec{u}}{64} + \frac{\vec{v}}{32} \right) = \frac{\vec{u}}{2} + \vec{v} = 4\vec{i} + 4\vec{i} + 4\vec{j} \neq -4\vec{j}$$

$$3. (\vec{u} \cdot \vec{v}) \left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} + \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right) = 32 \left(\frac{\vec{u}}{8} + \frac{\vec{v}}{\sqrt{32}} \right) \neq -4\vec{j} \quad 4. (\vec{u} \cdot \vec{v}) \left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} - \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right) \neq -4\vec{j}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.

วิธีจริง $\overrightarrow{XY} = \vec{P}$ และ $YZ \perp \vec{Q}$, $\vec{P}_Q = \overrightarrow{XZ}$

$$\text{เพราะว่า } \cos\theta = \frac{|\overrightarrow{XZ}|}{|\overrightarrow{XY}|} = \frac{|\vec{P}_Q|}{|\vec{P}|} \text{ และ } \cos\theta = \frac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{|\vec{P}| |\vec{Q}|}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } |\vec{P}_Q| = \frac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{|\vec{Q}|}$$

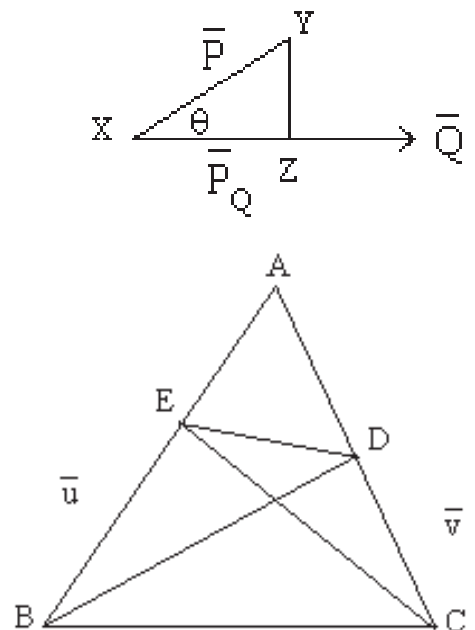
เพราะว่า $\vec{P}_Q$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{Q}$ เพราะฉะนั้น $\vec{P}_Q = \frac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{|\vec{Q}|} \vec{Q}$

หมายเหตุ $\vec{P}_Q$ เรียกว่า เวกเตอร์ภาพฉายของ $\vec{P}$ บนเวกเตอร์ $\vec{Q}$

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ และ $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ เพราะว่า BD ตั้งฉากกับด้าน AC

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{AD}$ เป็นเวกเตอร์ภาพฉายของ $\overrightarrow{AB}$ บนเวกเตอร์ $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AD} = \left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2} \right) \overrightarrow{AC} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \vec{v}$$



เพราะว่า CE ตั้งฉากกับด้าน AB เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{AE}$ เป็นเวกเตอร์ภาพฉายของ $\overrightarrow{AC}$ บนเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AE} = \left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|^2} \right) \overrightarrow{AB} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \right) \vec{u}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = -\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \vec{v} + \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \right) \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} - \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right)$$

ตัวอย่างที่ 1.22 ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ M, N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC และ CD ตามลำดับ ให้ $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ และ $\vec{v} = \overrightarrow{AN}$ แล้ว $\overrightarrow{AB}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{2} \vec{u} - \frac{1}{2} \vec{v}$

2. $\frac{3}{2} \vec{u} - \vec{v}$

3. $\frac{2}{3} \vec{u} - \frac{1}{2} \vec{v}$

4. $\frac{4}{3} \vec{u} - \frac{2}{3} \vec{v}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD

เลือกสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD ที่มีพิกัดตั้งรูปสามารถช่วยในการตัดตัวเลือกได้

จากกราฟ $\vec{u} = \overrightarrow{AM} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AN} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ และ $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i}$

แทนค่า $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ ในตัวเลือกจะได้

1. $\frac{3}{2} \vec{u} - \frac{1}{2} \vec{v} = \left(\frac{3}{2}(4) - \frac{1}{2}(2) \right) \vec{i} + \left(\frac{3}{2}(2) - \frac{1}{2}(4) \right) \vec{j} = 5\vec{i} + \vec{j} \neq \overrightarrow{AB}$

2. $\frac{3}{2} \vec{u} - \vec{v} = \left(\frac{3}{2}(4) - (2) \right) \vec{i} + \left(\frac{3}{2}(2) - (4) \right) \vec{j} = 4\vec{i} - \vec{j} \neq \overrightarrow{AB}$

3. $\frac{2}{3} \vec{u} - \frac{1}{2} \vec{v} = \left(\frac{2}{3}(4) - \frac{1}{2}(2) \right) \vec{i} + \left(\frac{2}{3}(2) - \frac{1}{2}(4) \right) \vec{j} \neq \overrightarrow{AB}$

4. $\frac{4}{3} \vec{u} - \frac{2}{3} \vec{v} = \left(\frac{4}{3}(4) - \frac{2}{3}(2) \right) \vec{i} + \left(\frac{4}{3}(2) - \frac{2}{3}(4) \right) \vec{j} = 4\vec{i} = \overrightarrow{AB}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3.

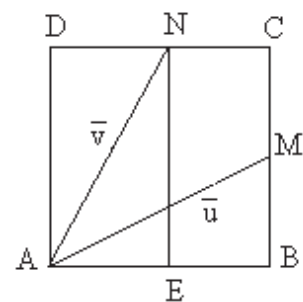
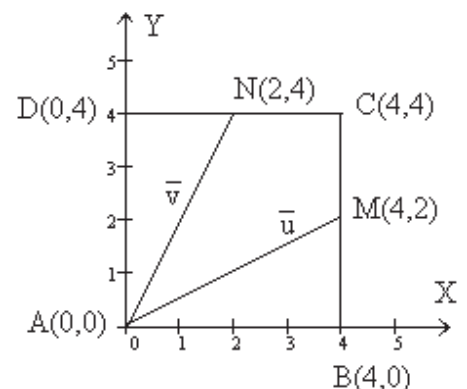
วิธีจริง สี่เหลี่ยม ANCB ; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CB} = \vec{v} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CM}$

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{v} + 4\overrightarrow{CM} \quad \dots (1)$$

สามเหลี่ยม ABM ; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \vec{u} + \overrightarrow{CM}$

$$4\overrightarrow{AB} = 4\vec{u} + 4\overrightarrow{CM} \quad \dots (2)$$

$$(2) - (1) ; 3\overrightarrow{AB} = 4\vec{u} - 2\vec{v} \text{ เพราะฉะนั้น } \overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$$



ตัวอย่างที่ 1.23 กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เท่ากับเวกเตอร์ศูนย์ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ จะได้ $\cos\theta$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $1 - \frac{1}{2} \left| \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} - \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right|^2$

2. $1 + \frac{1}{2} \left| \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} - \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right|^2$

3. $-1 + \frac{1}{2} \left| \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} - \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right|^2$

4. $-1 - \frac{1}{2} \left| \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} - \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right|^2$

ตอบ 1.

บทที่ 1 โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 โจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตรในทอมของเวกเตอร์

เพราะฉะนั้นยกตัวอย่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ บางตัวก็จะตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างเช่น $\bar{u} = \bar{i}$, $\bar{v} = \bar{i}$ จะได้มุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $\theta = 0$ เพราะฉะนั้น $\cos\theta = \cos 0 = 1$

เพราะว่า $\left| \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \right|^2 = \left| \frac{\bar{i}}{|\bar{i}|} - \frac{\bar{i}}{|\bar{i}|} \right|^2 = 0$ และค่าในตัวเลือกแต่ละตัวเป็นดังนี้

1. 1

2. 1

3. -1

4. -1

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ต่อไปเลือก $\bar{u} = \bar{i}$ และ $\bar{v} = \bar{j}$ มุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $\theta = \frac{\pi}{2}$

ซึ่งทำให้ $\cos\theta = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ พิจารณาเฉพาะตัวเลือก 1. และ 2.

$$1. -1 - \frac{1}{2} \left| \frac{\bar{i}}{|\bar{i}|} - \frac{\bar{j}}{|\bar{j}|} \right|^2 = 1 - \frac{1}{2} |\bar{i} - \bar{j}|^2 = 1 - 1 = 0$$

$$2. 1 + \frac{1}{2} \left| \frac{\bar{i}}{|\bar{i}|} - \frac{\bar{j}}{|\bar{j}|} \right|^2 = 1 + \frac{1}{2} |\bar{i} - \bar{j}|^2 = 1 + 1 = 2$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 เพราะว่า $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ และ

$$2. 1 \leq 1 + \frac{1}{2} \left| \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \right|^2 \quad 4. -1 - \frac{1}{2} \left| \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \right|^2 \text{ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.}$$

วิธีจริง การพิสูจน์ว่า $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2} \left| \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \right|^2$

ให้ $\bar{a}$, $\bar{b}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย, $0 \leq \theta \leq \pi$, θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{a}$ และ $\bar{b}$

เพราะว่า θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ เพราะฉะนั้น $\cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| |\bar{b}|} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

$$\text{พิจารณา} \quad |\bar{a} - \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 - 2\bar{a} \cdot \bar{b} + |\bar{b}|^2 = 1 - 2\bar{a} \cdot \bar{b} + 1 = 2 - 2\bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$2\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 - |\bar{a} - \bar{b}|^2$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 1 - \frac{1}{2} |\bar{a} - \bar{b}|^2$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2} |\bar{a} - \bar{b}|^2$$

ให้ $\bar{a} = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$ และ $\bar{b} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$ เพราะฉะนั้น มุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เท่ากับมุมระหว่าง $\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$ กับ $\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \cos\theta = 1 - \frac{1}{2} \left| \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \right|^2$$

ตัวอย่างที่ 1.24 ให้ a_n เป็นพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตโดยมี r เป็นอัตราส่วนร่วม

ถ้า $\frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_n + a_{n+1}} = 2n$ แล้ว r คือข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{2}$

3. -2

4. 2

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่าโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ n

เพราะฉะนั้นแทนค่า $n = 1$ จะได้ $\frac{a_1}{a_1 + a_2} = 2(1)$

$$\frac{a_1}{a_1 + ra_1} = 2$$

$$\frac{1}{1+r} = 2$$

$$r = -\frac{1}{2} \quad \text{เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.}$$

วิธีจริง เพราะว่า $a_1, a_2, a_3, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิต เพราะฉะนั้น $a_2 = ra_1, a_3 = ra_2, \dots$

เพราะฉะนั้น $\frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_n + a_{n+1}} = 2n$

$$\frac{a_1}{a_1 + ra_1} + \frac{a_2}{a_2 + ra_2} + \dots + \frac{a_n}{a_n + ra_n} = 2n$$

$$\frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \dots + \frac{1}{1+r} = 2n$$

$$\frac{n}{1+r} = 2n$$

$$1 + r = \frac{1}{2}$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

ตัวอย่างที่ 1.25 กำหนด $a(x) = x + 1$

$$b(x) = x - 1$$

$$c(x) = x^2 + 1$$

$$d(x) = x^2 - 1$$

และกำหนดความสัมพันธ์ในรูปแบบสมการ $(a \circ f)(x) + (b \circ g)(x) = 2$

$$(c \circ f)(x) - (d \circ g)(x) = 4x$$

แล้ว $f(x)$ และ $g(x)$ ตรงกับตัวเลือกใด

$$1. f(x) = x + \frac{1}{2} \text{ และ } g(x) = \frac{3}{2} - x \quad 2. f(x) = x - \frac{1}{2} \text{ และ } g(x) = \frac{3}{2} + x$$

$$3. f(x) = \frac{x}{2} + 1 \text{ และ } g(x) = 1 - \frac{3}{2}x \quad 4. f(x) = \frac{x}{2} - 1 \text{ และ } g(x) = 1 + \frac{3}{2}x$$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ในโจทย์ข้อนี้สังเกตจากตัวเลือกพบว่า $x = 0$ จะสามารถจำแนกตัวเลือกได้เป็น

$$1. f(0) = \frac{1}{2}, g(0) = \frac{3}{2}$$

$$2. f(0) = -\frac{1}{2}, g(0) = \frac{3}{2}$$

$$3. f(0) = 1, g(0) = 1$$

$$4. f(0) = -1, g(0) = 1$$

ต่อไปดูจากสมการของโจทย์ $(a \circ f)(0) + (b \circ g)(0) = 2$

$$a(f(0)) + b(g(0)) = 2$$

$$(f(0) + 1) + (g(0) - 1) = 2$$

$$f(0) + g(0) = 2$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

ต่อไป

$$(c \circ f)(0) + (d \circ g)(0) = 4(0)$$

$$c(f(0)) - d(g(0)) = 0$$

$$((f(0))^2 + 1) - ((g(0))^2 - 1) = 0$$

แทนค่า $f(0)$ และ $g(0)$ จากตัวเลือก 3. จะเห็นว่า $((1)^2 + 1) - ((1)^2 - 1) \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง

จากสมการ

$$(a \circ f)(x) + (b \circ g)(x) = 2$$

$$a(f(x)) + b(g(x)) = 2$$

$$(f(x) + 1) + (g(x) - 1) = 2$$

เพราะฉะนั้น

$$f(x) + g(x) = 2 \quad \dots (1)$$

จากสมการ

$$(c \circ f)(x) + (d \circ g)(x) = 4x$$

$$c(f(x)) - d(g(x)) = 4x$$

$$(f(x))^2 + 1 - ((g(x))^2 - 1) = 4x$$

$$(f(x))^2 - (g(x))^2 = 4x - 2$$

$$(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 4x - 2$$

จาก (1) ;

$$(f(x) - g(x))(2) = 4x - 2$$

$$f(x) - g(x) = 2x - 1 \quad \dots (2)$$

(1) + (2) ;

$$2f(x) = 2x + 1$$

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \quad \dots (3)$$

จาก (1); $g(x) = 2 - f(x) = 2 - x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - x$

ข้อสังเกต ในการสอบจริงนักเรียนไม่จำเป็นต้องหา $g(x)$ ก็ได้ เพราะว่าจากสมการ (3) เมื่อเราดูจากตัวเลือกจะเห็นได้ว่าเราเลือกคำตอบเป็นตัวเลือก 1. ได้แล้ว

ตัวอย่างที่ 1.26 ค่าของ $9\left(\frac{1}{1^2-2^2} + \frac{1}{2^2-4^2} + \frac{1}{4^2-8^2} + \dots + \frac{1}{2^{2n-2}-2^{2n}}\right)$ เท่ากับเท่าใด

1. $4 - 2^{2-2n}$

2. $2^{2-2n} - 4$

3. $4 - 2^{-2n}$

4. $2^{-2n} - 4$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ n

แทนค่า $n = 1$ ในโจทย์จะได้ $9\left(\frac{1}{1^2-2^2}\right) = 9\left(\frac{1}{1-4}\right) = -3$ และแทนค่า $n = 1$ ในตัวเลือกจะได้

1. $4 - 2^{2-2(1)} = 4 - 1 = 3 \neq -3$

2. $2^{2-2(1)} - 4 = 1 - 4 = -3$

3. $4 - 2^{-2(1)} = 4 - 0.25 = 3.75 \neq -3$

4. $2^{-2(1)} - 4 = 0.25 - 4 = -3.75 \neq -3$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4.

วิธีจริง

$$\begin{aligned}
 & 9 \left(\frac{1}{1^2 - 2^2} + \frac{1}{2^2 - 4^2} + \frac{1}{4^2 - 8^2} + \dots + \frac{1}{2^{2n-2} - 2^{2n}} \right) \\
 &= 9 \left(\frac{1}{1^2 - 2^2} + \frac{1}{2^2 - 2^4} + \frac{1}{2^4 - 2^6} + \dots + \frac{1}{2^{2n-2} - 2^{2n}} \right) \\
 &= 9 \left(\frac{1}{1^2 - 2^2} + \frac{1}{(1^2 - 2^2)2^2} + \frac{1}{(1^2 - 2^2)2^4} + \dots + \frac{1}{(1^2 - 2^2)2^{2n-2}} \right) \\
 &= \frac{9}{1^2 - 2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{2n-2}} \right) = (-3) \left(\frac{(1)(1 - (\frac{1}{2^2})^n)}{1 - \frac{1}{2^2}} \right) \\
 &= (-3) \left(\frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{\frac{3}{4}} \right) = -4(1 - 2^{-2n}) = 4 \cdot 2^{-2n} - 4 = 2^{2-2n} - 4
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.27 ถ้า $w = \frac{1+z}{i(1-z)}$ แล้ว z มีค่าเท่ากับเท่าใด

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $\frac{w^2 + 2iw - 1}{w^2 + 1}$ | 2. $\frac{w^2 + 2iw + 1}{w^2 + 1}$ |
| 3. $\frac{w^2 + 2iw - 1}{w^2 - 1}$ | 4. $\frac{w^2 + 2iw + 1}{w^2 - 1}$ |

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของตัวแปร z และ w

แทนค่า $w = 0$ ในโจทย์จะได้ $0 = \frac{1+z}{i(1-z)}$

$$1 + z = 0$$

$$z = -1$$

แทนค่า $w = 0$ ในทุกตัวเลือกจะได้ค่า z ดังนี้

1. $z = -1$

2. $z = 1$

3. $z = 1$

4. $z = -1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3.

แทนค่า $w = 1$ ในโจทย์จะได้ $1 = \frac{1+z}{i(1-z)}$

$$i(1 - z) = 1 + z$$

$$-iz - z = 1 - i$$

$$z = \frac{1-i}{-1-i}$$

เมื่อแทนค่า $w = 1$ ในตัวเลือก 4. จะทำให้ $\frac{w^2 + 2iw + 1}{w^2 - 1}$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

วิธีจริง

$$w = \frac{1+z}{i(1-z)}$$

$$wi = \frac{1+z}{1-z}$$

$$wi + 1 = \frac{1+z}{1-z} + 1 = \frac{1+z+1-z}{1-z} = \frac{2}{1-z}$$

$$1 - z = \frac{2}{wi+1}$$

$$z = 1 - \frac{2}{wi+1} \quad \dots (*)$$

เพราะฉะนั้น

$$z = \frac{wi+1-2}{wi+1} = \frac{wi-1}{wi+1} = \frac{(wi-1)(wi-1)}{(wi+1)(wi-1)} = \frac{(wi)^2 - 2wi + 1}{(wi)^2 - 1} = \frac{-w^2 - 2iw + 1}{-w^2 - 1} = \frac{w^2 + 2iw - 1}{w^2 + 1}$$

คำแนะนำ ในการหาสูตรของ z ในพจน์ของ w ขอให้นักเรียนสังเกตว่าจากสมการ (*) เราได้สูตร z แล้วแต่ยังไม่ตรงกับตัวเลือก ซึ่งในความจริง เรายังไม่รู้ด้วยซ้ำว่าจะจัดรูปไปยังตัวเลือกใด ดังนั้นจึงขอแนะนำว่า ขณะที่ทำตามวิธีจริงเมื่อเราได้สมการ (*) ควรจะแทนค่า w เพื่อตัดตัวเลือก

เช่น แทนค่า $w = 0$ จะได้ $z = 1 - \frac{2}{0+1} = -1$ ทำให้ตัดตัวเลือก 2. และ 3. ได้เหมือนกัน

ตัวอย่างที่ 1.28 ถ้า $g(x) = 3x^2$ แล้ว $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ เท่ากับเท่าใด

1. $6x$

2. $6x + h$

3. $6x + 3h$

4. $3h^2$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x และ h แทนค่า $x = 1, h = 1$

ในโจทย์จะได้ $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{g(1+1)-g(1)}{1} = g(2) - g(1) = 3(2^2) - 3(1^2) = 9$

และค่าแต่ละตัวเลือกคือ

1. $6x = 6(1) = 6 \neq 9$

2. $6x + h = 6(1) + 1 = 7 \neq 9$

3. $6x + 3h = 6(1) + 3(1) = 9$

4. $3h^2 = 3(1^2) = 3 \neq 9$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4.

หมายเหตุ การตัดตัวเลือกอย่างรวดเร็วก็คือ $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ ต้องมีทั้งตัวแปร x และ h

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ที่เร็วที่สุด

วิธีจริง ใช้การจัดรูปทางพีชคณิตดังนี้ $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{3(x+h)^2 - 3(x)^2}{h}$
 $= \frac{3}{h}((x+h)^2 - x^2) = \frac{3}{h}(x+h-x)(x+h+x) = \frac{3h(h+2x)}{h} = 6x + 3h$

ตัวอย่างที่ 1.29 ข้อมูล n ตัวประกอบด้วย $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{n2^n}$

2. $\frac{2^n+1}{n}$

3. $\frac{2^n-1}{n}$

4. $\frac{2^n-1}{n2^n}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โดยการแทนค่า $n = 2$ จะได้ว่ามีข้อมูล 2 ตัวเท่านั้นคือ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8}$ แทนค่า $n = 2$ ในตัวเลือกจะได้

$$1. \frac{1}{n2^n} = \frac{1}{(2)(4)} = \frac{1}{8} \neq \frac{3}{8}$$

$$2. \frac{2^n + 1}{n} = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2} \neq \frac{3}{8}$$

$$3. \frac{2^n - 1}{n} = \frac{2^2 - 1}{2} = \frac{3}{2} \neq \frac{3}{8}$$

$$4. \frac{2^n - 1}{n2^n} = \frac{4 - 1}{(2)(2)} = \frac{3}{8}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3.

วิธีจริง จากสูตรผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}$ เท่ากับ $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{n} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{n} = \frac{2^n - 1}{n2^n}$

ตัวอย่างที่ 1.30 ข้อมูล n ตัวประกอบด้วย $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}$ ค่ากึ่งกลางพิสัยมีค่าเท่ากับเท่าใด

$$1. \frac{2^n + 1}{2}$$

$$2. \frac{2^n + 1}{2n}$$

$$3. \frac{2^n + 2}{2^{n+2}}$$

$$4. \frac{2^n - 2}{2^{n+2}}$$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โดยการแทนค่า $n = 2$ จะได้ข้อมูล 2 ตัวคือ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้น ค่ากึ่งกลางพิสัย = $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8}$

แทนค่า $n = 2$ ในตัวเลือกแต่ละตัวจะได้ค่าดังนี้

$$1. \frac{2^n + 1}{2} = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2} \neq \frac{3}{8}$$

$$2. \frac{2^n + 1}{2n} = \frac{4 + 1}{4} = \frac{5}{4} \neq \frac{3}{8}$$

$$3. \frac{2^n + 2}{2^{n+2}} = \frac{4 + 2}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$4. \frac{2^n - 2}{2^{n+2}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \neq \frac{3}{8}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4.

วิธีจริง ค่ากึ่งกลางพิสัย = $\frac{\text{ค่าต่ำสุด} + \text{ค่าสูงสุด}}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}}{2} = \frac{2^n + 2}{2(2)(2^n)} = \frac{2^n + 2}{2^{n+2}}$ ตรงกับตัวเลือก 3.

ตัวอย่างที่ 1.31 การทดลองโยนลูกเต๋า n ลูก พร้อมกัน 1 ครั้ง

ให้ X_1 = จำนวนลูกเต๋าคี่ที่ขึ้นแต้ม 1, X_2 = จำนวนลูกเต๋าคี่ที่ขึ้นแต้ม 2,

X_3 = จำนวนลูกเต๋าคี่ที่ขึ้นแต้ม 3, X_4 = จำนวนลูกเต๋าคี่ที่ขึ้นแต้ม 4,

X_5 = จำนวนลูกเต๋าคี่ที่ขึ้นแต้ม 5, X_6 = จำนวนลูกเต๋าคี่ที่ขึ้นแต้ม 6

และ $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = n$

ความน่าจะเป็นที่ $X_1 = n_1, X_2 = n_2, X_3 = n_3, X_4 = n_4, X_5 = n_5, X_6 = n_6$

มีค่าเท่ากับเท่าใด

$$1. \frac{n!}{6^n n_1! n_2! n_3! n_4! n_5! n_6!}$$

$$2. \frac{n_1! n_2! n_3! n_4! n_5! n_6!}{6^n n!}$$

$$3. \frac{n_1! n_2! n_3! n_4! n_5! n_6!}{6^n 6! n!}$$

$$4. \frac{n!}{6^n 6! n_1! n_2! n_3! n_4! n_5! n_6!}$$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แทนค่า $n = 1$ และ $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0, n_4 = 0, n_5 = 0, n_6 = 0$

ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มหนึ่ง 1 ลูก ในการโยนลูกเต๋าคี่หนึ่งลูกเท่ากับ $\frac{1}{6}$

ค่าความน่าจะเป็นของแต่ละตัวเลือกคือ

$$1. \frac{1!}{6^1 1! 0! 0! 0! 0!} = \frac{1}{6}$$

$$2. \frac{1! 0! 0! 0! 0! 0!}{6^1 1!} = \frac{1}{6}$$

$$3. \frac{1! 0! 0! 0! 0! 0!}{6^1 6! 1!} = \frac{1}{6(6!)} \neq \frac{1}{6}$$

$$4. \frac{1!}{6^1 6! 1! 0! 0! 0! 0!} = \frac{1}{6(6!)} \neq \frac{1}{6}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

แทนค่า $n = 2$ และ $n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 0, n_4 = 0, n_5 = 0, n_6 = 0$

ในการโยนลูกเต๋าสองลูกพร้อมกัน

ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มหนึ่ง 1 ลูกและแต้มสอง 1 ลูก เท่ากับ $\frac{2}{36}$ (มาจากเหตุการณ์ (1, 2), (2, 1))

และค่าความน่าจะเป็นของแต่ละตัวเลือกที่เหลือคือ

$$1. \frac{2!}{6^2 1! 1! 0! 0! 0! 0!} = \frac{2}{36}$$

$$2. \frac{1! 1! 0! 0! 0! 0!}{6^2 2!} = \frac{1}{72} \neq \frac{2}{36}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

วิธีจริง S = แซมเปิลสเปซของการโยนลูกเต๋าคี่ n ลูก พร้อมกัน 1 ครั้ง

$$= \{(A_1, A_2, \dots, A_6) \mid A_i \text{ เป็นแต้มลูกเต๋าคี่ที่ } i \text{ เมื่อ } i = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$n(S) = (6)(6)(6) \dots (6) = 6^n$$

E = เหตุการณ์ที่ได้แต้มหนึ่ง n_1 ลูก, แต้มสอง n_2 ลูก, ..., แต้มหก n_6 ลูก

$n(E)$ = จำนวนวิธีจัดลำดับของ n สิ่งที่มีการซ้ำแต้มหนึ่ง n_1 ครั้ง ซ้ำแต้มสอง n_2 ครั้ง ซ้ำแต้มสาม n_3 ครั้ง ซ้ำแต้มสี่ n_4 ครั้ง ซ้ำแต้มห้า n_5 ครั้ง และ ซ้ำแต้มหก n_6 ครั้ง

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! n_4! n_5! n_6!}$$

เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มหนึ่ง n_1 ลูก, แต้มสอง n_2 ลูก แต้มสาม n_3 ลูก แต้มสี่ n_4 ลูก

แต้มห้า n_5 ลูก และ แต้มหก n_6 ลูก มีค่าเท่ากับ $\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{n!}{6^n n_1! n_2! n_3! n_4! n_5! n_6!}$

ตัวอย่างที่ 1.32 กำหนดให้ $|x| \geq 1$

ค่าของ $\arcsin(\cos(\arcsin \frac{1}{x})) + \arccos(\sin(\arccos \frac{1}{x}))$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 0 2. $\frac{\pi}{3}$ 3. $\frac{\pi}{2}$ 4. π

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นค่าคงตัว ใช้การแทนค่า x ที่เหมาะสมดีกว่า

แทนค่า $x = 1$ จะได้ $\arcsin(\cos(\arcsin 1)) = \arcsin(\cos \frac{\pi}{2}) = \arcsin(0) = 0$

และ $\arccos(\sin(\arccos 1)) = \arccos(\sin(0)) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้น $\arcsin(\cos(\arcsin 1)) + \arccos(\sin(\arccos 1)) = \frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4.

วิธีจริง ใช้สูตรตรีโกณมิติ $\arcsin k + \arccos k = \frac{\pi}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$, $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$

เพราะฉะนั้น $\arcsin(\cos(\arcsin \frac{1}{x})) + \arccos(\sin(\arccos \frac{1}{x}))$

$$= \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{x})) + \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{x}))$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{x} + \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{x} = \pi - (\arcsin \frac{1}{x} + \arccos \frac{1}{x}) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่างที่ 1.33 ถ้า $y = 5^{\ln(x+5)}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

1. $(\ln 5)(x+5)^{\ln 5}$ 2. $\frac{(\ln 5)(x+5)^{\ln 5}}{5}$
3. $(x+5)(\ln 5)(x+5)^{\ln 5}$ 4. $\frac{(\ln 5) 5^{\ln(x+5)}}{x+5}$

ตอบ 4.

แนวคิด วิธีจริง จากโจทย์ $y = 5^{\ln(x+5)}$

จะได้ $\ln y = \ln(5^{\ln(x+5)}) = \ln(x+5) \ln 5 = \ln 5 \ln(x+5) = \ln(x+5)^{\ln 5}$ เพราะฉะนั้น $y = (x+5)^{\ln 5}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x+5)^{\ln 5} = \ln 5 (x+5)^{(\ln 5)-1} \frac{d}{dx} (x+5) = \frac{(\ln 5)(x+5)^{\ln 5}}{x+5} \quad \dots (*)$$

เพราะว่า $(x+5)^{\ln 5} = y = 5^{\ln(x+5)}$ เพราะฉะนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{(\ln 5)(5^{\ln(x+5)})}{x+5}$ ตรงกับตัวเลือก 4.

การตัดตัวเลือก จากสมการ (*) แทนค่า x บางค่าก็สามารถตัดตัวเลือกได้

แทนค่า $x = 0$ ในสมการ (*) จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{(\ln 5)(5^{\ln 5})}{5}$ ค่าอนุพันธ์ของแต่ละตัวเลือกคือ

1. $(\ln 5)(5^{\ln 5}) \neq \frac{dy}{dx}$ 2. $\frac{(\ln 5)(5^{\ln 5})}{5}$
3. $(5 \ln 5)(5^{\ln 5}) \neq \frac{dy}{dx}$ 4. $\frac{(\ln 5)(5^{\ln 5})}{5}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.

ตัวอย่างที่ 1.34 ถ้า $f(x) = 2x - 1$ และ $g(x) = \frac{6}{x}$ แล้ว $(f \circ g)^{-1}(x)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 2.

ตอบ 1.

$$1. \ 2 - x^2 \qquad 2. \ \frac{1}{4}(11 - x^2)$$

3. $-\frac{1}{2}(5 - 4x - x^2)$

4. $\frac{1}{2}(-4 + 12x - 4x^2)$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 แทนค่า $x = 0$ ใน $(g \circ f)(x)$ และตัวเลือก

จะได้ $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g\left(\frac{5}{2}\right) = 2\left(\frac{5}{2}\right) - 3 = 5 - 3 = 2$ และค่า y ของแต่ละตัวเลือกคือ

1. $y = 2 - x^2 = 2$

2. $y = \frac{1}{4}(11 - x^2) = \frac{11}{4} \neq 2$

3. $y = -\frac{1}{2}(5 - 4x - x^2) = -\frac{5}{2} \neq 2$

4. $y = \frac{1}{2}(-4 + 12x - 4x^2) = -2 \neq 2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.

แบบที่ 2 การตัดตัวเลือกที่เร็วที่สุดคือการใช้ประโยชน์จาก $(g \circ f)(0) = 2$

เพราะฉะนั้น $(0, 2) \in g \circ f$ แทนค่า $x = 0$ และ $y = 2$ ในทุกตัวเลือกจะได้ค่าดังนี้

1. $x^2 + y = 0^2 + 2 = 2$

2. $x^2 + 4y = 0^2 + 4(2) = 8 \neq 11$

3. $x^2 + 4x - 2y = 0 + 0 - 2(2) = -4 \neq 2$

4. $4x^2 - 12x + 2y + 4 = 0 - 0 + 2(2) + 4 = 8 \neq 2$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2., 3. และ 4. ไม่ใช่ $g \circ f$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.

วิธีจริง $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{2}(5 - x^2)\right) - 3$

$$= 2\left(\frac{1}{2}(5 - x^2)\right) - 3 = 5 - x^2 - 3 = 2 - x^2$$

ตัวอย่างที่ 1.36 ถ้า $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ และ $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ แล้ว $f(x + y)$ จะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $f(x)g(y) + g(x)f(y)$

2. $f(x)g(x) + f(y)g(y)$

3. $g(x)f(y) - f(x)g(y)$

4. $f(y)g(y) - f(x)g(x)$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x, y, f และ g

จากสูตรของ f และ g จะได้ $f(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$ และ $f(1) = \frac{e - e^{-1}}{2} \neq 0$ และ $\frac{e - e^{-1}}{2} \neq 1$

และ $g(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$ และ $g(1) = \frac{e + e^{-1}}{2} \neq 0$ และ $\frac{e + e^{-1}}{2} \neq 1$

แทนค่า $x = 1$ และ $y = 0$ ค่าของโจทย์ $f(x + y) = f(1 + 0) = f(1)$ และค่าของตัวเลือกคือ

1. $f(x)g(y) + g(x)f(y) = f(1)g(0) + g(1)f(0) = (f(1))(1) + (g(1))(0) = f(1)$

2. $f(x)g(x) + f(y)g(y) = f(1)g(1) + f(0)g(0) = f(1)g(1) + (0)(1) = f(1)g(1) \neq f(1)$

3. $g(x)f(y) - f(x)g(y) = g(1)f(0) - f(1)g(0) = (g(1))(0) - (f(1))(1) = -f(1) \neq f(1)$

4. $f(y)g(y) - f(x)g(x) = f(0)g(0) - f(1)g(1) = (0)(1) - f(1)g(1) = -f(1)g(1) \neq f(1)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.

หมายเหตุ การตัดตัวเลือกชนิดเร็วที่สุดขอให้นักเรียนสังเกตดี ๆ จะเห็นว่า $f(x + y) = f(y + x)$

เพราะฉะนั้น แทน x ด้วย y และแทน y ด้วย x จะได้ค่าเท่าเดิม

ตัวเลือก 3. แทน x ด้วย y และแทน y ด้วย x ค่าจะต่างกัน

บทที่ 1 โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

ตัวเลือก 4. แทน x ด้วย y และแทน y ด้วย x ค่าจะต่างกัน
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้ก่อนที่จะแทนค่า

วิธีจริง $f(x+y) = \frac{e^{(x+y)} - e^{-(x+y)}}{2}$

$$f(x)g(y) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) = \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-(x+y)})$$

$$g(x)f(y) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) = \frac{1}{4}(e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-(x+y)})$$

$$f(x)g(y) + g(x)f(y) = \frac{1}{4}(2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}) = \frac{e^{(x+y)} - e^{-(x+y)}}{2} = f(x+y)$$

หมายเหตุ วิธีจริงยากมากเพราะว่าจริง ๆ แล้วเราไม่รู้ว่าตัวเลือกใดถูก จึงไม่รู้ว่าจะจัดรูปให้ตรงกับตัวเลือกใด เพียงแต่ข้อนี้โชคดีที่คำตอบอยู่ที่ตัวเลือก 1.

ตัวอย่างที่ 1.37 ถ้า $A = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(AB)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $1 + \cos^2 \theta + \cos^2 3\theta$

2. $1 - \cos^2 \theta + \cos^2 3\theta$

3. $1 + \cos^2 \theta - \cos^2 3\theta$

4. $1 - \cos^2 \theta - \cos^2 3\theta$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ θ แทนค่า $\theta = 0$ จะได้คิดเลขง่าย ๆ

จากโจทย์ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\det A = -1$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\det B = 1$, $\det(AB) = \det A \det B = (-1)(1) = -1$

เพราะว่า $\cos^2 \theta = \cos^2 0 = 1$ และ $\cos^2 3\theta = \cos^2 0 = 1$

เพราะฉะนั้นค่าตัวเลขในแต่ละตัวเลือกเป็นดังนี้

1. $1 + 1 + 1 = 3 \neq -1$

2. $1 - 1 + 1 = 1 \neq -1$

3. $1 + 1 - 1 = 1 \neq -1$

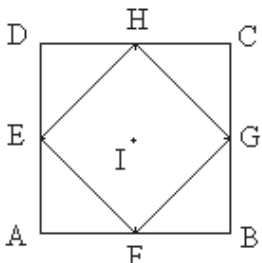
4. $1 - 1 - 1 = -1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3.

วิธีจริง $AB = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos 2\theta - \cos \theta \sin 2\theta & \cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta \\ \cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta & \sin \theta \cos 2\theta - \cos \theta \sin 2\theta \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} \sin(\theta - 2\theta) & \cos(\theta + 2\theta) \\ \cos(\theta + 2\theta) & \sin(\theta - 2\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos 3\theta \\ \cos 3\theta & -\sin \theta \end{bmatrix}$

$$\det(AB) = \sin^2 \theta - \cos^2 3\theta = 1 - \cos^2 \theta - \cos^2 3\theta$$

ตัวอย่างที่ 1.38 กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส E, F, G และ H เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AD, AB, BC และ CD ตามลำดับ I เป็นจุดกึ่งกลางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD ข้อใดต่อไปนี้ผิด



1. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$

2. $\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GH}$

3. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AF}$

4. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{AI}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์ที่มีภาพประกอบแบบนี้

เราใช้รูปจริงในพิกัดมุมฉากจะทำให้ตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างเช่น เลือกพิกัดของจุดต่างๆ ดังรูป

พิจารณาแต่ละตัวเลือก

$$1. \overrightarrow{DE} = -2\mathbf{j}, \overrightarrow{HG} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}, \overrightarrow{EH} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{FE} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \overrightarrow{FA} = -2\mathbf{i}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FA} = \mathbf{0}$$

$$2. \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{GF} = (-2\mathbf{j}) - (-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = 2\mathbf{i} \text{ และ } \overrightarrow{GH} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \neq 2\mathbf{i}$$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. ผิด

เพราะฉะนั้นผลจากการเลือกพิกัดข้างต้นแทนที่จะเป็นการตัดตัวเลือกเราได้คำตอบที่ต้องการทันที

เพราะโจทย์ข้อนี้ถามว่าตัวเลือกใดผิด

หมายเหตุ ข้อสอบแบบนี้ใช้การตัดตัวเลือกโดยการสมมติพิกัดของจุดเป็นวิธีที่ดีที่สุด

วิธีจริง ตัวเลือก 1., 2. และ 4. ถูกต้องแสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

$$1. \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FA}$$

$$= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FA} \quad (\text{เพราะว่า } \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EA} \text{ และ } \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF})$$

$$= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FA} \quad (\text{เพราะว่า } \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FE} = \mathbf{0})$$

$$= \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{BF} \quad (\text{เพราะว่า } \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{GB} \text{ และ } \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} \text{ และ } \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{BF})$$

$$= \mathbf{0} \quad (\text{เป็นเวกเตอร์ที่ประกอบด้านของสามเหลี่ยม BFG})$$

$$3. \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AF}$$

$$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AF}$$

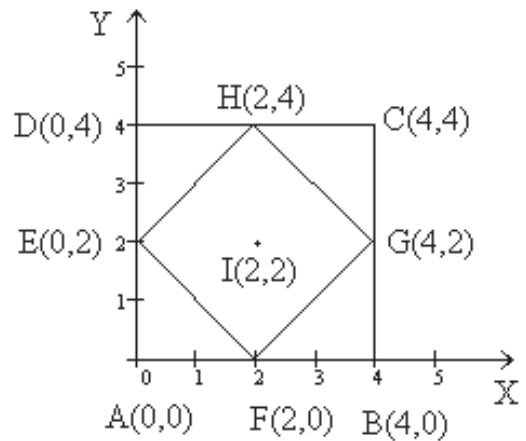
$$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AF}$$

$$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AF} \quad (\text{เพราะว่า } \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG})$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AF}$$

$$4. \text{เพราะว่า } \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AI} \text{ และ } \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AI}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{AI}$$

ตัวอย่างที่ 1.39 ถ้า $\sin 2\theta = a$ และ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $\cos \theta + \sin \theta$ เท่ากับเท่าใด

$$1. \sqrt{a+1}$$

$$2. (\sqrt{2} - 1)a + 1$$

$$3. \sqrt{a+1} - \sqrt{a^2 + a}$$

$$4. \sqrt{a+1} + \sqrt{a^2 + a}$$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a

บทที่ 1 โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

สมมติ $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ เพราะฉะนั้น $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$ เพราะฉะนั้น $2\theta = \frac{\pi}{3}$ เพราะฉะนั้น $\theta = \frac{\pi}{6}$

และ $\cos \theta + \sin \theta = \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{1.732+1}{2} = 1.366 \approx 1.4$

แทนค่า $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ในทุกตัวเลือก

$$1. \sqrt{a+1} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}+1} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} = \sqrt{\frac{1.732+2}{2}} = \sqrt{\frac{3.732}{2}} = \sqrt{1.866} = 1.366$$

$$2. (\sqrt{2}-1)a+1 = (\sqrt{2}-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}+2}{2} = \frac{2.45-1.732+2}{2} = \frac{2.718}{2} = 1.359$$

$$3. \sqrt{a+1} - \sqrt{a^2+a} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}+1} - \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} - \sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3+2\sqrt{3}})$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{4+2(1.732)} - \sqrt{3+2(1.732)})$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{4+3.464} - \sqrt{3+3.464}) = \frac{1}{2}(\sqrt{7.464} - \sqrt{6.464}) < 1$$

$$4. \sqrt{a+1} + \sqrt{a^2+a} \text{ จากตัวเลือก 3.}$$

$$\text{จะได้ว่า } \sqrt{a+1} + \sqrt{a^2+a} = \frac{1}{2}(\sqrt{7.464} + \sqrt{6.464}) > \frac{1}{2}(2+2) = 2$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

$$\text{วิธีจริง } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta = 1 + \sin 2\theta = 1 + a$$

เพราะว่า $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ เพราะฉะนั้น $\sin \theta + \cos \theta > 0$ เพราะฉะนั้น $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{1+a}$

ตัวอย่างที่ 1.40 สัมประสิทธิ์ของ x^r ในการกระจาย $(x^2 + \frac{1}{x})^{2n}$ คือข้อใดต่อไปนี้

$$1. \frac{(2n)!}{(\frac{2n+r}{3})!(\frac{4n-r}{3})!} \quad 2. \frac{(2n)!}{(\frac{4n-r}{3})!} \quad 3. \frac{(2n)!}{r!(2n-r)!} \quad 4. \frac{(2n)!}{(2r)!}$$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ n และ r

แทนค่า $n = 1$ จะได้ $(x^2 + \frac{1}{x})^{2(1)} = x^4 + 2x + \frac{1}{x^2}$

เมื่อ $r = 4$ จะได้สัมประสิทธิ์ x^4 เท่ากับ 1

แทนค่า $r = 4$ และ $n = 1$ ในทุกตัวเลือกจะได้

$$1. \frac{(2n)!}{(\frac{2n+r}{3})!(\frac{4n-r}{3})!} = \frac{2!}{2!0!} = 1 \quad 2. \frac{(2n)!}{(\frac{4n-r}{3})!} = \frac{2!}{0!} = 2 \neq 1$$

$$3. \frac{(2n)!}{r!(2n-r)!} = \frac{2!}{4!(-2)!} \text{ หาค่าไม่ได้} \quad 4. \frac{(2n)!}{(2r)!} = \frac{2!}{8!} \neq 1$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.

วิธีจริง พจน์ที่ $k + 1$ ของการกระจายทวินามของ $(a + b)^m$ คือ $T_{k+1} = \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$

พจน์ที่ $k + 1$ ของการกระจายทวินามของ $(x^2 + \frac{1}{x})^{2n}$

$$T_{k+1} = \binom{2n}{k} (x^2)^{2n-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \binom{2n}{k} x^{4n-2k} x^{-k} = \binom{2n}{k} x^{4n-3k}$$

เพราะว่าค่า k ที่ทำให้ $4n - 3k = r$ คือ $k = \frac{4n-r}{3}$ เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^r คือ $\binom{2n}{k}$

$$\binom{2n}{k} = \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} = \frac{(2n)!}{\left(\frac{4n-r}{3}\right)!(2n - \left(\frac{4n-r}{3}\right))!} = \frac{(2n)!}{\left(\frac{4n-r}{3}\right)!\left(\frac{2n+r}{3}\right)!}$$

ตัวอย่างที่ 1.41 ให้ $a \in \mathbb{R}^+$

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x - a \leq \sqrt{|x-a|}\}$ และ $B = [-a, a]$ ตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A - B = (-\infty, -a) \cup (a, a + 1]$
2. $A \cup B = [-a, a]$
3. $B - A = (-\infty, -a)$
4. $A \cap B = \{-a, 0, a\}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a เพราะฉะนั้นแทนค่า $a = 1$

เพราะว่า $B - A \subset B$ แต่ ตัวเลือก 3. $B - A = (-\infty, -1) \not\subset [-1, 1]$ เพราะฉะนั้น $B - A \neq (-\infty, -1)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

เพราะว่า $x = 2$ ทำให้ $2 - 1 = 1 \leq \sqrt{|2-1|}$ เพราะฉะนั้น $2 \in A$ เพราะฉะนั้น $2 \in A \cup B$

เพราะว่า 2 ไม่เป็นสมาชิก $[-1, 1]$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

เพราะว่า $x = 0.5$ ทำให้ $0.5 - 1 \leq \sqrt{|0.5-1|}$ เพราะฉะนั้น $0.5 \in A$ เพราะฉะนั้น $0.5 \in A \cap B$

เพราะว่าตัวเลือก 4. 0.5 ไม่เป็นสมาชิกของ $\{-1, 0, 1\}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

วิธีจริง $a \in \mathbb{R}^+$

กรณีที่ 1 $x < a$; $x - a < 0$
 เพราะฉะนั้น $x - a \leq \sqrt{|x-a|}$

กรณีที่ 2 $x \geq a$; $0 < x - a \leq \sqrt{x-a}$
 $0 < (x-a)^2 \leq x-a$

$$[(x-a)^2 - (x-a)] \leq 0$$

$$(x-a)(x-a-1) \leq 0$$

$$(x-a)(x-(a+1)) \leq 0$$

$$a \leq x \leq a+1$$

เพราะฉะนั้น $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x - a \leq \sqrt{|x-a|}\} = (-\infty, a) \cup [a, a+1] = (-\infty, a+1]$

เพราะฉะนั้น $A - B = (-\infty, a+1] - [-a, a] = (-\infty, -a) \cup (a, a+1]$