

แคลคูลัสและการวิเคราะห์เชิงจริง

Calculus and Real Analysis

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

เล่มที่ 1

แคลคูลัสและการวิเคราะห์เชิงจริง

Calculus and Real Analysis

เล่มที่ 1

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : แคลคูลัสและการวิเคราะห์เชิงจริง (Calculus and Real Analysis) เล่มที่ 1

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 1

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : ธันวาคม พ.ศ. 2565

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์ ISBN 978-616-594-832-6

คำนำ

การเรียนการสอนวิชา Calculus ต้องมีเนื้อหาพื้นฐานที่สำคัญเช่น ระบบจำนวนจริง ลำดับของจำนวนจริง ฟังก์ชันต่อเนื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน การอินทิเกรต อนุกรมของจำนวนจริง ฯลฯ การเรียนการสอนวิชา Real Analysis ต้องมีเนื้อหาพื้นฐานที่สำคัญเหมือนกันคือ ระบบจำนวนจริง ลำดับของจำนวนจริง ฟังก์ชันต่อเนื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน การอินทิเกรต อนุกรมของจำนวนจริง ฯลฯ แต่ในการเรียนการสอนจริง จะพบว่าวิชา Calculus และ Real Analysis แตกต่างกัน กล่าวคือวิชา Calculus ไม่เน้นการพิสูจน์แต่จะเน้นการคำนวณและประยุกต์ใช้งานโดยอ้างอิงหลักการและทฤษฎีบทที่สำคัญจากวิชา Real Analysis เช่น Bolzano-Weierstrass theorem, Monotone convergence theorem, Cauchy convergence criterion theorem, Mean value theorem, Rolle's theorem, Extreme value theorem, Cauchy mean value theorem แต่การเรียนการสอนวิชา Real Analysis จะเน้นหลักการทางคณิตศาสตร์ บทนิยาม การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่สำคัญต่าง ๆ ข้างต้น สรุปโดยย่อ Calculus เน้นคำนวณ Real Analysis เน้นพิสูจน์

ปัญหาจริงที่เกิดขึ้นในการเรียนการสอนวิชา Calculus และ Real Analysis คือนิสิตและนักศึกษาบางคนที่ยังเรียน Calculus สนใจและอยากเห็นวิธีพิสูจน์ทฤษฎีบทที่อาจารย์ผู้สอนนำมาใช้ ซึ่งในบางครั้งอาจารย์ผู้สอนต้องสอนเนื้อหาที่สำคัญกว่าจึงไม่มีเวลามากพอที่จะพิสูจน์ในชั้นเรียน ต้องแนะนำให้ถามนอกเวลา อ่านหนังสือเพิ่มเติม หรือให้ศึกษาเพิ่มเติมจากวิชา Real Analysis จึงจะได้เห็นวิธีพิสูจน์ที่ต้องการ

นิสิตและนักศึกษาคณเดิมนั้นแหละเชื่อคำแนะนำของอาจารย์ผู้สอน จึงไปซื้อหนังสือ Real Analysis มาอ่าน พออ่านถึงทฤษฎีบทที่อยากเห็นวิธีพิสูจน์ บางทีก็ไปเจอคำว่า ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด (เสียงบ่นในใจเบา ๆ ข้าพเจ้าเสียตั้งซื้อหนังสือของท่านมาอ่าน ท่านยังมาขอให้ข้าพเจ้าทำเป็นแบบฝึกหัดอีก) ต่อไปเชื่อคำแนะนำของอาจารย์ผู้สอน Calculus จึงไปลงทะเบียนเรียนวิชา Real Analysis อีก พอเรียนถึงทฤษฎีบทที่อยากเห็นวิธีพิสูจน์ อาจารย์ผู้สอนก็บอกว่าไม่มีเวลาพอที่จะพิสูจน์ทุกทฤษฎีบทในชั้นเรียน จึงสั่งให้ทำเป็นแบบฝึกหัดอีก (สมมติว่าอาจารย์สอน Calculus และอาจารย์สอน Real Analysis ไม่เป็นท่านเดียวกัน) แล้วปัญหาแบบนี้จะแก้อย่างไร

หนังสือ Calculus and Real Analysis เล่มนี้จะแก้ปัญหาข้างต้นได้ นิสิตและนักศึกษาที่กำลังเรียน Calculus สนใจและอยากเห็นวิธีพิสูจน์ทฤษฎีบทที่สำคัญ หนังสือเล่มนี้ก็จะพิสูจน์ให้ นิสิตและนักศึกษาที่กำลังเรียน Real Analysis และอ่านหนังสือเล่มนี้จะได้เห็นวิธีพิสูจน์ทฤษฎีบทที่สำคัญ (ไม่ต้องเจอคำสั่งว่าให้ทำเป็นแบบฝึกหัด) นอกจากนั้นทฤษฎีบทบางทฤษฎีบทมีวิธีพิสูจน์หลายแบบก็จะเขียนให้ผู้อ่านได้เลือกใช้ตามความเหมาะสมของสถาบันที่นิสิตและนักศึกษาเรียนขณะนั้น

เนื่องจากเนื้อหา Calculus and Real Analysis มีมากและผู้เขียนไม่เว้นเป็นแบบฝึกหัดให้ผู้อ่าน จึงต้องแบ่งหนังสือเป็น 2 เล่มคือ Part A และ Part B (ต้องขอร้องจริงๆ) สุดท้ายนี้ขอขอบคุณผู้อ่านที่ติดตามผลงานคณิตศาสตร์ปรนัยมาตลอด ผู้เขียนหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนสำหรับ นิสิต นักศึกษา และผู้สอนทุกท่านและทุกสถาบันที่ต้องศึกษาวิชา Calculus และ Real Analysis

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

บทที่ 1 ระบบจำนวนจริง	1 - 66
1.1 ระบบจำนวนจริง	1
1.2 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และค่าสัมบูรณ์	3
1.3 ฟังก์ชัน	8
1.4 The axiom of completeness (สัจพจน์ความบริบูรณ์)	10
1.5 จุดภายใน จุดขอบ เซตเปิด และเซตปิด	31
1.6 Compact set (เซตกระชับ)	49
แบบฝึกหัดบทที่ 1	62
บทที่ 2 ลำดับของจำนวนจริง	67 - 214
2.1 ลำดับของจำนวนจริง (Sequences of Real Numbers)	67
2.2 การแสดงว่าลำดับลู่ออกหรือลู่เข้า	79
2.3 ทฤษฎีบทลิมิต	102
2.4 Monotone convergence theorem และลำดับโคชี	116
2.5 Limit superior and Limit inferior	173
2.6 Contractive sequence (ลำดับหดตัว)	180
แบบฝึกหัดบทที่ 2	191
บทที่ 3 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	215 - 334
3.1 ลิมิตของฟังก์ชัน	215
3.2 Continuous functions (ฟังก์ชันต่อเนื่อง)	260
3.3 Intermediate Value Theorem (ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง)	278
3.4 Uniformly continuous functions (ฟังก์ชันต่อเนื่องสม่ำเสมอ)	298
แบบฝึกหัดบทที่ 3	327
บทที่ 4 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	335 - 472
4.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (Derivative of functions)	335
4.2 Maximum and Minimum	350
4.3 L'Hospital's rules and Indeterminate forms (กฎของโลปีตาลและรูปแบบไม่กำหนด)	392
แบบฝึกหัดบทที่ 4	463

บทที่ 1

ระบบจำนวนจริง

ในการศึกษาวิชาแคลคูลัส (Calculus) หรือวิชาวิเคราะห์จำนวนจริง (Real Analysis) มีเนื้อหาที่สำคัญ เช่น ลิมิต ความต่อเนื่อง อนุพันธ์ อินทิเกรต ลำดับ อนุกรม การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่สำคัญจำเป็นต้องมีความรู้เกี่ยวกับ ระบบจำนวนจริง อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ค่าสัมบูรณ์ ขอบเขตบน ขอบเขตล่าง การมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด เซตเปิด เซตปิด ในบทที่ 1 นี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับเนื้อหาสำคัญตามที่กล่าวมาข้างต้น

ข้อตกลง $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง, $\mathbb{Q}$ เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ, $\mathbb{N}$ เป็นเซตของจำนวนนับ

1.1 ระบบจำนวนจริง

บทนิยาม 1.1.1 ระบบของจำนวนจริง $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ มีคุณสมบัติ

1. ทุกค่า $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ $a + b \in \mathbb{R}$ (คุณสมบัติปิดภายใต้การบวก)
2. ทุกค่า $x, y \in \mathbb{R}$ จะได้ $x + y = y + x$ (คุณสมบัติสลับที่ภายใต้การบวก)
3. ทุกค่า $x, y, z \in \mathbb{R}$ จะได้ $x + (y + z) = (x + y) + z$ (คุณสมบัติเปลี่ยนกลุ่มภายใต้การบวก)
4. มี $0 \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $x + 0 = x$ ทุกค่า $x \in \mathbb{R}$ (คุณสมบัติมีเอกลักษณ์ภายใต้การบวก)
5. ทุกค่า $x \in \mathbb{R}$ มี $-x \in \mathbb{R}$ ตัวเดียวที่ทำให้ $x + (-x) = 0$ (คุณสมบัติมีอินเวอร์สภายใต้การบวก)
6. ทุกค่า $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ $a \cdot b \in \mathbb{R}$ (คุณสมบัติปิดภายใต้การคูณ)
7. ทุกค่า $x, y \in \mathbb{R}$ จะได้ $x \cdot y = y \cdot x$ (คุณสมบัติสลับที่ภายใต้การคูณ)
8. ทุกค่า $x, y, z \in \mathbb{R}$ จะได้ $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (คุณสมบัติเปลี่ยนกลุ่มภายใต้การคูณ)
9. มี $1 \in \mathbb{R}$ และ $1 \neq 0$ ที่ทำให้ $x \cdot 1 = x$ ทุกค่า $x \in \mathbb{R}$ (คุณสมบัติมีเอกลักษณ์ภายใต้การคูณ)
10. ทุกค่า $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ มี $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ ตัวเดียวที่ทำให้ $x \cdot (\frac{1}{x}) = 1$ (คุณสมบัติมีอินเวอร์สภายใต้การคูณ)
11. ทุกค่า $x, y, z \in \mathbb{R}$ จะได้ $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (คุณสมบัติกระจายภายใต้การบวกและการคูณ)

ข้อตกลง การคูณ $x \cdot y$ แทนด้วย xy , 0 เรียกว่า เอกลักษณ์การบวก, 1 เรียกว่า เอกลักษณ์การคูณ
คุณสมบัติที่สำคัญของระบบจำนวนจริง
ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$ จะได้

1. ถ้า $a \leq b$ และ $b \leq a$ แล้ว $a = b$
2. ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$
3. $a > b$ หรือ $a = b$ หรือ $a < b$
4. ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$

ทฤษฎีบท 1.1.2 ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ ถ้า $x \leq y + \varepsilon$ ทุกจำนวนจริงบวก ε แล้ว $x \leq y$

ข้อพิสูจน์ ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ และ $x \leq y + \varepsilon$ ทุกจำนวนจริงบวก ε ... (1)

สมมติ $x > y$... (2)

เพราะฉะนั้น $x - y > 0$ ให้ $\varepsilon = \frac{x-y}{2}$ เพราะฉะนั้น $\varepsilon > 0$... (3)

$$y + \varepsilon = y + \frac{x-y}{2} \quad (\text{จาก (3)})$$

$$= \frac{x+y}{2}$$

$$< \frac{x+x}{2} \quad (\text{จาก (2)})$$

$$= x$$

เพราะฉะนั้น $y + \varepsilon < x$

เพราะฉะนั้นมี $\varepsilon > 0$ และ $y + \varepsilon < x$ ซึ่งขัดแย้งกับ (1) เพราะฉะนั้นที่สมมติ (2) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $x \leq y$ □

ทฤษฎีบท 1.1.3 ถ้า $x \geq 0$ และ $x \leq \varepsilon$ ทุกจำนวนจริงบวก ε แล้ว $x = 0$

ข้อพิสูจน์ ให้ $x \geq 0$ และ $x \leq \varepsilon$ ทุกจำนวนจริงบวก ε ... (1)

สมมติ $x \neq 0$... (2)

เพราะว่า $x \geq 0$ และ $x \neq 0$ เพราะฉะนั้น $x > 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{x}{2} > 0$... (3)

จาก (1) และ (3) จะได้ $x < \frac{x}{2}$ เพราะ $x > 0$ เพราะฉะนั้น $1 < \frac{1}{2}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (2) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $x = 0$ □

บทนิยาม 1.1.1 ให้ $x \in \mathbb{R}$

ให้ $\lfloor x \rfloor$ เป็นจำนวนเต็มค่ามากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x (floor of x)

ให้ $\lceil x \rceil$ เป็นจำนวนเต็มค่าน้อยสุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ x (ceiling of x)

ตัวอย่างเช่น $\lfloor 4.1 \rfloor = 4, \lfloor 4.5 \rfloor = 4$ และ $\lfloor 4.9 \rfloor = 4$

$$\lceil 4.1 \rceil = 5, \lceil 4.5 \rceil = 5 \text{ และ } \lceil 4.9 \rceil = 5$$

1.2 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และค่าสัมบูรณ์

ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ เป็นข้อความในเทอมของ n

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แบบที่ 1

- ถ้า
1. $P(1)$ เป็นจริง
 2. ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว $P(k + 1)$ เป็นจริง

แล้ว $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แบบที่ 2

- ถ้า
1. $P(n_0)$ เป็นจริง
 2. ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq n_0$ แล้ว $P(k + 1)$ เป็นจริง

แล้ว $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ และ $n \geq n_0$

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แบบที่ 3

- ถ้า
1. $P(1)$ เป็นจริง
 2. ถ้า $P(k)$ เป็นจริง ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ แล้ว $P(n)$ เป็นจริง

แล้ว $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$

ทฤษฎีบท 1.2.1 (Bernoulli's inequality) ให้ $r > 0$ และ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ $(1 + r)^n \geq 1 + nr$

ข้อพิสูจน์ แบบที่ 1 ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ $(1 + r)^n \geq 1 + nr$ ”

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $(1 + r)^1 = 1 + 1r$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว $P(k + 1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

... (1)

$$\begin{aligned}
 (1 + r)^{k+1} &= (1 + r)^k (1 + r) \\
 &\geq (1 + kr)(1 + r) && \text{(จาก (1))} \\
 &= 1 + r + kr + kr^2 \\
 &\geq 1 + r + kr && (kr^2 \geq 0) \\
 &= 1 + (k + 1)r
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $P(k + 1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$

แบบที่ 2 $n = 1$ จะได้ $(1 + r)^1 = 1 + 1r$

$$n \geq 2 \text{ จะได้ } (1 + r)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^k = 1 + nr + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} r^k \geq 1 + nr$$

เพราะฉะนั้น $(1 + r)^n \geq 1 + nr$ ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$

□

บทนิยาม 1.2.1 ให้ $x \in \mathbb{R}$

$|x|$ เรียกว่า ค่าสัมบูรณ์ ของ x (absolute value of x) กำหนดโดย $|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$

ทฤษฎีบท 1.2.2 ให้ $x, y, a, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ และ $a \geq 0$ จะได้

1. $|x| = |-x|$ และ $|x| \geq 0$
2. $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$ (เพราะฉะนั้น $-|x| \leq x \leq |x|$)
3. $|xy| = |x| |y|$
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$ และ $|x - y| \leq |x| + |y|$ (เรียกว่า อสมการสามเหลี่ยม)
5. $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$
6. ถ้า $|x - y| < a$ แล้ว $|x| < |y| + a$
7. $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ (เรียกว่า อสมการสามเหลี่ยม)

ข้อพิสูจน์ 1. การแสดงว่า $|x| = |-x|$

กรณีที่ 1 $x = 0$ จะได้ $|-x| = |x|$

กรณีที่ 2 $x > 0$ จะได้ $|x| = x$ และ $-x < 0$ เพราะฉะนั้น $|-x| = -(-x) = x = |x|$

กรณีที่ 3 $x < 0$ จะได้ $|x| = -x$ และ $-x > 0$ เพราะฉะนั้น $|-x| = -x = |x|$

การแสดงว่า $|x| \geq 0$

กรณีที่ 1 $x = 0$ จะได้ $|x| = 0$

กรณีที่ 2 $x > 0$ จะได้ $|x| = x > 0$

กรณีที่ 3 $x < 0$ จะได้ $|x| = -x > 0$ เพราะว่า $x < 0$ เพราะฉะนั้น $-x > 0$ เพราะฉะนั้น $|x| > 0$
 เพราะฉะนั้น $|x| \geq 0$

2. ($\Rightarrow$) สมมติ $|x| \leq a$... (1)

กรณีที่ 1 $x \geq 0$ เพราะฉะนั้น $|x| = x$ เพราะฉะนั้น $0 \leq x \leq a$

เพราะว่า $a \geq 0$ เพราะฉะนั้น $-a \leq x \leq a$

กรณีที่ 2 $x < 0$ เพราะฉะนั้น $|x| = -x$ เพราะฉะนั้น $x = -|x|$... (2)

จาก (1) จะได้ $-a \leq -|x|$... (3)

จาก (2) และ (3) จะได้ $-a \leq x$... (4)

เพราะว่า $x < 0$ และ $a \geq 0$ เพราะฉะนั้น $x < a$... (5)

จาก (4) และ (5) จะได้ $-a \leq x \leq a$

($\Leftarrow$) สมมติ $-a \leq x \leq a$

กรณีที่ 1 $x \geq 0$ เพราะฉะนั้น $|x| = x$ เพราะฉะนั้น $-a \leq |x| \leq a$ เพราะฉะนั้น $|x| \leq a$

กรณีที่ 2 $x < 0$ เพราะฉะนั้น $|x| = -x$ เพราะฉะนั้น $x = -|x|$

เพราะว่า $-a \leq x \leq a$ เพราะฉะนั้น $-a \leq |x| \leq a$ เพราะฉะนั้น $-a \leq |x| \leq a$

เพราะฉะนั้น $|x| \leq a$

เพราะว่า $|x| \leq |x|$ ก็ต่อเมื่อ $-|x| \leq x \leq |x|$ และ $|x| \leq |x|$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $-|x| \leq x \leq |x|$

3. กรณีที่ 1 $x = 0$ หรือ $y = 0$ เพราะฉะนั้น $|xy| = 0 = |x| |y|$

กรณีที่ 2 $x \neq 0$ และ $y \neq 0$

กรณีที่ 2.1 $x > 0$ และ $y > 0$ เพราะฉะนั้น $xy > 0$ เพราะฉะนั้น $|xy| = xy$

เพราะฉะนั้น $|x| |y| = xy = |xy|$

กรณีที่ 2.2 $x > 0$ และ $y < 0$ เพราะฉะนั้น $xy < 0$ เพราะฉะนั้น $|xy| = -xy$

เพราะฉะนั้น $|x| |y| = (x)(-y) = -xy = |xy|$

กรณีที่ 2.3 $x < 0$ และ $y > 0$ เพราะฉะนั้น $xy < 0$ เพราะฉะนั้น $|xy| = -xy$

เพราะฉะนั้น $|x| |y| = (-x)(y) = -xy = |xy|$

กรณีที่ 2.4 $x < 0$ และ $y < 0$ เพราะฉะนั้น $xy > 0$ เพราะฉะนั้น $|xy| = xy$

เพราะฉะนั้น $|x| |y| = (-x)(-y) = xy = |xy|$

4. เพราะว่ $-|x| \leq x \leq |x|$ และ $-|y| \leq y \leq |y|$ เพราะฉะนั้น $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$

เพราะฉะนั้น $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$ เพราะฉะนั้น $|x + y| \leq |x| + |y|$

ผลจากข้างต้นจะได้ $|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$

5. เพราะว่ $|x| = |x - y + y|$

$$\leq |x - y| + |y| \quad (\text{จากข้อ 4})$$

เพราะฉะนั้น $|x| - |y| \leq |x - y| \quad \dots (1)$

$$|y| = |-y|$$

$$= |-x + x - y|$$

$$\leq |-x| + |x - y| \quad (\text{จากข้อ 4})$$

$$= |x| + |x - y|$$

เพราะฉะนั้น $|y| \leq |x| + |x - y|$ เพราะฉะนั้น $|x - y| \leq |x| - |y| \quad \dots (2)$

จาก (1) และ (2) จะได้ $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$ เพราะฉะนั้น $||x| - |y|| \leq |x - y|$

6. ให้ $|x - y| \leq a$

เพราะว่ $||x| - |y|| \leq |x - y|$ เพราะฉะนั้น $||x| - |y|| \leq a$

เพราะฉะนั้น $-a \leq |x| - |y| \leq a$ เพราะฉะนั้น $|x| - |y| \leq a$ เพราะฉะนั้น $|x| \leq |y| + a$

7. ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ ”

(1) การแสดงว่า $P(1)$ และ $P(2)$ เป็นจริง

เพราะว่า $|x_1| \leq |x_1|$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$ เพราะฉะนั้น $P(2)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 2$ แล้ว $P(k + 1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 2$

ให้ $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1}| &= |(x_1 + x_2 + \dots + x_k) + x_{k+1}| \\ &\leq |x_1 + x_2 + \dots + x_k| + |x_{k+1}| \quad (P(2) \text{ เป็นจริง}) \\ &\leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| + |x_{k+1}| \quad (P(k) \text{ เป็นจริง}) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $P(k + 1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ □

ทฤษฎีบท 1.2.3 ให้ $a, b \in \mathbb{R}$

จะได้ 1. ถ้า $a \leq b + \varepsilon$ ทุกค่า $\varepsilon > 0$ แล้ว $a \leq b$

2. ถ้า $0 \leq a - b \leq \varepsilon$ ทุกค่า $\varepsilon > 0$ แล้ว $a = b$

3. ถ้า $|a - b| < \varepsilon$ ทุกค่า $\varepsilon > 0$ แล้ว $a = b$

ข้อพิสูจน์ ให้ $a, b \in \mathbb{R}$

1. ให้ $a \leq b + \varepsilon$ ทุกค่า $\varepsilon > 0$... (1)

สมมติ $a > b$... (2)

เพราะฉะนั้น $a - b > 0$... (3)

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}(a - b)$ เพราะฉะนั้น $\varepsilon > 0$... (4)

จาก (1) และ (4) จะได้ $a \leq b + \frac{1}{2}(a - b)$

$$2a \leq 2b + (a - b)$$

$$a \leq b$$

$$a - b \leq 0 \quad \text{... (5)}$$

เพราะฉะนั้น (3) และ (5) ขัดแย้งกัน เพราะฉะนั้นที่สมมติ (2) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $a \leq b$

2. ให้ $0 \leq a - b \leq \varepsilon$ ทุกค่า $\varepsilon > 0$... (1)

เพราะว่า $0 \leq a - b$ เพราะฉะนั้น $b \leq a$... (2)

สมมติ $b < a$... (3)

เพราะฉะนั้น $a - b > 0$ ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}(a - b)$ เพราะฉะนั้น $\varepsilon > 0$... (4)

จาก (1) และ (4) จะได้ $0 < a - b \leq \varepsilon$ เพราะฉะนั้น $0 < a - b < \frac{1}{2}(a - b)$

เพราะว่า $a - b > 0$ เพราะฉะนั้น $1 \leq \frac{1}{2}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (3) ไม่จริง เพราะฉะนั้น $b \geq a$... (5)

จาก (2) และ (5) จะได้ $a = b$

3. ให้ $|a - b| < \varepsilon$ ทุกค่า $\varepsilon > 0$ เพราะฉะนั้น $0 \leq |a - b| < \varepsilon$ ทุกค่า $\varepsilon > 0$

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $a \geq b$ เพราะฉะนั้น $|a - b| = a - b$
 เพราะฉะนั้น $0 \leq a - b < \varepsilon$ ทุกค่า $\varepsilon > 0$ โดยผลของข้อ 2 จะได้ $a = b$ □

ตัวอย่าง 1.2.1 จงแสดงว่า $2^n \geq n$ ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$

แนวคิด แบบที่ 1 ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ $2^n \geq n$ ”

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $2^1 \geq 1$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว $P(k + 1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$... (1)

$$2^{k+1} = 2^k (2)$$

$$\geq k(2) \quad \text{(จาก (1))}$$

$$= k + k \geq k + 1 \quad \text{(จาก (1))}$$

เพราะฉะนั้น $P(k + 1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$

แบบที่ 2 ใช้ผลของอสมการแบร์นูลลี

เพราะว่า $(1 + r)^n \geq 1 + nr$ ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ เมื่อ $r > 0$ เพราะฉะนั้น $(1 + 1)^n \geq 1 + n$ ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$

เพราะฉะนั้น $2^n \geq n$ ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ □

ตัวอย่าง 1.2.2 จงแสดงว่า $n! \geq 2^{n-1}$ ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$

แนวคิด ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ $n! \geq 2^{n-1}$ ”

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $1! = 1 \geq 1 = 2^{1-1}$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว $P(k + 1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$(k + 1)! = (k!)(k + 1)$$

$$\geq 2^{k-1} (k + 1) \quad \text{(P(k) เป็นจริง)}$$

$$\geq 2^{k-1} (1 + 1) \quad \text{(k \ge 1)}$$

$$= 2^k = 2^{(k+1)-1}$$

เพราะฉะนั้น $P(k + 1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ เพราะฉะนั้น $n! \geq 2^{n-1}$ ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ □

1.3 ฟังก์ชัน

บทนิยาม 1.3.1 ให้ $A \subset \mathbb{R}$ และ $B \subset \mathbb{R}$

1. $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$ เรียกว่า **ผลคูณคาร์ทีเซียน** ของ A และ B

2. $f \subset A \times B$

f เป็น **ฟังก์ชัน** (function) จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ (ถ้า $(a, b) \in f$ และ $(a, c) \in f$ แล้ว $b = c$)

โดเมน (domain) ของ f คือ $\{a \in A \mid \text{มี } b \in B \text{ ที่ทำให้ } (a, b) \in f\}$

ใช้สัญลักษณ์แทนโดเมนของ f ด้วย $\text{Domain } f$, D_f หรือ Domain_f

พิสัย (range) ของ f คือ $\{b \in B \mid \text{มี } a \in A \text{ ที่ทำให้ } (a, b) \in f\}$ และ B เรียกว่า **codomain**

ใช้สัญลักษณ์แทนพิสัยของ f ด้วย $\text{Range } f$, R_f หรือ Range_f

ถ้า $\text{Domain}_f = A$ แล้ว f เรียกว่า **ฟังก์ชันจาก A ไป B** (f is a function from A into B)

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $f : A \rightarrow B$

3. ให้ $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ เพราะฉะนั้น $f(A) \subset B$

4. $f : A \rightarrow B$ เป็น **ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** (injective, one-to-one)

ก็ต่อเมื่อ ทุกค่า $x, y \in A$ ถ้า $f(x) = f(y)$ แล้ว $x = y$

5. $f : A \rightarrow B$ เป็น **ฟังก์ชันทั่วถึง** (surjective, onto) ก็ต่อเมื่อ ทุกค่า $b \in B$ จะมี $a \in A$ ที่ทำให้ $f(a) = b$

6. $f : A \rightarrow B$ เป็น **ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง** (one-to-one and onto, bijective)

ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

บทนิยาม 1.3.2 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subset \mathbb{R}$

1. f เป็น **ฟังก์ชันเพิ่มแท้** (increasing or strictly increasing)

ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) < f(y)$ ทุกค่า $x, y \in D$

2. f เป็น **ฟังก์ชันไม่ลดค่า** (non-decreasing) ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) \leq f(y)$ ทุกค่า $x, y \in D$

3. f เป็น **ฟังก์ชันลดแท้** (decreasing or strictly decreasing)

ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) > f(y)$ ทุกค่า $x, y \in D$

4. f เป็น **ฟังก์ชันไม่เพิ่มค่า** (non-increasing) ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) \geq f(y)$ ทุกค่า $x, y \in D$

5. f เป็น **ฟังก์ชันทางเดียวแท้** (strictly monotone) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มแท้ หรือ f เป็นฟังก์ชันลดแท้

6. f เป็น **ฟังก์ชันทางเดียว** (monotone) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันไม่ลดค่า หรือ f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มค่า

หมายเหตุ

1. คำว่า **ฟังก์ชันเพิ่ม** (increasing) ในหนังสือบางเล่มอาจให้ความหมายต่างกันไปเช่น

หนังสือเล่มที่ 1 ใช้บทนิยามว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) \leq f(y)$ ทุกค่า $x, y \in D$

หนังสือเล่มที่ 2 ใช้บทนิยามว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) < f(y)$ ทุกค่า $x, y \in D$

เพื่อให้ความหมายชัดเจนหนังสือเล่มนี้จึงขอใช้

f เป็นฟังก์ชันไม่ลดค่า ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) \leq f(y)$ ทุกค่า $x, y \in D$

f เป็นฟังก์ชันเพิ่มแท้ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) < f(y)$ ทุกค่า $x, y \in D$

2. คำว่า **ฟังก์ชันลด** (increasing) ในหนังสือบางเล่มอาจให้ความหมายต่างกันไปเช่น

หนังสือเล่มที่ 1 ใช้บทนิยามว่า f เป็นฟังก์ชันลด ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) \geq f(y)$ ทุกค่า $x, y \in D$

หนังสือเล่มที่ 2 ใช้บทนิยามว่า f เป็นฟังก์ชันลด ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) > f(y)$ ทุกค่า $x, y \in D$

เพื่อให้ความหมายชัดเจนหนังสือเล่มนี้จึงขอใช้

f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มค่า ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) \geq f(y)$ ทุกค่า $x, y \in D$

f เป็นฟังก์ชันลดแท้ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) > f(y)$ ทุกค่า $x, y \in D$

ทฤษฎีบท 1.3.1 ให้ $f : D \rightarrow R$ จะได้

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มแท้บน D แล้ว f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันลดแท้บน D แล้ว f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
3. ถ้า f เป็นฟังก์ชันทางเดียวแท้บน D แล้ว f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ข้อพิสูจน์ ให้ $f : D \rightarrow R$

... (1)

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มแท้บน D

... (2)

สมมติ f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

... (3)

เพราะฉะนั้นมี $x_1, x_2 \in D$ ที่ทำให้ $f(x_1) = f(x_2)$ และ $x_1 \neq x_2$

... (4)

กรณีที่ 1 $x_1 < x_2$ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มแท้บน D เพราะฉะนั้น $f(x_1) < f(x_2)$

กรณีที่ 2 $x_1 > x_2$ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มแท้บน D เพราะฉะนั้น $f(x_1) > f(x_2)$

เพราะว่าทั้งสองกรณีจะเกิดข้อขัดแย้งกับ $f(x_1) = f(x_2)$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (3) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2. ให้ f เป็นฟังก์ชันลดแท้บน D

... (5)

สมมติ f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

... (6)

เพราะฉะนั้นมี $x_1, x_2 \in D$ ที่ทำให้ $f(x_1) = f(x_2)$ และ $x_1 \neq x_2$

... (7)

กรณีที่ 1 $x_1 < x_2$ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันลดแท้บน D เพราะฉะนั้น $f(x_1) > f(x_2)$

กรณีที่ 2 $x_1 > x_2$ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันลดแท้บน D เพราะฉะนั้น $f(x_1) < f(x_2)$

เพราะว่าทั้งสองกรณีจะเกิดข้อขัดแย้งกับ $f(x_1) = f(x_2)$ เพราะฉะนั้นที่สมมติ (6) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

3. ให้ f เป็นฟังก์ชันทางเดียวแท้บน D

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มแท้บน D หรือ f เป็นฟังก์ชันลดแท้บน D

โดยผลของข้อ 1 และ 2 จะได้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

□

1.4 The axiom of completeness (สัจพจน์ความบริบูรณ์)

บทนิยาม 1.4.1 ให้ $a, b \in \mathbb{R}$ และ $a \leq b$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, & (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, & [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < \infty\}, & [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < \infty\} \\ (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < b\}, & (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq b\} \\ (-\infty, \infty) &= \mathbb{R} \text{ และ } (a, a) = \emptyset \end{aligned}$$

เซตทุกเซตข้างต้นเรียกว่า **ช่วง** (interval)

(a, b) เรียกว่า **ช่วงเปิด** (open interval)

$[a, b]$ เรียกว่า **ช่วงปิด** (close interval)

$(a, b], [a, b)$ เรียกว่า **ช่วงครึ่งปิด หรือ ช่วงครึ่งเปิด** (half-close interval or half-open interval)

บทนิยาม 1.4.2 ให้ $S \subset \mathbb{R}$ และ $S \neq \emptyset$ ให้ $u, l \in \mathbb{R}$

1. ถ้า $s \leq u$ ทุกค่า $s \in S$ แล้ว u เรียกว่า **ขอบเขตบน** ของ S (upper bound of S)

2. ถ้า $s \geq l$ ทุกค่า $s \in S$ แล้ว l เรียกว่า **ขอบเขตล่าง** ของ S (lower bound of S)

3. S มี**ขอบเขต** (bounded) ก็ต่อเมื่อ S มีขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

เพราะฉะนั้น S มีขอบเขต (bounded) ก็ต่อเมื่อ มี $B \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $|s| \leq B$ ทุกค่า $s \in S$

4. ถ้า u เป็นขอบเขตบนของ S และ $u \leq k$ แล้ว k เป็นขอบเขตบนของ S

เพราะฉะนั้น ถ้า S มีขอบเขตบน แล้ว S มีขอบเขตบนได้หลายค่า

5. ถ้า l เป็นขอบเขตล่างของ S และ $l \geq k$ แล้ว k เป็นขอบเขตล่างของ S

เพราะฉะนั้น ถ้า S มีขอบเขตล่าง แล้ว S มีขอบเขตล่างได้หลายค่า

6. ถ้า u เป็นขอบเขตบนของ S และ $u \in S$ แล้ว u เรียกว่า **ค่าสูงสุด** ของ S (maximum of S)

เพราะฉะนั้น ถ้า S มีค่าสูงสุด แล้วค่าสูงสุดของ S มีได้ค่าเดียว

ใช้สัญลักษณ์แทนค่าสูงสุดของ S ด้วย $\max S, \max(S), \text{Max } S, \text{Max}(S), \text{Max}_S, \max_S$

7. ถ้า l เป็นขอบเขตล่างของ S และ $l \in S$ แล้ว l เรียกว่า **ค่าต่ำสุด** ของ S (minimum of S)

เพราะฉะนั้น ถ้า S มีค่าต่ำสุด แล้วค่าต่ำสุดของ S มีได้ค่าเดียว

ใช้สัญลักษณ์แทนค่าต่ำสุดของ S ด้วย $\min S, \min(S), \text{Min } S, \text{Min}(S), \text{Min}_S, \min_S$

8. ถ้า S เป็นเซตจำกัด แล้ว S มีค่า $\max S$ และ $\min S$

ตัวอย่างเช่น

$S = (0, 1)$ จะได้ 0 เป็นขอบเขตล่างของ S , 1 เป็นขอบเขตบนของ S , S ไม่มีค่าต่ำสุด และ S ไม่มีค่าสูงสุด

$S = [0, 1)$ จะได้ 0 เป็นขอบเขตล่างของ S , 1 เป็นขอบเขตบนของ S , $\min S = 0$ และ S ไม่มีค่าสูงสุด

$S = [0, 1]$ จะได้ 0 เป็นขอบเขตล่างของ S , 1 เป็นขอบเขตบนของ S , $\min S = 0$ และ $\max S = 1$

$S = (-\infty, 1)$ จะได้ S ไม่มีขอบเขตล่าง, 1 เป็นขอบเขตบนของ S , S ไม่มีค่าต่ำสุด และ S ไม่มีค่าสูงสุด

$S = (-\infty, 1]$ จะได้ S ไม่มีขอบเขตล่าง, 1 เป็นขอบเขตบนของ S , S ไม่มีค่าต่ำสุด และ $\max S = 1$

$S = (-\infty, \infty)$ จะได้ S ไม่มีขอบเขตล่าง และ S ไม่มีขอบเขตบน

บทนิยาม 1.4.3 ให้ $S \subset \mathbb{R}$ และ $S \neq \emptyset$ และ S มีขอบเขตบน

u เป็น **ขอบเขตบนค่าน้อยสุด** (least upper bound, supremum) ของ S ก็ต่อเมื่อ

1. u เป็นขอบเขตบนของ S (กล่าวคือ $u \geq s$ ทุกค่า $s \in S$)

และ 2. ถ้า c เป็นขอบเขตบนของ S แล้ว $u \leq c$

ข้อตกลง ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\sup S$, $\sup(S)$, lub S

ทฤษฎีบท 1.4.1 ให้ $S \subset \mathbb{R}$ และ $S \neq \emptyset$ และ S มีขอบเขตบน จะได้

$u = \sup S$ ก็ต่อเมื่อ 1. u เป็นขอบเขตบนของ S
และ 2. ถ้า $m < u$ แล้ว มี $s \in S$ ที่ทำให้ $m < s \leq u$

ข้อพิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติ $u = \sup S$... (1)

เพราะฉะนั้น u เป็นขอบเขตบนของ S ... (2)

ให้ $m < u$... (3)

สมมติ $s \leq m$ ทุกค่า $s \in S$... (4)

เพราะฉะนั้น m เป็นขอบเขตบนของ S เพราะฉะนั้น $\sup S \leq m$

เพราะฉะนั้น $u \leq m$ เกิดข้อขัดแย้งกับ (3) เพราะฉะนั้นที่สมมติ (4) ไม่จริง

เพราะฉะนั้นมี $s \in S$ ที่ทำให้ $m < s$

เพราะฉะนั้น u เป็นขอบเขตบนของ S และ ถ้า $m < u$ แล้ว มี $s \in S$ ที่ทำให้ $m < s \leq u$

($\Leftarrow$) สมมติ 1. u เป็นขอบเขตบนของ S ... (5)

และ 2. ถ้า $m < u$ แล้ว มี $s \in S$ ที่ทำให้ $m < s \leq u$... (6)

ให้ w เป็นขอบเขตบนของ S ... (7)

สมมติ $w < u$... (8)

จาก (6) จะได้ว่ามี $s \in S$ ที่ทำให้ $w < s \leq u$

เพราะฉะนั้น w ไม่เป็นขอบเขตบนของ S เพราะฉะนั้นเกิดขัดแย้งกับ (7)

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (8) ไม่จริง เพราะฉะนั้น $w \geq u$

เพราะฉะนั้น ถ้า w เป็นขอบเขตบนของ S แล้ว $u \leq w$

เพราะฉะนั้น $u = \sup S$ □

บทนิยาม 1.4.3 ให้ $S \subset \mathbb{R}$ และ $S \neq \emptyset$ และ S มีขอบเขตล่าง

ℓ เป็น **ขอบเขตล่างค่ามากที่สุด** (greatest lower bound, infimum) ของ S ก็ต่อเมื่อ

1. ℓ เป็นขอบเขตล่างของ S (กล่าวคือ $\ell \leq s$ ทุกค่า $s \in S$)

และ 2. ถ้า m เป็นขอบเขตล่างของ S แล้ว $m \leq \ell$

ข้อตกลง ขอบเขตล่างค่ามากที่สุดของ S ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\inf S$, $\inf(S)$ หรือ glb S

ทฤษฎีบท 1.4.2 ให้ $S \subset \mathbb{R}$ และ $S \neq \emptyset$ และ S มีขอบเขตล่าง จะได้

$l = \inf S$ ก็ต่อเมื่อ 1. l เป็นขอบเขตล่างของ S

และ 2. ถ้า $l < m$ แล้ว มี $s \in S$ ที่ทำให้ $l \leq s < m$

ข้อพิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติ $l = \inf S$... (1)

เพราะฉะนั้น l เป็นขอบเขตล่างของ S ... (2)

ให้ $l < m$... (3)

สมมติ $s \geq m$ ทุกค่า $s \in S$... (4)

เพราะฉะนั้น m เป็นขอบเขตล่างของ S เพราะฉะนั้น $m \leq \inf S$

เพราะฉะนั้น $m \leq l$ เกิดข้อขัดแย้งกับ (3) เพราะฉะนั้นที่สมมติ (4) ไม่จริง

เพราะฉะนั้นมี $s \in S$ ที่ทำให้ $s < m$

เพราะฉะนั้น l เป็นขอบเขตล่างของ S และ ถ้า $l < m$ แล้ว มี $s \in S$ ที่ทำให้ $l \leq s < m$

($\Leftarrow$) สมมติ 1. l เป็นขอบเขตล่างของ S ... (5)

และ 2. ถ้า $l < m$ แล้ว มี $s \in S$ ที่ทำให้ $l \leq s < m$... (6)

ให้ m เป็นขอบเขตล่างของ S ... (7)

สมมติ $l < m$... (8)

จาก (6) จะได้ว่ามี $s \in S$ ที่ทำให้ $l \leq s < m$

เพราะฉะนั้น m ไม่เป็นขอบเขตล่างของ S เพราะฉะนั้นเกิดขัดแย้งกับ (7)

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (8) ไม่จริง เพราะฉะนั้น $l \geq m$

เพราะฉะนั้น ถ้า m เป็นขอบเขตล่างของ S แล้ว $m \leq l$

เพราะฉะนั้น $l = \inf S$ □

สมบัติที่สำคัญของระบบจำนวนจริงคือ Completeness axiom ซึ่งกล่าวว่า

ถ้า $S \subset \mathbb{R}$ และ $S \neq \emptyset$ และ S มีขอบเขตบน แล้วจะได้ว่า S มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

เนื่องจากการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ มีการกล่าวอ้าง Completeness axiom จึงขอกำหนด Completeness axiom เป็นทฤษฎีบท 1.4.3 ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.4.3 (The axiom of completeness, สัจพจน์ความบริบูรณ์)

ถ้า $S \subset \mathbb{R}$ และ $S \neq \emptyset$ และ S มีขอบเขตบน แล้วจะได้ว่า S มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

ทฤษฎีบท 1.4.4 ให้ $S \subset \mathbb{R}$ และ $S \neq \emptyset$ และ S มีขอบเขตล่าง จะได้ S มีขอบเขตล่างค่ามากที่สุด

ข้อพิสูจน์ ให้ $S \subset \mathbb{R}$ และ $S \neq \emptyset$ และ S มีขอบเขตล่าง ... (1)

ให้ l เป็นขอบเขตล่างของ S

เพราะฉะนั้น $l \leq s$ ทุกค่า $s \in S$... (2)

ให้ $T = \{-s \mid s \in S\}$

เพราะว่า $S \neq \emptyset$ เพราะฉะนั้น $T \neq \emptyset$... (3)

ให้ $t \in T$

เพราะฉะนั้นมี $s \in S$ ที่ทำให้ $t = -s$... (4)

เพราะว่า $l \leq s$ (จาก (2)) เพราะฉะนั้น $-s \leq -l$

เพราะฉะนั้น $t \leq -l$

เพราะฉะนั้น $t \leq -l$ ทุกค่า $t \in T$ เพราะฉะนั้น $-l$ เป็นขอบเขตบนของ T ... (5)

จาก (3) และ (5) จะได้ $T \neq \emptyset$ และ T มีขอบเขตบน

โดย Completeness axiom จะได้ T มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

ให้ $t_0 = \sup T$... (6)

การแสดงว่า $-t_0$ เป็นขอบเขตล่างค่ามากที่สุดของ S

ให้ $s \in S$

เพราะฉะนั้น $-s \in T$ จาก (6) จะได้ $-s \leq t_0$ เพราะฉะนั้น $-t_0 \leq s$

เพราะฉะนั้น $-t_0 \leq s$ ทุกค่า $s \in S$

เพราะฉะนั้น $-t_0$ เป็นขอบเขตล่างของ S ... (7)

ให้ m เป็นขอบเขตล่างของ S

ให้ $t \in T$

เพราะฉะนั้น $-t \in S$

เพราะว่า m เป็นขอบเขตล่างของ S เพราะฉะนั้น $m \leq -t$

เพราะฉะนั้น $t \leq -m$

เพราะฉะนั้น $t \leq -m$ ทุกค่า $t \in T$ เพราะฉะนั้น $-m$ เป็นขอบเขตบนของ T

เพราะว่า $t_0 = \sup T$ (จาก (6)) เพราะฉะนั้น $t_0 \leq -m$ เพราะฉะนั้น $m \leq -t_0$

เพราะฉะนั้น ทุกค่า m ที่เป็นขอบเขตล่างของ S จะได้ $m \leq -t_0$... (8)

จาก (7) และ (8) จะได้ $-t_0$ เป็นขอบเขตล่างค่ามากที่สุดของ S

เพราะฉะนั้น S มีขอบเขตล่างค่ามากที่สุด □

ผลจากทฤษฎีบท 1.4.3 และทฤษฎีบท 1.4.4 จะได้

ทฤษฎีบท 1.4.5 ให้ $S \subset \mathbb{R}$ และ $S \neq \emptyset$ และ S มีขอบเขต

จะได้ว่า S มีขอบเขตล่างค่ามากที่สุด และ S มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

หมายเหตุ ให้ $S \subset \mathbb{R}$ และ $S \neq \emptyset$ และ S มีขอบเขตบน จะได้ S มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S อาจเป็นสมาชิกของ S หรือไม่เป็นสมาชิกของ S ก็ได้

ตัวอย่างเช่น $S = (0, 1)$ มี 1 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S แต่ $1 \notin S$

ขณะที่ $S = (0, 1]$ มี 1 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S แต่ $1 \in S$

ทฤษฎีบท 1.4.6 (The Archimedean Property of $\mathbb{R}$)

$\mathbb{N}$ ไม่มีขอบเขตบน

เพราะฉะนั้น ทุกค่า $x \in \mathbb{R}$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $n > x$

ข้อพิสูจน์ สมมติ $\mathbb{N}$ มีขอบเขตบน ... (1)

เพราะฉะนั้น $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ และ $\mathbb{N} \neq \emptyset$ และ $\mathbb{N}$ มีขอบเขตบน

โดย Completeness axiom จะได้ $\mathbb{N}$ มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

ให้ $m = \sup \mathbb{N}$... (2)

เพราะฉะนั้น $n \leq m$ ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$... (3)

เพราะว่า $m = \sup \mathbb{N}$ เพราะฉะนั้น $m - 1$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ $\mathbb{N}$

เพราะฉะนั้นมี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $n_0 > m - 1$ เพราะฉะนั้น $n_0 + 1 > m$

เพราะว่า $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ และ $n_0 + 1 > m$ เพราะฉะนั้นเกิดข้อขัดแย้งกับ (3)

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (1) ไม่จริง เพราะฉะนั้น $\mathbb{N}$ ไม่มีขอบเขตบน □

ทฤษฎีบท 1.4.7 ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) $\mathbb{N}$ ไม่มีขอบเขตบน

(ii) ทุกค่า $z \in \mathbb{R}$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $n > z$

(iii) ทุกค่า $x > 0$ และ ทุกค่า $y \in \mathbb{R}$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $nx > y$

(iv) ทุกค่า $x > 0$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $0 < \frac{1}{n} < x$

ข้อพิสูจน์ (i) $\Rightarrow$ (ii) สมมติ $\mathbb{N}$ ไม่มีขอบเขตบน ... (1)

สมมติ ข้อความ “ทุกค่า $z \in \mathbb{R}$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $n > z$ ” ไม่จริง ... (2)

เพราะฉะนั้นมี $z_0 \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $n \leq z_0$ ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$

เพราะฉะนั้น $\mathbb{N}$ มีขอบเขตบน เกิดข้อขัดแย้งกับ (1) เพราะฉะนั้นที่สมมติ (2) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น “ทุกค่า $z \in \mathbb{R}$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $n > z$ ” เป็นจริง

(ii) $\Rightarrow$ (iii) สมมติ ทุกค่า $z \in \mathbb{R}$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $n > z$... (1)

ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ และ $x > 0$ ให้ $z = \frac{y}{x}$ เพราะฉะนั้น $z \in \mathbb{R}$

เพราะฉะนั้นจาก (1) จะมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $n > z$ เพราะฉะนั้น $n > \frac{y}{x}$ เพราะว่า $x > 0$ เพราะฉะนั้น $nx > y$

((iii) $\Rightarrow$ (iv) สมมติ ทุกค่า $x > 0$ และ ทุกค่า $y \in \mathbb{R}$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $nx > y$... (1)

ให้ $x > 0$

เลือก $y = 1$ เพราะฉะนั้นมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $nx > 1$ เพราะฉะนั้น $0 < \frac{1}{n} < x$

เพราะฉะนั้น ทุกค่า $x > 0$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $0 < \frac{1}{n} < x$

(iv) $\Rightarrow$ (i) สมมติ ทุกค่า $x > 0$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $0 < \frac{1}{n} < x$... (1)

สมมติ $\mathbb{N}$ มีขอบเขตบน ... (2)

เพราะฉะนั้นมี $m \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $k < m$ ทุกค่า $k \in \mathbb{N}$

เพราะฉะนั้น $0 < \frac{1}{m} < \frac{1}{k}$ ทุกค่า $k \in \mathbb{N}$... (3)

ให้ $x = \frac{1}{m}$ จาก (1) จะมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $0 < \frac{1}{n} < x$... (4)

เพราะฉะนั้นมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$... (5)

เพราะฉะนั้น (3) และ (5) ขัดแย้งกัน เพราะฉะนั้นที่สมมติ (2) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $\mathbb{N}$ ไม่มีขอบเขตบน □

ทฤษฎีบท 1.4.8 ถ้า $y > 0$ แล้วจะมี $n \in \mathbb{N}$ เพียงตัวเดียวที่ทำให้ $n - 1 \leq y < n$

ข้อพิสูจน์ ให้ $y > 0$

ให้ $S = \{m \in \mathbb{N} \mid y < m\}$... (1)

เพราะว่า $\mathbb{N}$ ไม่มีขอบเขตบน เพราะฉะนั้นมี $t \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $y < t$

เพราะฉะนั้น $t \in S$ เพราะฉะนั้น $S \neq \emptyset$

เพราะว่า $S \subset \mathbb{N}$ และ $S \neq \emptyset$

เพราะฉะนั้นโดย Well-Ordering Property of $\mathbb{N}$ จะได้ว่า S มีสมาชิกค่าน้อยสุด ... (2)

ให้ n เป็นสมาชิกค่าน้อยสุดของ S เพราะฉะนั้น $n \in S$... (3)

เพราะฉะนั้น $n \leq k$ ทุกค่า $k \in S$... (4)

เพราะว่า $n \in S$ เพราะฉะนั้นจาก (1) จะได้ $y < n$... (5)

เพราะว่า n เป็นสมาชิกค่าน้อยสุดของ S เพราะฉะนั้น $n - 1 \notin S$

เพราะว่า $n - 1 \notin S$ และ $S = \{m \in \mathbb{N} \mid y < m\}$ เพราะฉะนั้น $n - 1 \leq y$... (6)

จาก (5) และ (6) จะได้ $n - 1 \leq y < n$ จาก (2) จะได้ว่ามี n ตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $n - 1 \leq y < n$

เพราะฉะนั้น ถ้า $y < 0$ แล้วจะมี $n \in \mathbb{N}$ เพียงตัวเดียวที่ทำให้ $n - 1 \leq y < n$ □

ทฤษฎีบท 1.4.9 (Density of $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)

ถ้า x, y เป็นจำนวนจริง และ $x < y$ แล้วจะมีจำนวนตรรกยะ r ที่ทำให้ $x < r < y$

ข้อพิสูจน์ ให้ x, y เป็นจำนวนจริง และ $x < y$

กรณีที่ 1 $x > 0$

เพราะว่า $x < y$ เพราะฉะนั้น $y - x > 0$

โดย The Archimedean property of $\mathbb{R}$ (ทฤษฎีบท 1.4.6) จะมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $n > \frac{1}{y-x} > 0$

เพราะว่า $y - x > 0$ และ $n > \frac{1}{y-x} > 0$ เพราะฉะนั้น $n(y - x) > 1 \Rightarrow nx + 1 < ny$... (1)

เพราะว่า $nx > 0$ เพราะฉะนั้นมี $m \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $m - 1 \leq nx < m$ (ทฤษฎีบท 1.4.8)

เพราะฉะนั้น $m \leq nx + 1$ และ $nx < m$... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $m \leq nx + 1 < ny$ และ $nx < m$... (3)

เพราะฉะนั้น $nx < m < ny$ เพราะฉะนั้น $x < \frac{m}{n} < y$... (4)

ให้ $r = \frac{m}{n}$ เพราะฉะนั้นมีจำนวนตรรกยะ r ที่ทำให้ $x < r < y$

กรณีที่ $2 \ x \leq 0$

เพราะฉะนั้น $-x \geq 0$

โดย The Archimedean property of $\mathbb{R}$ (ทฤษฎีบท 1.4.6) จะมี $k \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $k > -x$

เพราะฉะนั้น $k + x > 0$

เพราะว่า $x < y$ เพราะฉะนั้น $0 < k + x < k + y$

โดยใช้ผลของกรณีที่ 1 จะได้ว่ามีจำนวนตรรกยะ s ที่ทำให้ $k + x < s < k + y$ เพราะฉะนั้น $x < s - k < y$

ให้ $r = s - k$ เพราะฉะนั้นมีจำนวนตรรกยะ r ที่ทำให้ $x < r < y$ □

ทฤษฎีบท 1.4.10

ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะที่ไม่เป็นศูนย์ และ y เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว xy เป็นจำนวนอตรรกยะ

ข้อพิสูจน์ ให้ x เป็นจำนวนตรรกยะที่ไม่เป็นศูนย์ และ y เป็นจำนวนอตรรกยะ ... (1)

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็ม m, n และ $m \neq 0$ ที่ทำให้ $x = \frac{m}{n}$... (2)

สมมติ xy เป็นจำนวนตรรกยะ ... (3)

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็ม p, q ที่ทำให้ $xy = \frac{p}{q}$

เพราะฉะนั้น $y = (xy)\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{pn}{qm}$ เพราะฉะนั้น y เป็นจำนวนตรรกยะ ... (4)

เพราะว่า (1) และ (4) ขัดแย้งกัน เพราะฉะนั้นที่สมมติ (3) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น xy เป็นจำนวนอตรรกยะ □

ทฤษฎีบท 1.4.11 ถ้า x, y เป็นจำนวนจริง และ $x < y$ แล้วจะมีจำนวนอตรรกยะ w ที่ทำให้ $x < w < y$

ข้อพิสูจน์ ให้ x, y เป็นจำนวนจริง และ $x < y$ เพราะฉะนั้น $\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}$

เพราะฉะนั้นมีจำนวนตรรกยะ r ที่ทำให้ $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$ (ทฤษฎีบท 1.4.9)

เพราะฉะนั้น $x < r\sqrt{2} < y$ ให้ $w = r\sqrt{2}$ เพราะฉะนั้น $x < w < y$

เพราะว่า r เป็นจำนวนตรรกยะและ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

เพราะฉะนั้น $r\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ (ทฤษฎีบท 1.4.10)

เพราะฉะนั้น w เป็นจำนวนอตรรกยะและ $x < w < y$ □

ทฤษฎีบท 1.4.12 ให้ $S \subset \mathbb{R}$, S มีขอบเขต และมี $M \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $|x - y| < M$ ทุกค่า $x, y \in S$... (1)

จะได้ว่า $\sup S - \inf S \leq M$

ข้อพิสูจน์ ให้ $y \in S$

ให้ $x \in S$

จาก (1) จะได้ $|x - y| < M$ เพราะฉะนั้น $-M < x - y < M$ เพราะฉะนั้น $x < y + M$

เพราะฉะนั้น $x < y + M$ ทุกค่า $x \in S$ เพราะฉะนั้น $y + M$ เป็นขอบเขตบนของ S

เพราะว่า $\sup S$ เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S และ $y + M$ เป็นขอบเขตบนของ S

เพราะฉะนั้น $\sup S \leq y + M$ เพราะฉะนั้น $\sup S - M \leq y$

เพราะฉะนั้น $\sup S - M \leq y$ ทุกค่า $y \in S$ เพราะฉะนั้น $\sup S - M$ เป็นขอบเขตล่างของ S
 เพราะว่า $\inf S$ เป็นขอบเขตล่างค่ามากที่สุด S และ $\sup S - M$ เป็นขอบเขตล่างของ S
 เพราะฉะนั้น $\sup S - M \leq \inf S$ เพราะฉะนั้น $\sup S - \inf S \leq M$ □

ทฤษฎีบท 1.4.13 ให้ $S \subset \mathbb{R}$ และ u เป็นขอบเขตบนของ S ... (1)

จะได้ $u = \sup S$ ก็ต่อเมื่อ ทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะมี $x_\varepsilon \in S$ ที่ทำให้ $u - \varepsilon < x_\varepsilon \leq u$

ข้อพิสูจน์ ($\Leftarrow$) สมมติ ทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะมี $x_\varepsilon \in S$ ที่ทำให้ $u - \varepsilon < x_\varepsilon \leq u$... (2)

ให้ b เป็นขอบเขตบนของ S ... (3)

ให้ $\varepsilon > 0$

จาก (2) จะมี $x_\varepsilon \in S$ ที่ทำให้ $u - \varepsilon < x_\varepsilon \leq u$... (4)

จาก (3) จะได้ $x_\varepsilon \leq b$... (5)

จาก (4) และ (5) จะได้ $u - \varepsilon < b$ เพราะฉะนั้น $u < b + \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $u < b + \varepsilon$ ทุกค่า $\varepsilon > 0$

เพราะฉะนั้น $u \leq b + \varepsilon$ ทุกค่า $\varepsilon > 0$ เพราะฉะนั้น $u \leq b$ (ทฤษฎีบท 1.1.2)

เพราะฉะนั้น ถ้า b เป็นขอบเขตบนของ S แล้ว $u \leq b$... (6)

จาก (1) และ (6) จะได้ $u = \sup S$

($\Rightarrow$) สมมติ $u = \sup S$... (7)

ให้ $\varepsilon > 0$... (8)

สมมติ ไม่มี $x \in S$ ที่ทำให้ $u - \varepsilon < x \leq u$... (9)

เพราะฉะนั้น $u - \varepsilon \geq x$ หรือ $x > u$ ทุกค่า $x \in S$... (10)

เพราะว่า u เป็นขอบเขตบนของ S เพราะฉะนั้น $x \leq u$ ทุกค่า $x \in S$... (11)

จาก (10) และ (11) จะได้ว่า $u - \varepsilon \geq x$ ทุกค่า $x \in S$

เพราะฉะนั้น $u - \varepsilon$ เป็นขอบเขตบนของ S ... (12)

จาก (7) และ (12) จะได้ $u \leq u - \varepsilon$ เพราะฉะนั้น $\varepsilon \leq 0$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้งกับ (8)

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (9) ไม่จริง เพราะฉะนั้นมี $x_\varepsilon \in S$ ที่ทำให้ $u - \varepsilon < x_\varepsilon$

เพราะฉะนั้น ทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะมี $x_\varepsilon \in S$ ที่ทำให้ $u - \varepsilon < x_\varepsilon \leq u$ □

ตัวอย่าง 1.4.1 ให้ $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ และ } x^2 < 2\}$ จงแสดงว่า $\sup S = \sqrt{2}$

แนวคิด ให้ $x \in S$ เพราะฉะนั้น $x^2 < 2$ เพราะฉะนั้น $x < \sqrt{2}$

เพราะฉะนั้น $x < \sqrt{2}$ ทุกค่า $x \in S$ เพราะฉะนั้น $\sqrt{2}$ เป็นขอบเขตบนของ S ... (1)

ให้ $\varepsilon \in \mathbb{R}$

ให้ $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \min\{\varepsilon, \sqrt{2}\}$

เพราะฉะนั้น $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ และ $0 < \varepsilon_1 < \sqrt{2}$ เพราะฉะนั้น $0 < \sqrt{2} - \varepsilon_1$... (2)

โดยทฤษฎีบท 1.4.9 จะได้ว่ามีจำนวนตรรกยะ r ที่ทำให้ $\sqrt{2} - \varepsilon_1 < r < \sqrt{2}$... (3)

เพราะฉะนั้น $r \in S$

จาก (2) จะได้ $-\varepsilon < -\varepsilon_1$ เพราะฉะนั้น $\sqrt{2} - \varepsilon < \sqrt{2} - \varepsilon_1$... (4)

เพราะฉะนั้นจาก $\sqrt{2} - \varepsilon < r < \sqrt{2}$ (จาก (3) และ (4))

เพราะฉะนั้น ทุกค่า $\varepsilon > 0$ มี $r \in S$ ที่ทำให้ $\sqrt{2} - \varepsilon < r < \sqrt{2}$

เพราะฉะนั้น $\sup S = \sqrt{2}$ (ทฤษฎีบท 1.4.13) $\square$

หมายเหตุ ในระบบจำนวนตรรกยะจะได้ว่า S ไม่มีขอบเขตบนค่าน้อยสุดเป็นจำนวนตรรกยะ

ให้ $x_1 \in Q$ และ $\sqrt{2} < x_1$ เพราะฉะนั้นมี $x_2 \in Q$ ที่ทำให้ $\sqrt{2} < x_2 < x_1$ (ทฤษฎีบท 1.4.9)

เพราะฉะนั้น ทุกค่า $x_1 \in Q$ และ $\sqrt{2} < x_1$ จะมี $x_2 \in Q$ ที่ทำให้ $\sqrt{2} < x_2 < x_1$

เพราะฉะนั้น S ไม่มีขอบเขตบนค่าน้อยสุดเป็นจำนวนตรรกยะ

ในระบบของจำนวนจริงจะได้ว่า S มีขอบเขตบนค่าน้อยสุดเป็นจำนวนจริง

ในระบบของจำนวนตรรกยะจะได้ว่า S ไม่มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

ตัวอย่าง 1.4.2 ให้ $A \subset R$ และ $\sup A, \inf A$ มีค่า

จงแสดงว่า $\sup A = \inf A$ ก็ต่อเมื่อ มี $c \in R$ ที่ทำให้ $A = \{c\}$

แนวคิด ($\Rightarrow$) สมมติ $\sup A = \inf A$ ให้ $c = \sup A = \inf A$... (1)

เพราะว่า $c = \sup A$ เพราะฉะนั้น $x \leq c$ ทุกค่า $x \in A$... (2)

เพราะว่า $c = \inf A$ เพราะฉะนั้น $c \leq x$ ทุกค่า $x \in A$... (3)

จาก (2) และ (3) จะได้ $c \leq x \leq c$ ทุกค่า $x \in A$ เพราะฉะนั้น $A = \{c\}$

($\Leftarrow$) สมมติ มี $c \in R$ ที่ทำให้ $A = \{c\}$ เพราะฉะนั้น $\sup A = c = \inf A$ $\square$

ตัวอย่าง 1.4.3 ให้ $A = \{x \in R^+ \mid 0 < x^2 - 1 \leq 2\}$ จงหา $\max A, \min A, \inf A$ และ $\sup A$ (ถ้ามี)

แนวคิด $0 < x^2 - 1 \leq 2 \Leftrightarrow 1 < x^2$ และ $x^2 \leq 3$

$$\Leftrightarrow (x < -1 \text{ หรือ } x > 1) \text{ และ } (-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow x \in ((-\infty, -1) \cup (1, \infty)) \cap [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

$$\Leftrightarrow x \in [-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3}]$$

เพราะฉะนั้น $A = \{x \in R^+ \mid 0 < x^2 - 1 \leq 2\} = (1, \sqrt{3}]$

เพราะฉะนั้น $\max A = \sqrt{3}, \min A$ ไม่มี, $\inf A = 1$ และ $\sup A = \sqrt{3}$ $\square$

ทฤษฎีบท 1.4.14 ให้ m เป็นขอบเขตล่างของ S ... (1)

จะได้ $m = \inf S$ ก็ต่อเมื่อ ทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะมี $x_\varepsilon \in S$ ที่ทำให้ $m \leq x_\varepsilon < m + \varepsilon$

ข้อพิสูจน์ ($\Leftarrow$) สมมติ ทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะมี $x_\varepsilon \in S$ ที่ทำให้ $m \leq x_\varepsilon < m + \varepsilon$... (2)

ให้ b เป็นขอบเขตล่างของ S ... (3)

ให้ $\varepsilon > 0$

จาก (2) จะมี $x_\varepsilon \in S$ ที่ทำให้ $m \leq x_\varepsilon < m + \varepsilon$... (4)

จาก (3) จะได้ $b \leq x_\varepsilon$... (5)

จาก (4) และ (5) จะได้ $b < m + \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $b < m + \varepsilon$ ทุกค่า $\varepsilon > 0$

เพราะฉะนั้น $b \leq m$

(ทฤษฎีบท 1.1.2)

เพราะฉะนั้น ถ้า b เป็นขอบเขตล่างของ S แล้ว $b \leq m$

... (6)

จาก (1) และ (6) จะได้ $m = \inf S$

($\Rightarrow$) สมมติ $m = \inf S$

... (7)

ให้ $\varepsilon > 0$

... (8)

สมมติ ไม่มี $x_\varepsilon \in S$ ที่ทำให้ $m \leq x_\varepsilon < m + \varepsilon$

... (9)

เพราะฉะนั้น $x < m$ หรือ $x \geq m + \varepsilon$ ทุกค่า $x \in S$

... (10)

เพราะว่า m เป็นขอบเขตล่างของ S เพราะฉะนั้น $m \leq x$ ทุกค่า $x \in S$

... (11)

จาก (10) และ (11) จะได้ $x \geq m + \varepsilon$ ทุกค่า $x \in S$

เพราะฉะนั้น $m + \varepsilon$ เป็นขอบเขตล่างของ S

... (12)

จาก (7) และ (12) จะได้ $m + \varepsilon \leq m$ เพราะฉะนั้น $\varepsilon \leq 0$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้งกับ (8)

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (9) ไม่จริง

เพราะฉะนั้นมี $x_\varepsilon \in S$ ที่ทำให้ $m \leq x_\varepsilon < m + \varepsilon$

เพราะฉะนั้น ทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะมี $x_\varepsilon \in S$ ที่ทำให้ $m \leq x_\varepsilon < m + \varepsilon$

□

ทฤษฎีบท 1.4.15 ให้ $A \subset B$ จะได้ $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$

ข้อพิสูจน์ ให้ $A \subset B$

เพราะว่า $\inf B \leq b$ ทุกค่า $b \in B$ และ $A \subset B$ เพราะฉะนั้น $\inf B \leq a$ ทุกค่า $a \in A$

เพราะฉะนั้น $\inf B$ เป็นขอบเขตล่างของ A

เพราะว่า $\inf B$ เป็นขอบเขตล่างของ A และ $\inf A$ เป็นขอบเขตล่างค่ามากที่สุดของ A

เพราะฉะนั้น $\inf B \leq \inf A$

... (1)

เพราะว่า $\sup B \geq b$ ทุกค่า $b \in B$ และ $A \subset B$ เพราะฉะนั้น $\sup B \geq a$ ทุกค่า $a \in A$

เพราะฉะนั้น $\sup B$ เป็นขอบเขตบนของ A

เพราะว่า $\sup B$ เป็นขอบเขตบนของ A และ $\sup A$ เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A

เพราะฉะนั้น $\sup A \leq \sup B$

... (2)

จาก (1), (2) และ $\inf A \leq \sup A$ จะได้ $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$

□

ทฤษฎีบท 1.4.16 ให้ $A \subset B$ และ $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ จะได้ $\inf f(B) \leq \inf f(A) \leq \sup f(A) \leq \sup f(B)$

ข้อพิสูจน์ ให้ $A \subset B$ และ $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ เพราะว่า $A \subset B$ เพราะฉะนั้น $f(A) \subset f(B)$

เพราะฉะนั้น $\inf f(B) \leq \inf f(A) \leq \sup f(A) \leq \sup f(B)$

(ทฤษฎีบท 1.4.15) □

บทนิยาม 1.4.5 ให้ $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ และ $k \in \mathbb{R}$

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

$$kA = \{ka \mid a \in A\}$$

ให้ $-A = (-1)A$ เพราะฉะนั้น $-A = (-1)A = \{-a \mid a \in A\}$

ทฤษฎีบท 1.4.17 ให้ $A \subset \mathbb{R}$ จะได้ $\sup A = -\inf(-A)$ และ $\sup(-A) = -\inf A$

ข้อพิสูจน์ การแสดงว่า $\inf(-A) = -\sup A$

ให้ $s = \sup A$... (1)

เพราะฉะนั้น $a \leq s$ ทุกค่า $a \in A$ เพราะฉะนั้น $-a \geq -s$ ทุกค่า $a \in A$

เพราะฉะนั้น $-s$ เป็นขอบเขตล่างของ $-A$... (2)

ให้ t เป็นขอบเขตล่างของ $-A$

เพราะฉะนั้น $t \leq -a$ ทุกค่า $a \in A$ เพราะฉะนั้น $-t \geq a$ ทุกค่า $a \in A$

เพราะฉะนั้น $-t$ เป็นขอบเขตบนของ A

เพราะฉะนั้น $-t \geq \sup A$ เพราะฉะนั้น $-t \geq s$ เพราะฉะนั้น $t \leq -s$

เพราะฉะนั้น ถ้า t เป็นขอบเขตล่างของ $-A$ แล้ว $t \leq -s$... (3)

จาก (2) และ (3) จะได้ $\inf(-A) = -s$ เพราะฉะนั้น $\inf(-A) = -\sup A$

การแสดงว่า $\sup(-A) = -\inf A$

แบบที่ 1 ให้ $L = \inf A$... (1)

เพราะฉะนั้น $L \leq a$ ทุกค่า $a \in A$ เพราะฉะนั้น $-a \leq -L$ ทุกค่า $a \in A$

เพราะฉะนั้น $-L$ เป็นขอบเขตบนของ $-A$... (2)

ให้ t เป็นขอบเขตบนของ $-A$

เพราะฉะนั้น $-a \leq t$ ทุกค่า $a \in A$ เพราะฉะนั้น $a \geq -t$ ทุกค่า $a \in A$

เพราะฉะนั้น $-t$ เป็นขอบเขตล่างของ A

เพราะฉะนั้น $\inf A \geq -t$ เพราะฉะนั้น $L \geq -t$ เพราะฉะนั้น $-L \leq t$

เพราะฉะนั้น ถ้า t เป็นขอบเขตบนของ $-A$ แล้ว $-L \leq t$... (3)

จาก (2) และ (3) จะได้ $\sup(-A) = -L$ เพราะฉะนั้น $\sup(-A) = -\inf A$

แบบที่ 2 เพราะว่า $\inf(-A) = -\sup A$ เพราะฉะนั้นแทน A ด้วย $-A$ จะได้ $-\sup(-A) = \inf A$

เพราะฉะนั้น $\sup(-A) = -\inf A$ □

ทฤษฎีบท 1.4.18 ให้ $A \subset \mathbb{R}$ และ $A \neq \emptyset$ และ $k \in \mathbb{R}$ จะได้

1. ถ้า $k > 0$ แล้ว $\sup(kA) = k \sup A$ และ $\inf(kA) = k \inf A$

2. ถ้า $k < 0$ แล้ว $\sup(kA) = k \inf A$ และ $\inf(kA) = k \sup A$

ข้อพิสูจน์ 1. ให้ $k > 0$

ให้ $s_0 = \sup A$

เพราะฉะนั้น $s_0 \geq a$ ทุกค่า $a \in A$

เพราะว่า $k > 0$ เพราะฉะนั้น $ks_0 \geq ka$ ทุกค่า $a \in A$ เพราะฉะนั้น ks_0 เป็นขอบเขตบนของ kA ... (1)

ให้ s^* เป็นขอบเขตบนของ kA

เพราะฉะนั้น $s^* \geq ka$ ทุกค่า $a \in A$

เพราะว่า $k > 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{s^*}{k} \geq a$ ทุกค่า $a \in A$

เพราะฉะนั้น $\frac{s^*}{k}$ เป็นขอบเขตบนของ A

เพราะว่า $s_0 = \sup A$ และ $\frac{s^*}{k}$ เป็นขอบเขตบนของ A เพราะฉะนั้น $s_0 \leq \frac{s^*}{k}$

เพราะว่า $k > 0$ เพราะฉะนั้น $ks_0 \leq s^*$

เพราะฉะนั้น ถ้า s^* เป็นขอบเขตบนของ kA แล้ว $ks_0 \leq s^*$... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $\sup(kA) = ks_0$ เพราะฉะนั้น $\sup(kA) = k \sup A$

ให้ $t_0 = \inf A$

เพราะฉะนั้น $t_0 \leq a$ ทุกค่า $a \in A$

เพราะว่า $k > 0$ เพราะฉะนั้น $kt_0 \leq ka$ ทุกค่า $a \in A$ เพราะฉะนั้น kt_0 เป็นขอบเขตล่างของ kA ... (3)

ให้ t^* เป็นขอบเขตล่างของ kA

เพราะฉะนั้น $t^* \leq ka$ ทุกค่า $a \in A$

เพราะว่า $k > 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{t^*}{k} \leq a$ ทุกค่า $a \in A$ เพราะฉะนั้น $\frac{t^*}{k}$ เป็นขอบเขตล่างของ A

เพราะว่า $t_0 = \inf A$ และ $\frac{t^*}{k}$ เป็นขอบเขตล่างของ A เพราะฉะนั้น $t_0 \geq \frac{t^*}{k}$

เพราะว่า $k > 0$ เพราะฉะนั้น $kt_0 \geq t^*$

เพราะฉะนั้น ถ้า t^* เป็นขอบเขตล่างของ kA แล้ว $kt_0 \geq t^*$... (4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $\inf(kA) = kt_0$ เพราะฉะนั้น $\inf(kA) = k \inf A$

2. แบบที่ 1 ให้ $k < 0$

ให้ $s_0 = \sup A$ เพราะฉะนั้น $s_0 \geq a$ ทุกค่า $a \in A$

เพราะว่า $k < 0$ เพราะฉะนั้น $ks_0 \leq ka$ ทุกค่า $a \in A$ เพราะฉะนั้น ks_0 เป็นขอบเขตล่างของ kA ... (1)

ให้ s^* เป็นขอบเขตล่างของ kA

เพราะฉะนั้น $s^* \leq ka$ ทุกค่า $a \in A$

เพราะว่า $k < 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{s^*}{k} \geq a$ ทุกค่า $a \in A$ เพราะฉะนั้น $\frac{s^*}{k}$ เป็นขอบเขตบนของ A

เพราะว่า $s_0 = \sup A$ และ $\frac{s^*}{k}$ เป็นขอบเขตบนของ A เพราะฉะนั้น $s_0 \leq \frac{s^*}{k}$

เพราะว่า $k < 0$ เพราะฉะนั้น $ks_0 \geq s^*$

เพราะฉะนั้น ถ้า s^* เป็นขอบเขตล่างของ kA แล้ว $ks_0 \geq s^*$... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $\inf(kA) = ks_0$ เพราะฉะนั้น $\inf(kA) = k \sup A$

ให้ $t_0 = \inf A$ เพราะฉะนั้น $t_0 \leq a$ ทุกค่า $a \in A$

เพราะว่า $k < 0$ เพราะฉะนั้น $kt_0 \geq ka$ ทุกค่า $a \in A$ เพราะฉะนั้น kt_0 เป็นขอบเขตบนของ kA ... (3)

ให้ t^* เป็นขอบเขตบนของ kA

เพราะฉะนั้น $t^* \geq ka$ ทุกค่า $a \in A$

เพราะว่า $k < 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{t^*}{k} \leq a$ ทุกค่า $a \in A$ เพราะฉะนั้น $\frac{t^*}{k}$ เป็นขอบเขตล่างของ A

เพราะว่า $t_0 = \inf A$ และ $\frac{t^*}{k}$ เป็นขอบเขตล่างของ A เพราะฉะนั้น $t_0 \geq \frac{t^*}{k}$

เพราะว่า $k < 0$ เพราะฉะนั้น $kt_0 \leq t^*$

เพราะฉะนั้น ถ้า t^* เป็นขอบเขตบนของ kA แล้ว $kt_0 \leq t^*$... (4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $\sup(kA) = kt_0$ เพราะฉะนั้น $\sup(kA) = k \inf A$

แบบที่ 2 เพราะว่ $k < 0$ เพราะฉะนั้น $k = -|k|$ และ $|k| > 0$... (5)

$$\begin{aligned} \sup(kA) &= \sup(-|k| A) \\ &= \sup((-1)(|k| A)) \\ &= -\inf(|k| A) && \text{(ทฤษฎีบท 1.4.17)} \\ &= -|k| \inf A && \text{(ทฤษฎีบท 1.4.18 ข้อ 1)} \\ &= k \inf A && \text{(จาก (5))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \inf(kA) &= \inf(-|k| A) \\ &= \inf((-1)(|k| A)) \\ &= -\sup(|k| A) && \text{(ทฤษฎีบท 1.4.17)} \\ &= -|k| \sup A && \text{(ทฤษฎีบท 1.4.18 ข้อ 1)} \\ &= k \sup A && \text{(จาก (5))} \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 1.4.19 ให้ $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ และ A, B เป็นเซตมีขอบเขต

จะได้ $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ และ $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

ข้อพิสูจน์ การแสดงว่า $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

ให้ $u = \sup A$ และ $v = \sup B$... (1)

เพราะฉะนั้น $a \leq u$ ทุกค่า $a \in A$ และ $b \leq v$ ทุกค่า $b \in B$

เพราะฉะนั้น $a + b \leq u + v$ ทุกค่า $a \in A$ และ ทุกค่า $b \in B$... (2)

เพราะฉะนั้น $u + v$ เป็นขอบเขตบนของ $A + B$... (3)

ให้ $\varepsilon > 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

เพราะฉะนั้น $u - \frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A และ $v - \frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ B

เพราะว่า $u - \frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A

เพราะฉะนั้นมี $x \in A$ ที่ทำให้ $u - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq u$ (ทฤษฎีบท 1.4.13) ... (4)

เพราะว่า $v - \frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ B

เพราะฉะนั้นมี $y \in B$ ที่ทำให้ $v - \frac{\varepsilon}{2} < y \leq v$ (ทฤษฎีบท 1.4.13) ... (5)

จาก (4) และ (5) จะได้ $(u - \frac{\varepsilon}{2}) + (v - \frac{\varepsilon}{2}) < x + y \leq u + v$

เพราะฉะนั้น $u + v - \varepsilon < x + y \leq u + v$

ให้ $z = x + y$ เพราะฉะนั้น $z \in A + B$ และ $u + v - \varepsilon < z \leq u + v$

เพราะฉะนั้น ทุกค่า $\varepsilon > 0$ มี $z \in A + B$ ที่ทำให้ $u + v - \varepsilon < z \leq u + v$... (6)

จาก (3) และ (6) จะได้ว่า $u + v$ เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A + B$ (ทฤษฎีบท 1.4.13)

เพราะฉะนั้น $u + v = \sup(A + B)$... (7)

จาก (1) และ (7) จะได้ $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$

การแสดงว่า $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

ให้ $c = \inf A$ และ $d = \inf B$... (8)

เพราะฉะนั้น $a \geq c$ ทุกค่า $a \in A$ และ $b \geq d$ ทุกค่า $b \in B$

เพราะฉะนั้น $a + b \geq c + d$ ทุกค่า $a \in A$ และ ทุกค่า $b \in B$... (9)

เพราะฉะนั้น $c + d$ เป็นขอบเขตล่างของ $A + B$... (10)

ให้ $\varepsilon > 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

เพราะฉะนั้น $c + \frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตล่างค่าน้อยสุดของ A และ $d + \frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตล่างค่าน้อยสุดของ B

เพราะว่า $c + \frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตล่างค่าน้อยสุดของ A

เพราะฉะนั้นมี $x \in A$ ที่ทำให้ $c + \frac{\varepsilon}{2} > x \geq c$ (ทฤษฎีบท 1.4.14) ... (11)

เพราะว่า $d + \frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตล่างค่าน้อยสุดของ B

เพราะฉะนั้นมี $y \in B$ ที่ทำให้ $d + \frac{\varepsilon}{2} > y \geq d$ (ทฤษฎีบท 1.4.14) ... (12)

จาก (11) และ (12) จะได้ $(c + \frac{\varepsilon}{2}) + (d + \frac{\varepsilon}{2}) > x + y \geq c + d$

เพราะฉะนั้น $c + d + \varepsilon > x + y \geq c + d$

ให้ $z = x + y$ เพราะฉะนั้น $z \in A + B$ และ $c + d + \varepsilon > z \geq c + d$

เพราะฉะนั้น ทุกค่า $\varepsilon > 0$ มี $z \in A + B$ ที่ทำให้ $c + d + \varepsilon > z \geq c + d$... (13)

จาก (10) และ (13) จะได้ว่า $c + d$ เป็นขอบเขตล่างค่ามากที่สุดของ $A + B$ (ทฤษฎีบท 1.4.14)

เพราะฉะนั้น $c + d = \inf(A + B)$... (14)

จาก (8) และ (14) จะได้ว่า $\inf A + \inf B = \inf(A + B)$ □

ทฤษฎีบท 1.4.20 ให้ $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ และ $f(x) \leq g(y)$ ทุกค่า $x, y \in D$

จะได้ $f(D)$ มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด, $g(D)$ มีขอบเขตล่างค่ามากที่สุด และ $\sup f(D) \leq \inf g(D)$

ข้อพิสูจน์ ให้ $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ และ $f(x) \leq g(y)$ ทุกค่า $x, y \in D$... (1)

เพราะว่า $D \neq \emptyset$ เพราะฉะนั้นมี $y_0 \in D$

จาก (1) จะได้ว่า $f(x) \leq g(y_0)$ ทุกค่า $x \in D$ เพราะฉะนั้น $g(y_0)$ เป็นขอบเขตบนของ $f(D)$

เพราะว่า $D \neq \emptyset$ เพราะฉะนั้นมี $x_0 \in D$

จาก (1) จะได้ว่า $f(x_0) \leq g(y)$ ทุกค่า $y \in D$ เพราะฉะนั้น $f(x_0)$ เป็นขอบเขตล่างของ $g(D)$

เพราะว่า $f(D) \neq \emptyset$ และ $f(D)$ มีขอบเขตบน เพราะฉะนั้น $f(D)$ มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด (ทฤษฎีบท 1.4.3)

เพราะว่า $g(D) \neq \emptyset$ และ $g(D)$ มีขอบเขตล่าง เพราะฉะนั้น $g(D)$ มีขอบเขตล่างค่ามากที่สุด (ทฤษฎีบท 1.4.4)

ให้ $y \in D$

เพราะฉะนั้น $f(x) \leq g(y)$ ทุกค่า $x \in D$

เพราะฉะนั้น $g(y)$ เป็นขอบเขตบนของ $f(D)$ เพราะฉะนั้น $\sup f(D) \leq g(y)$

เพราะฉะนั้น $\sup f(D) \leq g(y)$ ทุกค่า $y \in D$... (2)

เพราะว่า $\sup f(D) \leq g(y)$ ทุกค่า $y \in D$ เพราะฉะนั้น $\sup f(D)$ เป็นขอบเขตล่างของ $g(D)$

เพราะฉะนั้น $\sup f(D) \leq \inf g(D)$ □

ทฤษฎีบท 1.4.21 ให้ $D \subset \mathbb{R}$ และ $D \neq \emptyset$... (1)

ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต และ $f(x) \leq g(x)$ ทุกค่า $x \in D$... (2)

จะได้ $\sup f(D) \leq \sup g(D)$

ข้อพิสูจน์ เพราะว่า $D \neq \emptyset$ เพราะฉะนั้น $f(D) \neq \emptyset$ และ $g(D) \neq \emptyset$... (3)

เพราะว่า f และ g เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต เพราะฉะนั้น $f(D)$ และ $g(D)$ มีขอบเขต ... (4)

เพราะว่า $f(D) \neq \emptyset$ และ $f(D)$ มีขอบเขต เพราะฉะนั้น $f(D)$ มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด (ทฤษฎีบท 1.4.5)

เพราะว่า $g(D) \neq \emptyset$ และ $g(D)$ มีขอบเขต เพราะฉะนั้น $g(D)$ มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด (ทฤษฎีบท 1.4.5)

เพราะฉะนั้น $\sup f(D)$ และ $\sup g(D)$ มีค่า

ให้ $w \in f(D)$

เพราะฉะนั้นมี $x \in D$ ที่ทำให้ $w = f(x)$

เพราะว่า $f(x) \leq g(x)$ เพราะฉะนั้น $w \leq g(x)$ เพราะฉะนั้น $w \leq \sup g(D)$

เพราะฉะนั้น $w \leq \sup g(D)$ ทุกค่า $w \in f(D)$ เพราะฉะนั้น $\sup g(D)$ เป็นขอบเขตบนของ $f(D)$

เพราะฉะนั้น $\sup f(D) \leq \sup g(D)$ □

ทฤษฎีบท 1.4.22 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต ... (1)

ให้ $m^{f+g} = \inf \{f(x) + g(x) \mid x \in D\}$ และ $M^{f+g} = \sup \{f(x) + g(x) \mid x \in D\}$... (2)

จะได้ $\inf f(D) + \inf g(D) \leq m^{f+g} \leq M^{f+g} \leq \sup f(D) + \sup g(D)$

ข้อพิสูจน์ เพราะว่า $\inf \{f(x) + g(x) \mid x \in D\} \leq \sup \{f(x) + g(x) \mid x \in D\}$

เพราะฉะนั้น $m^{f+g} \leq M^{f+g}$... (3)

ให้ $w \in D$

เพราะว่า $\inf f(D)$ เป็นขอบเขตล่างของ $\{f(x) \mid x \in D\}$ เพราะฉะนั้น $\inf f(D) \leq f(w)$

เพราะว่า $\inf g(D)$ เป็นขอบเขตล่างของ $\{g(x) \mid x \in D\}$ เพราะฉะนั้น $\inf g(D) \leq g(w)$

เพราะฉะนั้น $\inf f(D) + \inf g(D) \leq f(w) + g(w)$

เพราะฉะนั้น $\inf f(D) + \inf g(D) \leq f(w) + g(w)$ ทุกค่า $w \in D$

เพราะฉะนั้น $\inf f(D) + \inf g(D)$ เป็นขอบเขตล่างของ $\{f(x) + g(x) \mid x \in D\}$

เพราะว่า m^{f+g} เป็นขอบเขตล่างค่ามากที่สุดของ $\{f(x) + g(x) \mid x \in D\}$

เพราะฉะนั้น $\inf f(D) + \inf g(D) \leq m^{f+g}$... (4)

ให้ $w \in D$

เพราะว่า $\sup f(D)$ เป็นขอบเขตบนของ $\{f(x) \mid x \in D\}$ เพราะฉะนั้น $f(w) \leq \sup f(D)$

เพราะว่า $\sup g(D)$ เป็นขอบเขตบนของ $\{g(x) \mid x \in D\}$ เพราะฉะนั้น $g(w) \leq \sup g(D)$

เพราะฉะนั้น $f(w) + g(w) \leq \sup f(D) + \sup g(D)$

เพราะฉะนั้น $f(w) + g(w) \leq \sup f(D) + \sup g(D)$ ทุกค่า $w \in D$

เพราะฉะนั้น $\sup f(D) + \sup g(D)$ เป็นขอบเขตบนของ $\{f(x) + g(x) \mid x \in D\}$

เพราะว่า M^{f+g} เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $\{f(x) + g(x) \mid x \in D\}$

เพราะฉะนั้น $M^{f+g} \leq \sup f(D) + \sup g(D)$... (5)

จาก (3), (4) และ (5) จะได้ $\inf f(D) + \inf f(D) \leq m^{f+g} \leq M^{f+g} \leq \sup f(D) + \sup g(D)$ $\square$

ทฤษฎีบท 1.4.23 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต

จะได้ $\sup f(D) - \inf f(D) = \sup \{f(x) - f(y) \mid x, y \in D\}$

กล่าวคือ $\sup \{f(x) \mid x \in D\} - \inf \{f(x) \mid x \in D\} = \sup \{f(x) - f(y) \mid x, y \in D\}$

ข้อพิสูจน์ แบบที่ 1 ให้ $A = f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ และ $B = f(D) = \{f(y) \mid y \in D\}$

เพราะฉะนั้น $-B = \{-f(y) \mid y \in D\}$... (1)

$$\sup(A + (-B)) = \sup A + \sup(-B) \quad (\text{ทฤษฎีบท 1.4.19})$$

$$= \sup A + (-\inf B) \quad (\text{ทฤษฎีบท 1.4.17})$$

$$= \sup A - \inf B$$

$$= \sup f(D) - \inf f(D) \quad \dots (2)$$

$$A + (-B) = \{f(x) \mid x \in D\} + \{-f(y) \mid y \in D\}$$

$$= \{f(x) + (-f(y)) \mid x \in D \text{ และ } y \in D\}$$

$$= \{f(x) - f(y) \mid x \in D \text{ และ } y \in D\}$$

$$= \{f(x) - f(y) \mid x, y \in D\} \quad \dots (3)$$

เพราะฉะนั้น $\sup f(D) - \inf f(D) = \sup \{f(x) - f(y) \mid x, y \in D\}$

แบบที่ 2 ให้ $x, y \in D$

เพราะว่า $f(x) \leq \sup f(D)$ และ $f(y) \geq \inf f(D)$

$$f(x) \leq \sup f(D) \text{ และ } -f(y) \leq -\inf f(D)$$

เพราะฉะนั้น $f(x) - f(y) \leq \sup f(D) - \inf f(D)$

เพราะฉะนั้น $f(x) - f(y) \leq \sup f(D) - \inf f(D)$ ทุกค่า $x, y \in D$

เพราะฉะนั้น $\sup f(D) - \inf f(D)$ เป็นขอบเขตบนของ $\{f(x) - f(y) \mid x, y \in D\}$

เพราะฉะนั้น $\sup \{f(x) - f(y) \mid x, y \in D\} \leq \sup f(D) - \inf f(D)$... (4)

ให้ $\varepsilon > 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

เพราะฉะนั้น $\sup f(D) - \frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $f(D)$

และ $\inf f(D) + \frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตล่างค่ามากที่สุดของ $f(D)$

เพราะว่า $\sup f(D) - \frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $f(D)$

เพราะฉะนั้นมี $x' \in D$ ที่ทำให้ $\sup f(D) - \frac{\varepsilon}{2} < g(x') \leq \sup f(D)$ (ทฤษฎีบท 1.4.13) ... (5)

เพราะว่า $\inf f(D) + \frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตล่างค่ามากที่สุดของ $f(D)$

เพราะฉะนั้นมี $y' \in D$ ที่ทำให้ $\inf f(D) \leq g(y') < \inf f(D) + \frac{\varepsilon}{2}$ (ทฤษฎีบท 1.4.14)

$$-g(y') > -\inf f(D) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \dots (6)$$

จาก (5) จะได้ $g(x') > \sup f(D) - \frac{\varepsilon}{2}$... (7)

จาก (6) และ (7) จะได้ $g(x') - g(y') > \sup f(D) - \inf f(D) - \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $\sup \{f(x) - f(y) \mid x, y \in D\} \geq \sup f(D) - \inf f(D) - \varepsilon$

เพราะฉะนั้น ทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะได้ $\sup \{f(x) - f(y) \mid x, y \in D\} \geq \sup f(D) - \inf f(D) - \varepsilon$

โดยทฤษฎีบท 1.1.2 จะได้ $\sup \{f(x) - f(y) \mid x, y \in D\} \geq \sup f(D) - \inf f(D)$... (8)

จาก (4) และ (8) จะได้ $\sup \{f(x) - f(y) \mid x, y \in D\} = \sup f(D) - \inf f(D)$ □

ทฤษฎีบท 1.4.24 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต และ $f(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \in D$... (1)

และ $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต, $M \in \mathbb{R}$ และ $|g(x)| \leq M$ ทุกค่า $x \in D$... (2)

จะได้ $\sup \{f(x)g(x) \mid x \in D\} \leq M \sup f(D)$

ข้อพิสูจน์ ให้ $x \in D$

$$-M \leq g(x) \leq M \quad (\text{จาก (2) } |g(x)| \leq M)$$

$$-Mf(x) \leq f(x)g(x) \leq Mf(x) \quad (\text{จาก (1) } f(x) \geq 0)$$

เพราะฉะนั้น $f(x)g(x) \leq M \sup f(D)$

เพราะฉะนั้น $f(x)g(x) \leq M \sup f(D)$ ทุกค่า $x \in D$

เพราะฉะนั้น $M \sup f(D)$ เป็นขอบเขตบนของ $\{f(x)g(x) \mid x \in D\}$

เพราะฉะนั้น $\sup \{f(x)g(x) \mid x \in D\} \leq M \sup f(D)$ □

หมายเหตุ หากไม่มีเงื่อนไข $f(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \in D$ จะได้ว่าข้อสรุปข้างต้นไม่จริง ตัวอย่างเช่น

ให้ $D = [-4, 3]$ และ $g(x) = x$ ทุกค่า $x \in [-4, 3]$

เพราะฉะนั้น $|g(x)| \leq 4$ ทุกค่า $x \in [-4, 3]$

ให้ $f(x) = -1$ ทุกค่า $x \in [-4, 3]$

เพราะฉะนั้น $\sup f([-4, 3]) = -1$

เพราะว่า $f(x)g(x) = -x$ ทุกค่า $x \in [-4, 3]$ เพราะฉะนั้น $\{f(x)g(x) \mid x \in [-4, 3]\} = [-3, 4]$

เพราะฉะนั้น $\sup \{f(x)g(x) \mid x \in [-4, 3]\} = 4$

เพราะฉะนั้น $\sup \{f(x)g(x) \mid x \in [-4, 3]\} = 4$ และ $4 \sup \{f(x) \mid x \in [-4, 3]\} = -4$

ทฤษฎีบท 1.4.25 ให้ 1. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต ... (1)

$$2. M^{(f^2)} = \sup \{ (f(x))^2 \mid x \in D \} \text{ และ } m^{(f^2)} = \inf \{ (f(x))^2 \mid x \in D \} \quad \dots (2)$$

$$3. M^{|f|} = \sup \{ |f(x)| \mid x \in D \} \text{ และ } m^{|f|} = \inf \{ |f(x)| \mid x \in D \} \quad \dots (3)$$

$$\text{จะได้ } M^{(f^2)} = (M^{|f|})^2 \text{ และ } m^{(f^2)} = (m^{|f|})^2$$

ข้อพิสูจน์ จาก (2) และ (3) จะได้ $0 \leq m^{(f^2)} \leq M^{(f^2)}$ และ $0 \leq m^{|f|} \leq M^{|f|}$
ให้ $x \in D$

$$\text{เพราะว่า } 0 \leq |f(x)| \leq \sup \{ |f(t)| \mid t \in D \} = M^{|f|}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 0 \leq (|f(x)|)^2 \leq (M^{|f|})^2 \text{ เพราะฉะนั้น } 0 \leq (f(x))^2 \leq (M^{|f|})^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } (f(x))^2 \leq (M^{|f|})^2 \text{ ทุกค่า } x \in D$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } (M^{|f|})^2 \text{ เป็นขอบเขตบนของ } \{ (f(x))^2 \mid x \in D \}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sup \{ (f(x))^2 \mid x \in D \} \leq (M^{|f|})^2 \text{ เพราะฉะนั้น } M^{(f^2)} \leq (M^{|f|})^2 \quad \dots (4)$$

ให้ $x \in D$

$$\text{เพราะว่า } |f(x)| = \sqrt{(f(x))^2} \text{ และ } M^{(f^2)} = \sup \{ (f(t))^2 \mid t \in D \} \text{ เพราะฉะนั้น } (|f(x)|)^2 \leq M^{(f^2)}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 0 \leq |f(x)| \leq \sqrt{M^{(f^2)}}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } |f(x)| \leq \sqrt{M^{(f^2)}} \text{ ทุกค่า } x \in D$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sqrt{M^{(f^2)}} \text{ เป็นขอบเขตบนของ } \{ |f(x)| \mid x \in D \}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sup \{ |f(x)| \mid x \in D \} \leq \sqrt{M^{(f^2)}}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } M^{|f|} \leq \sqrt{M^{(f^2)}} \text{ เพราะฉะนั้น } (M^{|f|})^2 \leq M^{(f^2)} \quad \dots (5)$$

$$\text{จาก (4) และ (5) จะได้ } (M^{|f|})^2 = M^{(f^2)}$$

ให้ $x \in D$

$$\text{เพราะว่า } 0 \leq \inf \{ |f(t)| \mid t \in D \} \leq |f(x)| \text{ เพราะฉะนั้น } 0 \leq m^{|f|} \leq |f(x)|$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 0 \leq (m^{|f|})^2 \leq (|f(x)|)^2 \text{ เพราะฉะนั้น } 0 \leq (m^{|f|})^2 \leq (f(x))^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } (m^{|f|})^2 \leq (f(x))^2 \text{ ทุกค่า } x \in D$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } (m^{|f|})^2 \text{ เป็นขอบเขตล่างของ } \{ (f(t))^2 \mid t \in D \}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } (m^{|f|})^2 \leq \inf \{ (f(t))^2 \mid t \in D \} \text{ เพราะฉะนั้น } (m^{|f|})^2 \leq m^{(f^2)} \quad \dots (6)$$

ให้ $x \in D$

$$\text{เพราะว่า } 0 \leq m^{(f^2)} = \inf \{ (f(t))^2 \mid t \in D \} \leq (f(x))^2 = (|f(x)|)^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 0 \leq \sqrt{m^{(f^2)}} \leq |f(x)|$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 0 \leq \sqrt{m^{(f^2)}} \leq |f(x)| \text{ ทุกค่า } x \in D$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{m(f^2)}$ เป็นขอบเขตล่างของ $\{ |f(t)| \mid t \in D \}$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{m(f^2)} \leq \inf \{ |f(x)| \mid x \in D \}$ เพราะฉะนั้น $\sqrt{m(f^2)} \leq m^{|f|}$

เพราะฉะนั้น $m(f^2) \leq (m^{|f|})^2$... (7)

จาก (6) และ (7) จะได้ $m(f^2) = (m^{|f|})^2$ □

ทฤษฎีบท 1.4.26 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต ... (1)

ให้ $M^{|f|} = \sup \{ |f(x)| \mid x \in D \}$ และ $m^{|f|} = \inf \{ |f(x)| \mid x \in D \}$... (2)

จะได้ $M^{|f|} - m^{|f|} \leq \sup f(D) - \inf f(D)$

ข้อพิสูจน์ จาก (1) จะได้ $|f| : D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต ... (3)

$$\begin{aligned} M^{|f|} - m^{|f|} &= \sup \{ |f(x)| \mid x \in D \} - \inf \{ |f(x)| \mid x \in D \} \\ &= \sup \{ |f(x)| - |f(y)| \mid x, y \in D \} \end{aligned} \quad (\text{ทฤษฎีบท 1.2.23}) \quad \dots (4)$$

เพราะว่า $|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)|$ ทุกค่า $x, y \in D$ (ทฤษฎีบท 1.2.2)

เพราะฉะนั้น $\sup \{ |f(x)| - |f(y)| \mid x, y \in D \} \leq \sup \{ |f(x) - f(y)| \mid x, y \in D \}$... (5)

ให้ $x, y \in D$

เพราะฉะนั้น $\inf f(D) \leq f(x) \leq \sup f(D)$ และ $\inf f(D) \leq f(y) \leq \sup f(D)$

$\inf f(D) \leq f(x) \leq \sup f(D)$ และ $-\sup f(D) \leq -f(y) \leq -\inf f(D)$

$\inf f(D) - \sup f(D) \leq f(x) - f(y) \leq \sup f(D) - \inf f(D)$

$-(\sup f(D) - \inf f(D)) \leq f(x) - f(y) \leq \sup f(D) - \inf f(D)$

เพราะฉะนั้น $|f(x) - f(y)| \leq \sup f(D) - \inf f(D)$

เพราะฉะนั้น $|f(x) - f(y)| \leq \sup f(D) - \inf f(D)$ ทุกค่า $x, y \in D$

เพราะฉะนั้น $\sup f(D) - \inf f(D)$ เป็นขอบเขตบนของ $\{ |f(x) - f(y)| \mid x, y \in D \}$

เพราะฉะนั้น $\sup \{ |f(x) - f(y)| \mid x, y \in D \} \leq \sup f(D) - \inf f(D)$... (6)

$$\begin{aligned} M^{|f|} - m^{|f|} &= \sup \{ |f(x)| - |f(y)| \mid x, y \in D \} && (\text{จาก (4)}) \\ &\leq \sup \{ |f(x) - f(y)| \mid x, y \in D \} && (\text{จาก (5)}) \\ &\leq \sup f(D) - \inf f(D) && (\text{จาก (6)}) \end{aligned} \quad \square$$

ทฤษฎีบท 1.4.27 ให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต ... (1)

และมี $\alpha > 0$ ที่ทำให้ $f(x) \geq \alpha > 0$ ทุกค่า $x \in D$... (2)

ให้ $M^{\frac{1}{f}} = \sup \{ \frac{1}{f(x)} \mid x \in D \}$ และ $m^{\frac{1}{f}} = \inf \{ \frac{1}{f(x)} \mid x \in D \}$... (3)

จะได้ $m^{\frac{1}{f}} = \frac{1}{\sup f(D)}$ และ $M^{\frac{1}{f}} = \frac{1}{\inf f(D)}$

ข้อพิสูจน์ จาก (1) จะได้ว่ามี $B > 0$ ที่ทำให้ $f(x) < B$ ทุกค่า $x \in D$... (4)

จาก (2) จะได้ว่า α เป็นขอบเขตล่างของ $f(D)$ เพราะฉะนั้น $\inf f(D) \geq \alpha > 0$... (5)

เพราะฉะนั้น $0 < \alpha \leq \inf f(D) \leq \sup f(D)$... (6)

เพราะว่า $\alpha > 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\alpha} > 0$

เพราะว่า $f(x) \geq \alpha > 0$ ทุกค่า $x \in D$ (จาก (2)) เพราะฉะนั้น $0 < \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{f(x)}$ ทุกค่า $x \in D$... (7)

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\alpha}$ เป็นขอบเขตล่างของ $\{ \frac{1}{f(x)} \mid x \in D \}$

เพราะฉะนั้น $\inf \{ \frac{1}{f(x)} \mid x \in D \} \geq \frac{1}{\alpha}$... (8)

เพราะฉะนั้น $m^{\frac{1}{f}} \geq \frac{1}{\alpha} > 0$... (9)

เพราะว่า $\inf \{ \frac{1}{f(x)} \mid x \in D \} \leq \sup \{ \frac{1}{f(x)} \mid x \in D \}$ เพราะฉะนั้น $m^{\frac{1}{f}} \leq M^{\frac{1}{f}}$... (10)

เพราะฉะนั้น $0 < \frac{1}{\alpha} \leq m^{\frac{1}{f}} \leq M^{\frac{1}{f}}$... (11)

ให้ $x \in D$

เพราะว่า $\frac{1}{f(x)} \geq \inf \{ \frac{1}{f(t)} \mid t \in D \} = m^{\frac{1}{f}}$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{f(x)} \geq m^{\frac{1}{f}} > 0$ (จาก (11))

เพราะฉะนั้น $0 < f(x) \leq \frac{1}{m^{\frac{1}{f}}}$

เพราะฉะนั้น $0 < f(x) \leq \frac{1}{m^{\frac{1}{f}}}$ ทุกค่า $x \in D$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{m^{\frac{1}{f}}}$ เป็นขอบเขตบนของ $f(D)$

เพราะฉะนั้น $\sup f(D) \leq \frac{1}{m^{\frac{1}{f}}}$... (12)

ให้ $x \in D$

จาก (2) จะได้ $0 < f(x)$ เพราะฉะนั้น $0 < f(x) \leq \sup f(D)$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{\sup f(D)} > 0$

เพราะฉะนั้น $0 < \frac{1}{\sup f(D)} \leq \frac{1}{f(x)}$ ทุกค่า $x \in D$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sup f(D)}$ เป็นขอบเขตล่างของ $\{ \frac{1}{f(x)} \mid x \in D \}$

เพราะฉะนั้น $\inf \{ \frac{1}{f(x)} \mid x \in D \} \geq \frac{1}{\sup f(D)} > 0$

เพราะฉะนั้น $m^{\frac{1}{f}} \geq \frac{1}{\sup f(D)} > 0$

เพราะฉะนั้น $\sup f(D) \geq \frac{1}{m^{\frac{1}{f}}}$... (13)

จาก (12) และ (13) จะได้ $\sup f(D) = \frac{1}{m^{\frac{1}{f}}}$ เพราะฉะนั้น $m^{\frac{1}{f}} = \frac{1}{\sup f(D)}$

ให้ $x \in D$

จาก (2) จะได้ $0 < f(x)$ เพราะฉะนั้น $0 < \frac{1}{f(x)}$

เพราะว่า $0 < \frac{1}{f(x)} \leq \sup \left\{ \frac{1}{f(t)} \mid t \in D \right\} = M^{\frac{1}{f}}$ เพราะฉะนั้น $f(x) \geq \frac{1}{M^{\frac{1}{f}}}$

เพราะฉะนั้น $f(x) \geq \frac{1}{M^{\frac{1}{f}}}$ ทุกค่า $x \in D$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{M^{\frac{1}{f}}}$ เป็นขอบเขตล่างของ $f(D)$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{M^{\frac{1}{f}}} \leq \inf f(D)$... (14)

ให้ $x \in D$

เพราะว่า $f(x) \geq \inf f(D) > 0$ เพราะฉะนั้น $0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{\inf f(D)}$

เพราะฉะนั้น $0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{\inf f(D)}$ ทุกค่า $x \in D$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\inf f(D)}$ เป็นขอบเขตบนของ $\left\{ \frac{1}{f(x)} \mid x \in D \right\}$

เพราะฉะนั้น $\sup \left\{ \frac{1}{f(x)} \mid x \in D \right\} \leq \frac{1}{\inf f(D)}$ เพราะฉะนั้น $M^{\frac{1}{f}} \leq \frac{1}{\inf f(D)}$

จาก (11) จะได้ $0 < M^{\frac{1}{f}}$

เพราะว่า $0 < M^{\frac{1}{f}} \leq \frac{1}{\inf f(D)}$ เพราะฉะนั้น $0 < \inf f(D) \leq \frac{1}{M^{\frac{1}{f}}}$... (15)

จาก (14) และ (15) จะได้ $\inf f(D) = \frac{1}{M^{\frac{1}{f}}}$ เพราะฉะนั้น $M^{\frac{1}{f}} = \frac{1}{\inf f(D)}$ □

1.5 จุดภายใน จุดขอบ เซตเปิด และเซตปิด

บทนิยาม 1.5.1 ให้ $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ และ $N_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

$N_\varepsilon(a)$ เรียกว่า บริเวณใกล้เคียงจุด a รัศมี ε (ε -neighborhood of a)

ให้ $N_\varepsilon^*(a) = N_\varepsilon(a) - \{a\}$

$N_\varepsilon^*(a)$ เรียกว่า บริเวณใกล้เคียงจุด a รัศมี ε และไม่รวมจุด a (deleted ε -neighborhood of a)

บทนิยาม 1.5.2 ให้ $S \subset \mathbb{R}$ และ $a \in \mathbb{R}$

1. a เป็น จุดภายใน ของ S (interior point of S) ก็ต่อเมื่อ มี $\varepsilon > 0$ ที่ทำให้ $N_\varepsilon(a) \subset S$

2. a เป็น จุดขอบ ของ S (boundary point of S)

ก็ต่อเมื่อ ทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะได้ $N_\varepsilon(a) \cap S \neq \emptyset$ และ $N_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R} - S) \neq \emptyset$

3. $\text{Int}(S) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ เป็นจุดภายในของ } S\}$ เพราะฉะนั้น $\text{Int}(S) \subset S$

4. $\text{Bd}(S) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ เป็นจุดขอบของ } S\}$

5. ถ้า $\text{Bd}(S) \subset S$ แล้ว S เรียกว่า เซตปิด (closed set)

6. ถ้า $\text{Bd}(S) \subset \mathbb{R} - S$ แล้ว S เรียกว่า เซตเปิด (open set)

ทฤษฎีบท 1.5.1 ให้ $S \subset \mathbb{R}$ จะได้

1. S เป็นเซตเปิด ก็ต่อเมื่อ $\text{Int}(S) = S$

2. S เป็นเซตปิด ก็ต่อเมื่อ $\mathbb{R} - S$ เป็นเซตเปิด

ข้อพิสูจน์ 1. ($\Rightarrow$) สมมติ S เป็นเซตเปิด

เพราะฉะนั้น $\text{Bd}(S) \subset \mathbb{R} - S$... (1)

ให้ $x \in S$

เพราะว่า $\text{Bd}(S) \subset \mathbb{R} - S$ และ $x \in S$ เพราะฉะนั้น $x \notin \text{Bd}(S)$... (2)

เพราะฉะนั้น x ไม่เป็นจุดขอบของ S ... (3)

เพราะฉะนั้นมี $\varepsilon > 0$ ที่ทำให้ $N_\varepsilon(x) \cap S = \emptyset$ หรือ $N_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} - S) = \emptyset$... (4)

เพราะว่า $x \in S$ และ $x \in N_\varepsilon(x)$ เพราะฉะนั้น $x \in N_\varepsilon(x) \cap S$... (5)

เพราะฉะนั้น $N_\varepsilon(x) \cap S = \emptyset$ ไม่จริง ... (6)

จาก (4) และ (6) จะได้ $N_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} - S) = \emptyset$ เพราะฉะนั้น $N_\varepsilon(x) \subset S$

เพราะฉะนั้น x เป็นจุดภายในของ S เพราะฉะนั้น $x \in \text{Int}(S)$

เพราะฉะนั้น $S \subset \text{Int}(S)$

เพราะว่า $\text{Int}(S) \subset S$ และ $S \subset \text{Int}(S)$ เพราะฉะนั้น $S = \text{Int}(S)$

($\Leftarrow$) สมมติ $\text{Int}(S) = S$... (1)

ให้ $x \in \text{Bd}(S)$... (2)

เพราะฉะนั้น ทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะได้ $N_\varepsilon(x) \cap S \neq \emptyset$ และ $N_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} - S) \neq \emptyset$... (3)

สมมติ $x \in S$... (4)

ให้ $\varepsilon > 0$

จาก (3) จะได้ $N_\varepsilon(x) \cap S \neq \emptyset$ และ $N_\varepsilon(x) \cap (R - S) \neq \emptyset$... (5)

เพราะว่า $N_\varepsilon(x) \cap (R - S) \neq \emptyset$ เพราะฉะนั้นมี $y \in N_\varepsilon(x) \cap (R - S)$... (6)

เพราะฉะนั้น $y \in N_\varepsilon(x)$ และ $y \in R - S$

เพราะฉะนั้น $y \in N_\varepsilon(x)$ และ $y \notin S$ เพราะฉะนั้น $N_\varepsilon(x) \not\subset S$

เพราะฉะนั้น $N_\varepsilon(x) \not\subset S$ ทุกค่า $\varepsilon > 0$ เพราะฉะนั้น $x \notin \text{Int}(S)$

เพราะว่า $x \in S$ (จาก (4)) และ $\text{Int}(S) = S$ (จาก (1)) เพราะฉะนั้นเกิดข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (4) ไม่จริง เพราะฉะนั้น $x \notin S$ เพราะฉะนั้น $x \in R - S$

เพราะฉะนั้น $\text{Bd}(S) \subset R - S$ เพราะฉะนั้น S เป็นเซตเปิด

2. ($\Rightarrow$) สมมติ S เป็นเซตปิด ... (1)

เพราะฉะนั้น $\text{Bd}(S) \subset S$... (2)

ให้ $x \in R - S$... (3)

สมมติ $x \notin \text{Int}(R - S)$... (4)

เพราะฉะนั้น x ไม่เป็นจุดภายในของ $R - S$

เพราะฉะนั้น ทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะได้ $N_\varepsilon(x) \not\subset R - S$... (5)

เพราะฉะนั้น ทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะได้ $N_\varepsilon(x) \cap S \neq \emptyset$... (6)

จาก (3) จะได้ $x \in N_\varepsilon(x) \cap (R - S)$ ทุกค่า $\varepsilon > 0$... (7)

จาก (6) และ (7) จะได้ $N_\varepsilon(x) \cap (R - S) \neq \emptyset$ และ $N_\varepsilon(x) \cap S \neq \emptyset$ ทุกค่า $\varepsilon > 0$... (8)

จาก (8) จะได้ $x \in \text{Bd}(S)$... (9)

จาก (2) และ (9) จะได้ $x \in S$ เกิดข้อขัดแย้งกับ (3) เพราะฉะนั้นที่สมมติ (4) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $x \in \text{Int}(R - S)$

เพราะฉะนั้น $R - S \subset \text{Int}(R - S)$

เพราะฉะนั้น $R - S = \text{Int}(R - S)$ เพราะฉะนั้น $R - S$ เป็นเซตเปิด (จากข้อ 1)

($\Leftarrow$) สมมติ $R - S$ เป็นเซตเปิด ... (1)

เพราะฉะนั้น $\text{Int}(R - S) = R - S$ (จากข้อ 1) ... (2)

ให้ $x \in \text{Bd}(S)$... (3)

สมมติ $x \notin S$... (4)

เพราะฉะนั้น $x \in R - S$... (5)

เพราะว่า $\text{Int}(R - S) = R - S$ (จาก (2)) เพราะฉะนั้น $x \in \text{Int}(R - S)$

เพราะฉะนั้นมี $\varepsilon > 0$ ที่ทำให้ $N_\varepsilon(x) \subset R - S$ เพราะฉะนั้น $N_\varepsilon(x) \cap S = \emptyset$

เพราะฉะนั้นมี $\varepsilon > 0$ ที่ทำให้ $N_\varepsilon(x) \cap S = \emptyset$ เพราะฉะนั้น x ไม่เป็นจุดขอบของ S

เพราะฉะนั้น $x \notin \text{Bd}(S)$ เกิดข้อขัดแย้งกับ (3) เพราะฉะนั้นที่สมมติ (4) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $x \in S$

เพราะฉะนั้น $\text{Bd}(S) \subset S$ เพราะฉะนั้น S เป็นเซตปิด



ข้อสังเกต เพราะว่า $\text{Int}(S) \subset S$ เพราะฉะนั้นการพิสูจน์ว่า $S = \text{Int}(S)$ เราแสดงว่า $S \subset \text{Int}(S)$ ก็เพียงพอ เพราะฉะนั้น ถ้า $S \subset \text{Int}(S)$ แล้ว $S = \text{Int}(S)$

ตัวอย่าง 1.5.1 ให้ $S = (0, 5)$ จงหา $\text{Int}(S)$ และ $\text{Bd}(S)$

แนวคิด เพราะว่า $S = (0, 5)$ เพราะฉะนั้น $R - S = (-\infty, 0] \cup [5, \infty)$

การแสดงว่า $\text{Int}(S) = (0, 5)$

ให้ $x \in S$

$$\text{ให้ } \varepsilon = \frac{1}{2} \min \{x, 5 - x\}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \varepsilon < x \text{ และ } \varepsilon < 5 - x \text{ เพราะฉะนั้น } -x < -\varepsilon \text{ และ } \varepsilon < 5 - x \quad \dots (1)$$

ให้ $y \in N_\varepsilon(x)$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 0 < |y - x| < \varepsilon \text{ เพราะฉะนั้น } -\varepsilon < y - x < \varepsilon$$

$$-x < -\varepsilon < y - x < \varepsilon \quad (\text{จาก (1)})$$

$$-x < -\varepsilon < y - x < \varepsilon < 5 - x \quad (\text{จาก (1)})$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } -x < y - x < 5 - x$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 0 < y < 5$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } y \in S$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } N_\varepsilon(x) \subset S$$

เพราะฉะนั้น x เป็นจุดภายในของ S เพราะฉะนั้น $x \in \text{Int}(S)$

เพราะฉะนั้น $S \subset \text{Int}(S)$

เพราะว่า $\text{Int}(S) \subset S$ เพราะฉะนั้น $S = \text{Int}(S)$ เพราะฉะนั้น $\text{Int}(S) = (0, 5)$

การแสดงว่า $\text{Bd}(S) = \{0, 5\}$

พิจารณาที่ $x = 0$

ให้ $\varepsilon > 0$

กรณีที่ 1 $0 < \varepsilon < 5$

$$N_\varepsilon(0) \cap S = (-\varepsilon, \varepsilon) \cap (0, 5) = (0, \varepsilon) \neq \emptyset \quad (\text{เพราะว่า } \frac{\varepsilon}{2} \in (0, \varepsilon))$$

$$N_\varepsilon(0) \cap (R - S) = (-\varepsilon, \varepsilon) \cap ((-\infty, 0] \cup [5, \infty)) = (-\varepsilon, 0] \neq \emptyset$$

กรณีที่ 2 $\varepsilon \geq 5$

$$N_\varepsilon(0) \cap S = (-\varepsilon, \varepsilon) \cap (0, 5) = (0, 5) \neq \emptyset \quad (\text{เพราะว่า } \varepsilon \geq 5)$$

$$N_\varepsilon(0) \cap (R - S) = (-\varepsilon, \varepsilon) \cap ((-\infty, 0] \cup [5, \infty)) = (-\varepsilon, 0] \cup [5, \varepsilon) \neq \emptyset$$

เพราะฉะนั้น ทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะได้ $N_\varepsilon(0) \cap S \neq \emptyset$ และ $N_\varepsilon(0) \cap (R - S) \neq \emptyset$

เพราะฉะนั้น 0 เป็นจุดขอบของ S ... (2)

พิจารณาที่ $x = 5$

ให้ $\varepsilon > 0$

กรณีที่ 1 $0 < \varepsilon < 5$ เพราะฉะนั้น $5 - \varepsilon > 0$

$$N_\varepsilon(5) \cap S = (5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon) \cap (0, 5) = (5 - \varepsilon, 5) \quad (\text{เพราะว่า } 5 - \varepsilon > 0)$$

เพราะว่า $5 - \frac{\varepsilon}{2} \in (5 - \varepsilon, 5)$ เพราะฉะนั้น $N_\varepsilon(5) \cap S \neq \emptyset$

$$N_\varepsilon(5) \cap (R - S) = (5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon) \cap ((-\infty, 0] \cup [5, \infty)) = [5, 5 + \varepsilon) \neq \emptyset$$

กรณีที่ 2 $\varepsilon \geq 5$ เพราะฉะนั้น $5 - \varepsilon \leq 0$

$$N_\varepsilon(5) \cap S = (5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon) \cap (0, 5) = (0, 5) \neq \emptyset \quad (\text{เพราะว่า } 5 - \varepsilon \leq 0)$$

$$N_\varepsilon(5) \cap (R - S) = (5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon) \cap ((-\infty, 0] \cup [5, \infty)) = (5 - \varepsilon, 0] \cup [5, 5 + \varepsilon) \neq \emptyset$$

เพราะฉะนั้น ทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะได้ $N_\varepsilon(5) \cap (R - S) \neq \emptyset$ และ $N_\varepsilon(5) \cap S \neq \emptyset$

เพราะฉะนั้น 5 เป็นจุดขอบของ S ... (3)

การแสดงว่า ถ้า $x < 0$ หรือ $0 < x < 5$ หรือ $x > 5$ แล้ว x ไม่เป็นจุดขอบ ... (4)

ให้ $x < 0$

ให้ $\varepsilon = -\frac{x}{2}$ เพราะฉะนั้น $\varepsilon > 0$

$$\text{เพราะฉะนั้น } N_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = (x - \frac{x}{2}, x + \frac{x}{2}) = (\frac{x}{2}, \frac{3x}{2})$$

$$\text{เพราะว่า } x < 0 \text{ เพราะฉะนั้น } \frac{3x}{2} < 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } (\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}) \cap (0, 5) = \emptyset \text{ เพราะฉะนั้น } N_\varepsilon(x) \cap S = \emptyset$$

$$\text{เพราะฉะนั้นมี } \varepsilon > 0 \text{ ที่ทำให้ } N_\varepsilon(x) \cap S = \emptyset$$

เพราะฉะนั้น x ไม่เป็นจุดขอบของ S

ให้ $x \in (0, 5)$

เพราะว่า $\text{Int}(S) = (0, 5)$ และ $\text{Int}(S) \subset S$ เพราะฉะนั้นมี $\varepsilon > 0$ ที่ทำให้ $N_\varepsilon(x) \subset S$

$$\text{เพราะฉะนั้นมี } \varepsilon > 0 \text{ ที่ทำให้ } N_\varepsilon(x) \cap (R - S) = \emptyset$$

$$\text{เพราะฉะนั้นมี } \varepsilon > 0 \text{ ที่ทำให้ } N_\varepsilon(x) \cap (R - S) = \emptyset$$

เพราะฉะนั้น x ไม่เป็นจุดขอบของ S

ให้ $x > 5$

ให้ $\varepsilon = x - 5$ เพราะฉะนั้น $\varepsilon > 0$

$$N_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = (x - (x - 5), x + (x - 5)) = (5, 2x - 5)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } N_\varepsilon(x) \cap S = (5, 2x - 5) \cap (0, 5) = \emptyset$$

เพราะฉะนั้นมี $\varepsilon > 0$ ที่ทำให้ $N_\varepsilon(x) \cap S = \emptyset$ เพราะฉะนั้น x ไม่เป็นจุดขอบของ S

จาก (2), (3) และ (4) จะได้ $\text{Bd}(S) = \{0, 5\}$

หมายเหตุ ในทำนองเดียวกันจะได้

$$1. S = [0, 5] \text{ จะได้ } \text{Int}(S) = (0, 5) \text{ และ } \text{Bd}(S) = \{0, 5\}$$

$$2. S = [0, 5) \text{ จะได้ } \text{Int}(S) = (0, 5) \text{ และ } \text{Bd}(S) = \{0, 5\}$$

$$3. S = (0, 5] \text{ จะได้ } \text{Int}(S) = (0, 5) \text{ และ } \text{Bd}(S) = \{0, 5\}$$

$$4. S = [5, \infty) \text{ จะได้ } \text{Int}(S) = (5, \infty) \text{ และ } \text{Bd}(S) = \{5\}$$

□

ทฤษฎีบท 1.5.2 ให้ $S \subset \mathbb{R}$ และ $a, b \in \mathbb{R}$ และ $a \leq b$ จะได้

1. ถ้า ทุกจุด $s \in S$ เป็นจุดภายในของ S แล้ว S เป็นเซตเปิด
2. (a, b) , $(-\infty, a)$ และ (b, ∞) เป็นเซตเปิด
3. ถ้า A, B เป็นเซตเปิด แล้ว $A \cup B$ เป็นเซตเปิด
4. $[a, b]$, $(-\infty, a]$ และ $[b, \infty)$ เป็นเซตปิด
5. ให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ $N_\varepsilon(a)$ และ $N_\varepsilon^*(a)$ เป็นเซตเปิด

ข้อพิสูจน์ 1. ให้ ทุกจุด $s \in S$ เป็นจุดภายในของ S

เพราะฉะนั้น $S \subset \text{Int}(S)$ เพราะว่า $\text{Int}(S) \subset S$ เพราะฉะนั้น $S = \text{Int}(S)$

เพราะฉะนั้น S เป็นเซตเปิด

(ทฤษฎีบท 1.5.1)

2. ให้ $x \in (a, b)$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2} \min \{x - a, b - x\}$ เพราะฉะนั้น $\varepsilon > 0$ และ $\varepsilon < x - a$ และ $\varepsilon < b - x$

เพราะฉะนั้น $a < x - \varepsilon$ และ $x + \varepsilon < b$... (1)

ให้ $w \in N_\varepsilon(x)$

เพราะฉะนั้น $x - \varepsilon < w < x + \varepsilon$... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $a < w < b$ เพราะฉะนั้น $N_\varepsilon(x) \subset (a, b)$

เพราะฉะนั้น x เป็นจุดภายในของ (a, b)

เพราะฉะนั้นทุกจุด $w \in (a, b)$ เป็นจุดภายในของ (a, b) เพราะฉะนั้น (a, b) เป็นเซตเปิด (อ้างข้อ 1)

ให้ $x \in (-\infty, a)$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}(a - x)$

เพราะฉะนั้น $\varepsilon > 0$ และ $\varepsilon < a - x$ เพราะฉะนั้น $\varepsilon > 0$ และ $x + \varepsilon < a$... (3)

ให้ $w \in N_\varepsilon(x)$

เพราะฉะนั้น $x - \varepsilon < w < x + \varepsilon$... (4)

เพราะฉะนั้นจาก (3) และ (4) จะได้ $-\infty < w < a$ เพราะฉะนั้น $N_\varepsilon(x) \subset (-\infty, a)$

เพราะฉะนั้น x เป็นจุดภายในของ $(-\infty, a)$

เพราะฉะนั้นทุกจุด $x \in (-\infty, a)$ เป็นจุดภายในของ $(-\infty, a)$ เพราะฉะนั้น $(-\infty, a)$ เป็นเซตเปิด (อ้างข้อ 1)

ให้ $x \in (b, \infty)$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}(x - b)$

เพราะฉะนั้น $\varepsilon > 0$ และ $\varepsilon < x - b$ เพราะฉะนั้น $\varepsilon > 0$ และ $b < x - \varepsilon$... (5)

ให้ $w \in N_\varepsilon(x)$

เพราะฉะนั้น $x - \varepsilon < w < x + \varepsilon$... (6)

เพราะฉะนั้นจาก (5) และ (6) จะได้ $b < w < \infty$ เพราะฉะนั้น $N_\varepsilon(x) \subset (b, \infty)$

เพราะฉะนั้น x เป็นจุดภายในของ (b, ∞)

เพราะฉะนั้นทุกจุด $x \in (b, \infty)$ เป็นจุดภายในของ (b, ∞) เพราะฉะนั้น (b, ∞) เป็นเซตเปิด (อ้างข้อ 1)

3. ให้ A, B เป็นเซตเปิด

ให้ $x \in A \cup B$ เพราะฉะนั้น $x \in A$ หรือ $x \in B$

กรณีที่ 1 $x \in A$ เพราะว่า A เป็นเซตเปิด เพราะฉะนั้นมี $\varepsilon > 0$ ที่ทำให้ $N_\varepsilon(x) \subset A$

เพราะฉะนั้น $N_\varepsilon(x) \subset A \cup B$

กรณีที่ 2 $x \in B$ เพราะว่า B เป็นเซตเปิด เพราะฉะนั้นมี $\varepsilon > 0$ ที่ทำให้ $N_\varepsilon(x) \subset B$

เพราะฉะนั้น $N_\varepsilon(x) \subset A \cup B$

จากทั้งสองกรณีจะได้ $N_\varepsilon(x) \subset A \cup B$ เพราะฉะนั้น x เป็นจุดภายในของ $A \cup B$

เพราะฉะนั้นทุกจุด $x \in A \cup B$ เป็นจุดภายในของ $A \cup B$ เพราะฉะนั้น $A \cup B$ เป็นเซตเปิด (อ้างข้อ 1)

4. $[a, b] = \mathbb{R} - ((-\infty, a) \cup (b, \infty))$

เพราะว่า $(-\infty, a), (b, \infty)$ เป็นเซตเปิด

(อ้างข้อ 2)

เพราะฉะนั้น $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ เป็นเซตเปิด

(อ้างข้อ 3)

เพราะฉะนั้น $\mathbb{R} - ((-\infty, a) \cup (b, \infty))$ เป็นเซตปิด

(ทฤษฎีบท 1.5.1)

เพราะว่า $[a, b] = \mathbb{R} - ((-\infty, a) \cup (b, \infty))$ เพราะฉะนั้น $[a, b]$ เป็นเซตปิด

$(-\infty, a] = \mathbb{R} - (a, \infty)$

เพราะว่า (a, ∞) เป็นเซตเปิด

(อ้างข้อ 2)

เพราะฉะนั้น $\mathbb{R} - (a, \infty)$ เป็นเซตปิด

(ทฤษฎีบท 1.5.1)

เพราะว่า $(-\infty, a] = \mathbb{R} - (a, \infty)$ เพราะฉะนั้น $(-\infty, a]$ เป็นเซตปิด

$[b, \infty) = \mathbb{R} - (-\infty, b)$

เพราะว่า $(-\infty, b)$ เป็นเซตเปิด

(อ้างข้อ 2)

เพราะฉะนั้น $\mathbb{R} - (-\infty, b)$ เป็นเซตปิด

(ทฤษฎีบท 1.5.1)

เพราะว่า $[b, \infty) = \mathbb{R} - (-\infty, b)$ เพราะฉะนั้น $[b, \infty)$ เป็นเซตปิด

5. เพราะว่า $N_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ และ $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ เป็นเซตเปิด

(อ้างข้อ 2)

เพราะฉะนั้น $N_\varepsilon(a)$ เป็นเซตเปิด

เพราะว่า $(a - \varepsilon, a)$ และ $(a, a + \varepsilon)$ เป็นเซตเปิด

(อ้างข้อ 2)

และ $N_\varepsilon^*(a) = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$

เพราะฉะนั้น $N_\varepsilon^*(a)$ เป็นเซตเปิด

(อ้างข้อ 3)



ข้อควรจำ คำว่า S เป็นเซตปิด และ S เป็นเซตเปิด ไม่ใช่สิ่งตรงข้ามกัน กล่าวคือ

ถ้า S ไม่เป็นเซตเปิด แล้ว S อาจเป็นเซตปิด หรือ S ไม่เป็นเซตปิดก็ได้

ถ้า S ไม่เป็นเซตปิด แล้ว S อาจเป็นเซตเปิด หรือ S ไม่เป็นเซตเปิดก็ได้

ตัวอย่างเช่น

1. $S = (0, 5)$, $\text{Int}(S) = S$ และ $\text{Bd}(S) = \{0, 5\}$ เพราะฉะนั้น S เป็นเซตเปิด และ S ไม่เป็นเซตปิด

2. $S = [0, 5)$, $\text{Int}(S) = (0, 5)$ และ $\text{Bd}(S) = \{0, 5\}$ เพราะฉะนั้น S ไม่เป็นเซตเปิด และ S ไม่เป็นเซตปิด

3. $S = [0, 5]$, $\text{Int}(S) = (0, 5)$ และ $\text{Bd}(S) = \{0, 5\} \subset S$ เพราะฉะนั้น S ไม่เป็นเซตเปิด และ S เป็นเซตปิด

4. $S = [5, \infty)$, $\text{Int}(S) = (5, \infty)$ และ $\text{Bd}(S) = \{5\} \subset S$ เพราะฉะนั้น S ไม่เป็นเซตเปิด และ S เป็นเซตปิด

ทฤษฎีบท 1.5.3 ให้ A_α เป็นสับเซตของ U ทุกค่า $\alpha \in J$ เมื่อ J เป็นเซตของดัชนี จะได้

$$1. U - \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} (U - A_\alpha)$$

$$2. U - \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in J} (U - A_\alpha)$$

ข้อพิสูจน์ 1. ให้ $x \in U - \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$

เพราะฉะนั้น $x \notin \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$ เพราะฉะนั้นมี $t \in J$ ที่ทำให้ $x \notin A_t$ เพราะฉะนั้น $x \in U - A_t$

เพราะฉะนั้น $x \in \bigcup_{\alpha \in J} (U - A_\alpha)$

เพราะฉะนั้น $U - \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in J} (U - A_\alpha)$... (1)

ให้ $x \in \bigcup_{\alpha \in J} (U - A_\alpha)$

เพราะฉะนั้นมี $t \in J$ ที่ทำให้ $x \in U - A_t$ เพราะฉะนั้น $x \notin A_t$ เพราะฉะนั้น $x \notin \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$

เพราะฉะนั้น $x \in U - \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$

เพราะฉะนั้น $\bigcup_{\alpha \in J} (U - A_\alpha) \subset U - \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $U - \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} (U - A_\alpha)$

2. ให้ $x \in U - \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$

เพราะฉะนั้น $x \notin \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ เพราะฉะนั้น $x \notin A_\alpha$ ทุกค่า $\alpha \in J$

เพราะฉะนั้น $x \in U - A_\alpha$ ทุกค่า $\alpha \in J$

เพราะฉะนั้น $x \in \bigcap_{\alpha \in J} (U - A_\alpha)$

เพราะฉะนั้น $U - \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha \subset \bigcap_{\alpha \in J} (U - A_\alpha)$... (1)

ให้ $x \in \bigcap_{\alpha \in J} (U - A_\alpha)$

เพราะฉะนั้น $x \in U - A_\alpha$ ทุกค่า $\alpha \in J$ เพราะฉะนั้น $x \notin A_\alpha$ ทุกค่า $\alpha \in J$

เพราะฉะนั้น $x \notin \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$

เพราะฉะนั้น $x \in U - \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$

เพราะฉะนั้น $\bigcap_{\alpha \in J} (U - A_\alpha) \subset U - \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $U - \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in J} (U - A_\alpha)$ □

ทฤษฎีบท 1.5.4 ให้ A_i เป็นสับเซตของ U ทุกค่า $i \in F$ เมื่อ F เป็นเซตของดัชนี จะได้

1. ให้ A_i เป็นเซตเปิด ทุกค่า $i \in F$ จะได้ $\bigcup_{i \in F} A_i$ เป็นเซตเปิด
2. ให้ A_i เป็นเซตเปิด ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, n$ จะได้ $\bigcap_{i=1}^n A_i$ เป็นเซตเปิด

ข้อพิสูจน์ 1. ให้ A_i เป็นเซตเปิด ทุกค่า $i \in F$

$$\text{ให้ } x \in \bigcup_{i \in F} A_i$$

เพราะฉะนั้นมี $\alpha \in F$ ที่ทำให้ $x \in A_\alpha$

เพราะว่า A_α เป็นเซตเปิด เพราะฉะนั้น $A_\alpha = \text{Int}(A_\alpha)$ เพราะฉะนั้น $x \in \text{Int}(A_\alpha)$

เพราะฉะนั้นมี $\varepsilon > 0$ ที่ทำให้ $N_\varepsilon(x) \subset A_\alpha$ เพราะฉะนั้นมี $\varepsilon > 0$ ที่ทำให้ $N_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{i \in F} A_i$

เพราะฉะนั้น x เป็นจุดภายในของ $\bigcup_{i \in F} A_i$ เพราะฉะนั้น $x \in \text{Int}(\bigcup_{i \in F} A_i)$

เพราะฉะนั้น $\bigcup_{i \in F} A_i \subset \text{Int}(\bigcup_{i \in F} A_i)$

เพราะว่า $\text{Int}(\bigcup_{i \in F} A_i) \subset \bigcup_{i \in F} A_i$ เพราะฉะนั้น $\bigcup_{i \in F} A_i = \text{Int}(\bigcup_{i \in F} A_i)$

เพราะฉะนั้น $\bigcup_{i \in F} A_i$ เป็นเซตเปิด

(ทฤษฎีบท 1.5.1)

2. ให้ A_i เป็นเซตเปิด ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, n$... (1)

โดยทฤษฎีบท 1.5.1 จะได้ $A_i = \text{Int}(A_i)$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, n$... (2)

กรณีที่ 1 $\bigcap_{i=1}^n A_i = \emptyset$

$$\text{เพราะว่า } \text{Bd}(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \text{Bd}(\emptyset)$$

$$\subset R$$

$$= R - \emptyset$$

$$= R - \bigcap_{i=1}^n A_i$$

เพราะฉะนั้น $\text{Bd}(\bigcap_{i=1}^n A_i) \subset R - \bigcap_{i=1}^n A_i$ เพราะฉะนั้น $\bigcap_{i=1}^n A_i$ เป็นเซตเปิด

กรณีที่ 2 $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$

$$\text{ให้ } x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$$

เพราะฉะนั้น $x \in A_i$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, n$... (3)

จาก (2) และ (3) จะได้ $x \in \text{Int}(A_i)$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, n$

เพราะฉะนั้น ทุกค่า $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ จะมี ε_i ที่ทำให้ $N_{\varepsilon_i}(x) \subset A_i$... (4)

ให้ $\varepsilon = \min \{ \varepsilon_i \mid i = 1, 2, 3, \dots, n \}$

เพราะฉะนั้น $N_\varepsilon(x) \subset N_{\varepsilon_i}(x)$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, n$... (5)

จาก (4) และ (5) จะได้ $N_\varepsilon(x) \subset A_i$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, n$ เพราะฉะนั้น $N_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$

เพราะฉะนั้น x เป็นจุดภายในของ $\bigcap_{i=1}^n A_i$ เพราะฉะนั้น $x \in \text{Int}(\bigcap_{i=1}^n A_i)$

เพราะฉะนั้น $\bigcap_{i=1}^n A_i \subset \text{Int}(\bigcap_{i=1}^n A_i)$

เพราะว่า $\text{Int}(\bigcap_{i=1}^n A_i) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$ เพราะฉะนั้น $\bigcap_{i=1}^n A_i = \text{Int}(\bigcap_{i=1}^n A_i)$

เพราะฉะนั้น $\bigcap_{i=1}^n A_i$ เป็นเซตเปิด (ทฤษฎีบท 1.5.1) □

ทฤษฎีบท 1.5.5 1. ให้ A_i เป็นเซตปิด ทุกค่า $i \in F$ จะได้ $\bigcap_{i \in F} A_i$ เป็นเซตปิด

2. ให้ A_i เป็นเซตปิด ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, n$ จะได้ $\bigcup_{i=1}^n A_i$ เป็นเซตปิด

ข้อพิสูจน์ 1. ให้ A_i เป็นเซตปิด ทุกค่า $i \in F$

เพราะฉะนั้น $R - A_i$ เป็นเซตเปิด ทุกค่า $i \in F$ (ทฤษฎีบท 1.5.1)

เพราะฉะนั้น $\bigcup_{i \in F} (R - A_i)$ เป็นเซตเปิด (ทฤษฎีบท 1.5.4)

เพราะว่า $\bigcup_{i \in F} (R - A_i) = R - \bigcap_{i \in F} A_i$ (ทฤษฎีบท 1.5.3) เพราะฉะนั้น $R - \bigcap_{i \in F} A_i$ เป็นเซตเปิด

เพราะฉะนั้น $\bigcap_{i \in F} A_i$ เป็นเซตปิด (ทฤษฎีบท 1.5.1)

2. ให้ A_i เป็นเซตปิด ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, n$

เพราะฉะนั้น $R - A_i$ เป็นเซตเปิด ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (ทฤษฎีบท 1.5.1)

เพราะฉะนั้น $\bigcap_{i=1}^n (R - A_i)$ เป็นเซตเปิด (ทฤษฎีบท 1.5.4)

เพราะว่า $R - \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n (R - A_i)$ (ทฤษฎีบท 1.5.3) เพราะฉะนั้น $R - \bigcup_{i=1}^n A_i$ เป็นเซตเปิด

เพราะฉะนั้น $\bigcup_{i=1}^n A_i$ เป็นเซตปิด (ทฤษฎีบท 1.5.1) □

ตัวอย่าง 1.5.2 ให้ $A_k = [0, 2 - \frac{1}{k}]$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \dots$ จงแสดงว่า $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = [0, 2)$

แนวคิด ให้ $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

เพราะฉะนั้นมี $k \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $x \in A_k$ เพราะฉะนั้น $x \in [0, 2 - \frac{1}{k}]$ เพราะฉะนั้น $0 \leq x \leq 2 - \frac{1}{k}$

เพราะว่า $2 - \frac{1}{k} < 2$ เพราะฉะนั้น $0 \leq x < 2$ เพราะฉะนั้น $x \in [0, 2)$

เพราะฉะนั้น $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset [0, 2)$... (1)

ให้ $x \in [0, 2)$

เพราะฉะนั้น $0 \leq x < 2 \Rightarrow 2 - x > 0 \Rightarrow \frac{1}{2-x} > 0$

เพราะฉะนั้นมี $q \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $q > \frac{1}{2-x}$

เพราะฉะนั้น $0 < \frac{1}{q} < 2 - x$ และ $0 < x + \frac{1}{q}$

เพราะว่า $0 < \frac{1}{q} < 2 - x \Rightarrow 0 < x + \frac{1}{q} < 2 \Rightarrow 0 < x < 2 - \frac{1}{q} \Rightarrow x \in A_q \Rightarrow x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

เพราะฉะนั้น $[0, 2) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = [0, 2)$ □

ตัวอย่าง 1.5.3 ให้ $A_k = (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \dots$ จงแสดงว่า $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{0\}$

แนวคิด เพราะว่า $-\frac{1}{k} < 0 < \frac{1}{k}$ ทุกค่า $k \in \mathbb{N}$ เพราะฉะนั้น $0 \in A_k$ ทุกค่า $k \in \mathbb{N}$

เพราะฉะนั้น $0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

เพราะฉะนั้น $\{0\} \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$... (1)

ให้ $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

เพราะฉะนั้น $x \in A_k$ ทุกค่า $k \in \mathbb{N}$... (2)

สมมติ $x \neq 0$... (3)

เพราะฉะนั้น $|x| > 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{|x|} > 0$

เพราะฉะนั้นมี $q \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $q > \frac{1}{|x|}$ เพราะฉะนั้น $|x| > \frac{1}{q}$

เพราะฉะนั้น $x < -\frac{1}{q}$ หรือ $x > \frac{1}{q}$ เพราะฉะนั้น $x \notin A_q$... (4)

เพราะฉะนั้น (2) และ (4) ขัดแย้งกัน เพราะฉะนั้นที่สมมติ (3) ไม่จริง เพราะฉะนั้น $x = 0$

เพราะฉะนั้น $x \in \{0\}$

เพราะฉะนั้น $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \{0\}$... (5)

จาก (1) และ (5) จะได้ $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{0\}$ □

ตัวอย่าง 1.5.4 ให้ $A_k = [p - \frac{1}{k}, p + \frac{1}{k}]$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \dots$ จงแสดงว่า $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{p\}$

แนวคิด เพราะว่า $p - \frac{1}{k} \leq p \leq p + \frac{1}{k}$ ทุกค่า $k \in \mathbb{N}$ เพราะฉะนั้น $p \in A_k$ ทุกค่า $k \in \mathbb{N}$

เพราะฉะนั้น $p \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

เพราะฉะนั้น $\{p\} \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$... (1)

ให้ $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

เพราะฉะนั้น $x \in A_k$ ทุกค่า $k \in \mathbb{N}$

เพราะฉะนั้น $p - \frac{1}{k} \leq x \leq p + \frac{1}{k}$ ทุกค่า $k \in \mathbb{N}$... (2)

สมมติ $x \neq p$... (3)

เพราะฉะนั้น $|x - p| > 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{|x - p|} > 0$ เพราะฉะนั้นมี $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $n > \frac{1}{|x - p|}$

เพราะฉะนั้น $0 < \frac{1}{n} < |x - p|$ เพราะฉะนั้น $x - p < -\frac{1}{n}$ หรือ $x - p > \frac{1}{n}$

เพราะฉะนั้น $x < p - \frac{1}{n}$ หรือ $x > p + \frac{1}{n}$ เพราะฉะนั้น $x \notin A_n$... (4)

เพราะฉะนั้น (2) และ (4) ขัดแย้งกัน เพราะฉะนั้นที่สมมติ (3) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $x = p$ เพราะฉะนั้น $x \in \{p\}$

เพราะฉะนั้น $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \{p\}$... (5)

จาก (1) และ (2) จะได้ $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{p\}$

□

หมายเหตุ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ จะได้

1. A_n เป็นเซตเปิด ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ (ทฤษฎีบท 1.5.2)

2. จากตัวอย่าง 1.5.3 จะได้ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ และ $\{0\}$ ไม่เป็นเซตเปิด

เพราะฉะนั้นมีกรณีตัวอย่างของ A_n เป็นเซตเปิด ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ และ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ไม่เป็นเซตเปิด

สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $A_n = [0, 2 - \frac{1}{n}]$ จะได้

1. $A_n = [0, 2 - \frac{1}{n}]$ เป็นเซตปิด ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ (ทฤษฎีบท 1.5.2)

2. จากตัวอย่าง 1.5.2 จะได้ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0, 2)$ และ $[0, 2)$ ไม่เป็นเซตปิด

เพราะฉะนั้นมีกรณีตัวอย่างของ A_n เป็นเซตปิด ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ และ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ไม่เป็นเซตปิด

บทนิยาม 1.5.3 ให้ $S \subset \mathbb{R}$ และ $x \in \mathbb{R}$

x เป็น **accumulation point** (จุดลิมิต) ของ S ก็ต่อเมื่อ ทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะได้ $N_\varepsilon^*(x) \cap S \neq \emptyset$

เพราะฉะนั้น x เป็น accumulation point ของ S ก็ต่อเมื่อ ทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะได้ $((x - \varepsilon, x + \varepsilon) - \{x\}) \cap S \neq \emptyset$

ให้ $\text{Acc}(S) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ เป็น accumulation point ของ } S\}$

x เป็น **isolated point of S** ก็ต่อเมื่อ ($x \in S$ และ $x \notin \text{Acc}(S)$)

หมายเหตุ

1. accumulation point ของ S ก็คือจุดที่มีจุดอื่นในเซต S อยู่ใกล้ ๆ นั่นเอง
ซึ่งอาจจะอยู่ใกล้ ๆ ทั้งสองด้านหรือด้านใดด้านหนึ่งเพียงด้านเดียวก็ได้
เช่น 1.5 เป็น accumulation point ของ $(1, 2)$ โดยมีจุดอื่นใน $(1, 2)$ อยู่ใกล้ ๆ 1.5 ทั้งสองด้าน
แต่ 1 เป็น accumulation point ของ $(1, 2)$ โดยมีจุดอื่นใน $(1, 2)$ อยู่ใกล้ ๆ 1 ทางด้านขวาเท่านั้น
2. ในตำราบางเล่มอาจเรียกชื่อ accumulation point เป็น limit point, cluster point
3. x เป็น accumulation point ของ S โดยที่ x อาจไม่เป็นสมาชิกของ S ตัวอย่างเช่น
 - 3.1 ให้ $A = [1, 2]$ จะได้ว่าจุดทุกจุดใน A เป็น accumulation point ของ A
 - 3.2 ให้ $B = (1, 2)$ จะได้ว่าจุดทุกจุดใน B เป็น accumulation point ของ B
รวมทั้ง 1 และ 2 ก็เป็น accumulation point ของ B แต่ $1 \notin B$ และ $2 \notin B$
 - 3.3 ให้ $C = (1, 2) \cup \{3\}$ จะได้ว่าจุดทุกจุดใน $[1, 2]$ เป็น accumulation point ของ C
แต่ 3 ไม่เป็น accumulation point ของ C
เพราะว่า มี $\varepsilon = 0.5$ ซึ่ง $((3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon) - \{3\}) \cap C = ((2.5, 3.5) - \{3\}) \cap C = \emptyset$
 - 3.4 ให้ $D = \{1, 2, 3\}$ จะได้ว่า D ไม่มี accumulation point
 - 3.5 ให้ $F = (-\infty, \infty)$ จะได้ว่าจุดทุกจุดใน F เป็น accumulation point

ทฤษฎีบท 1.5.6 ให้ $S \subset \mathbb{R}$ และ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

x เป็น accumulation point ของ S ก็ต่อเมื่อ $N_\varepsilon^*(x) \cap S$ เป็นเซตอนันต์ ทุกค่า $\varepsilon > 0$

ข้อพิสูจน์ ให้ $S \subset \mathbb{R}$ และ $x \in \mathbb{R}$

$(\Rightarrow)$ สมมติ x เป็น accumulation point ของ S

... (1)

ให้ $\varepsilon > 0$

จาก (1) จะได้ $N_\varepsilon^*(x) \cap S \neq \emptyset$

ให้ $x_1 \in N_\varepsilon^*(x) \cap S$

เพราะฉะนั้น $0 < |x_1 - x| < \varepsilon$

ให้ $\varepsilon_1 = |x_1 - x|$

จาก (1) จะได้ $N_{\varepsilon_1}^*(x) \cap S \neq \emptyset$

ให้ $x_2 \in N_{\varepsilon_1}^*(x) \cap S$

เพราะฉะนั้น $0 < |x_2 - x| < \varepsilon_1$