AS APPLIED STAT

การพยากรณ์ทางธุรกิจด้วย Excel

BUSINESS FORECASTING BY EXCEL

รองศาสตราจารย์ ดร.ฐิตนนท์ จารุโรจน์กีรติ

ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

การพยากรณ์ทางธุรกิจด้วย Excel

Business Forecasting Using Excel

สงวนลิขสิทธิ์ รองศาสตราจารย์ ดร.ฐิตนนท์ จารุโรจน์กีรติ

ห้ามการลอกเลียนไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ นอกจากจะได้รับอนุญาต

เรียบเรียงโดย รองศาสตราจารย์ ดร.ฐิตนนท์ จารุโรจน์กีรติ

พิมพ์ครั้งที่ 1 2567

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

National Library of Thailand Cataloging in Publication Data.

ฐิตนนท์ จารุโรจน์กีรติ.

การพยากรณ์ทางธุรกิจด้วย Excel = Business forecasting using Excel.--

กรุงเทพฯ : กองส่งเสริมวิชาการ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ,

2567.

478 หน้า.

1. พยากรณ์ธุรกิจ. 2. ไมโครซอฟต์เอ็กเซล. I. ชื่อเรื่อง.

338.544

ISBN 978-616-368-117-1

ราคา ฿190 หรือ $7

จัดพิมพ์โดย

กองส่งเสริมวิชาการ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

อาคารอเนกประสงค์ ชั้น 9

1518 ถ.ประชาราษฎร์ 1 แขวงวงศ์สว่าง เขตบางซื่อ กรุงเทพมหานคร 10800

โทร 0 2555 2000 ต่อ 2235, 2237-2241

คำนำ

หนังสือการพยากรณ์ทางธุรกิจ โดย EXCEL เล่มนี้ประกอบด้วยเนื้อหาต่างๆ คือการวิเคราะห์การถดถอย เทคนิคค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ เทคนิคการปรับเรียบแบบเอกซ์โพเนนเชียล เทคนิคการพยากรณ์แบบแยกองค์ประกอบ การวิเคราะห์การถดถอยอนุกรมเวลา อนุกรมเวลา Box-Jenkins

หนังสือเล่มนี้ ให้ผู้ศึกษาสามารถเข้าใจถึงกระบวนการของเทคนิคการพยากรณ์แต่ละแบบค่อนข้างละเอียด ซึ่งทำให้ผู้ศึกษานำเทคนิคที่ศึกษามาประยุกต์ใช้กับโปรแกรมสำเร็จรูปที่มีใช้ทั่วไปนั้นดีแต่โปรแกรมสำเร็จรูปส่วนมากมีราคาค่อนข้างสูง เทคนิคการพยากรณ์ในหนังสือเล่มนี้จะเน้นการหาผลลัพธ์โดย Ms. Excel เป็นการปรับปรุงให้สะดวกขึ้น ซึ่งเชื่อว่าเมื่อผู้อ่านได้ทดลองใช้จะทำให้ผู้อ่านได้ทำงานการพยากรณ์ได้มากขึ้น

หนังสือการพยากรณ์ทางธุรกิจได้นำเสนอการคำนวณค่าพยากรณ์แบบช่วงซึ่งผู้เขียนเน้นในเรื่องนี้เพราะหนังสือส่วนมากจะนำเสนอแต่ค่าพยากรณ์ ค่าพยากรณ์แบบช่วงจะเป็นการลดความผิดพลาดลง หนังสือการพยากรณ์ทางธุรกิจเล่มนี้บางส่วนได้รับการสนับสนุนการพิมพ์โดยโครงการตำราของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือและได้รับทุนผลิตตำราจากคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีงบประมาณ 2559เป็นจุดเริ่มต้นของการพัฒนาการเขียนมาตลอดผลักดันตัวเองให้ใช้ Ms. Excel ในการคำนวณหาตัวแบบจำลองในการพยากรณ์ แต่ค่าต่างๆ ของการพยากรณ์จะใช้สูตรต่างๆ แบบเดิม ผู้เขียนต้องขอขอบพระคุณคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์และมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ มา ณ โอกาสนี้

ผู้เขียนและเรียบเรียงขอน้อมรับหากหนังสือเล่มนี้จะมีการพิมพ์ที่ผิดพลาดบ้าง หากผู้อ่านสามารถจุดประกายการพยากรณ์สำหรับค่าหรือข้อมูลหรือข้อสนเทศต่างๆ ที่เป็นประโยชน์ต่อการตัดสินใจตามงานหรือหน้าที่ของท่านผู้ใช้หนังสือนี้ ผู้เขียนขออุทิศความดีให้แก่พ่อ แม่ ครูอาจารย์ ทุกท่านของผู้เขียน และขอบใจและลูกศิษย์ทุกคนที่มีส่วนกระตุ้นการเขียนหนังสือนี้ขึ้นมา

ผู้เขียนขอขอบพระคุณ พ่อ แม่ และคุณครู ที่ทำให้ผู้เขียนสามารถมีสติปัญญาที่เขียนหนังสือเล่มนี้และขอบใจกำลังใจจากครอบครัวที่ช่วยให้มีพลังในการแต่งหนังสือเล่มนี้

รองศาสตราจารย์ ดร.ฐิตนนท์ จารุโรจน์กีรติ

24 พฤศจิกายน 2566

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1 บทนำ	**1**
1. บทบาทของการพยากรณ์	1
2. ตัวอย่างงานที่สามารถนำเทคนิคการพยากรณ์ไปใช้ให้เกิดประโยชน์	2
3. การจำแนกวิธีการพยากรณ์	4
4. โครงสร้างของระบบการพยากรณ์	13
5. การตรวจสอบความแม่นยำของตัวแบบ	15
6. การควบคุมตัวแบบพยากรณ์	19
7. ปัญหาบางประการของงานพยากรณ์เชิงปริมาณ	20
8. การใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Microsoft Excel เพื่อหาผลลัพธ์	20
บทที่ 2 การวิเคราะห์การถดถอย	**22**
1. ความหมายและตัวแบบการถดถอย	22
2. ตัวแบบการถดถอยที่พบทั่วไป	25
3. ตัวแบบเชิงเส้นและตัวแบบไม่ใช่เชิงเส้น	27
4. วิธีการกำลังสองน้อยที่สุดแบบสามัญ	28
5. วิธีการสภาวะสูงสุด	30
6. คุณสมบัติตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุด	47
7. การทดสอบสมมติฐานและการสร้างช่วงเชื่อมั่นของ β_i แต่ละตัว	53
8. การขาดความพอดีและความคลาดเคลื่อนที่แท้จริง	56
9. การทดสอบสมมติฐานทั่วไปและผลรวมกำลังสองเพิ่มเติม	60
10. ค่าคาดหวังของ Y เมื่อมีค่าตัวแปรอิสระใหม่ x_k	67
11. การพยากรณ์ของ Y เมื่อมีค่าตัวแปรอิสระใหม่ x_k	68
12. เทคนิคการคัดเลือกตัวแบบ	78

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

13. ปัญหาตัวแปรอิสระมีความสัมพันธ์กัน 88
14. การใช้ตัวแปรดรรชนีกับตัวแบบการถดถอย 97
15. ตัวแบบการถดถอยแบบโพลิโนเมียล 104
16. การตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบ 107
แบบฝึกหัด 122

บทที่ 3 เทคนิคค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ **126**

1. ค่าเฉลี่ยอย่างง่ายสำหรับกระบวนการคงที่ 127
2. เทคนิคค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ครั้งเดียว 131
3. เทคนิคค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก 142
4. เทคนิคค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่กึ่งกลาง 146
5. เทคนิคค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่สองครั้ง 150

แบบฝึกหัด 160

บทที่ 4 เทคนิคการปรับเรียบแบบเอกซ์โพเนนเชียล **164**

1. เทคนิคการปรับเรียบเอกซ์โพเนนเชียลครั้งเดียว 165
2. เทคนิคการปรับเรียบเอกซ์โพเนนเชียลสองครั้ง 180
3. เทคนิคการปรับเรียบเอกซ์โพเนนเชียลสองครั้งที่มีสองพารามิเตอร์ 198
4. เทคนิคการปรับเรียบเอกซ์โพเนนเชียลสามครั้ง 207
5. การพยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลาไม่มีแนวโน้มแต่มีอิทธิพลฤดูกาล 220
6. การพยากรณ์อนุกรมเวลามีฤดูกาล Winter แบบคูณ 226
7. การพยากรณ์อนุกรมเวลามีฤดูกาล Winter แบบบวก 237
8. กรณีศึกษาพิเศษ 242

แบบฝึกหัด 247

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 5 เทคนิคการพยากรณ์แบบแยกองค์ประกอบ	**252**
1. ตัวแบบการแยกองค์ประกอบแบบคูณ	255
2. ตัวแบบการแยกองค์ประกอบแบบบวก	303
3. กรณีศึกษาพิเศษ	291
แบบฝึกหัด	307
บทที่ 6 การวิเคราะห์การถดถอยอนุกรมเวลา	**312**
1. ตัวแบบการถดถอยแบบไม่มีแนวโน้ม	312
2. ตัวแบบการถดถอยแบบมีแนวโน้ม	315
3. ตัวแบบแนวโน้มกำลังสอง	321
4. ตัวแบบถดถอยโพลิโนเมียล	328
5. ตัวแบบการถดถอยที่มีแนวโน้มชี้กำลัง	330
6. ตัวแบบการถดถอยชี้กำลังปรับแก้ไข	338
7. ตัวแบบการถดถอยที่มีแนวโน้ม Gompertz	344
8. ตัวแบบแนวโน้ม Logistic	348
9. การวิเคราะห์การถดถอยอนุกรมเวลาที่มีการเปลี่ยนแปลงฤดูกาล	352
แบบฝึกหัด	366
บทที่ 7 อนุกรมเวลา Box-Jenkins	**369**
1. ขั้นตอนในการสร้างตัวแบบพยากรณ์ Box–Jenkins	370
2. ฟังก์ชันอัตตสหสัมพันธ์	371
3. ฟังก์ชันอัตตสหสัมพันธ์บางส่วน	375
4. ตัวแบบทั่วไปของอนุกรมเวลา Box-Jenkins	378
5. การวินิจฉัยตัวแบบ	380

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
6. ตัวแบบกระบวนการถดถอยตัวเอง	381
7. ตัวแบบกระบวนการค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่	408
8. ตัวแบบกระบวนการค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถดถอยตัวเอง	435
9. กระบวนการไม่สมดุลทางสถิติ	443
10. การแก้ปัญหาข้อมูลที่ไม่อยู่ในสภาวะสมดุลทางสถิติ	444
11. การเขียนตัวแบบ ARIMA (p,d,q)	449
12. ตัวแบบ Box-Jenkins แบบมีฤดูกาล	449
13. ฟังก์ชันอัตตสหสัมพันธ์ของตัวแบบฤดูกาล	452
14. ฟังก์ชันอัตตสหสัมพันธ์บางส่วนของตัวแบบฤดูกาล	454
แบบฝึกหัด	460
ภาคผนวก	**466**
บรรณานุกรม	**472**
ข้อมูลผู้เขียน	**473**

บทที่ 1
บทนำ

1. บทบาทของการพยากรณ์

การพยากรณ์ (Forecasting) คืออะไร

การพยากรณ์เป็นกิจกรรมที่เกี่ยวกับการคิดคำนวณหรือการทำนายเหตุการณ์หรือค่าบางอย่างที่เกิดในอนาคต ซึ่งโดยปกติค่าหรือการทำนายเหตุการณ์เหล่านั้นมักเป็นผลของการศึกษาวิเคราะห์ข้อมูลที่มีอยู่จากอดีตที่ผ่านมาทั้งสิ้น การพยากรณ์เป็นกระบวนการมีบทบาทสำคัญมากในการวางแผนและการตัดสินใจ ทั้งนี้เพราะการวางแผนและการตัดสินใจต่างเกี่ยวข้องกับเหตุการณ์ในอนาคต ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจะขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นซึ่งโดยทั่วไปเหตุการณ์เหล่านี้เป็นเหตุการณ์ที่ควบคุมไม่ได้ เพราะฉะนั้นหากสามารถพยากรณ์เหตุการณ์ที่ควบคุมไม่ได้ก่อนการวางแผนหรือก่อนการตัดสินใจแล้ว ก็เป็นการวางแผนหรือการตัดสินใจที่ดีกว่า ด้วยเหตุผลดังกล่าวนี้ ระบบการบริหารในด้านการวางแผนและควบคุมจะรวมงานด้านพยากรณ์เข้าไว้ด้วย ซึ่งงานด้านการพยากรณ์อาจจะอยู่ในลักษณะที่เป็นหน่วยงานหน่วยหนึ่งหรืออาจจะแฝงอยู่ในหน่วยงาน

เนื้อหาการพยากรณ์ในบทเรียนเล่มเป็นการคำนวณหาตัวแบบพยากรณ์ค่าพยากรณ์ในอนาคตในปัจจุบันมีโปรแกรมสำเร็จรูปมากมายที่มีคำสั่งที่ทำกิจกรรมการพยากรณ์แต่เป็นโปรแกรมที่มีราคาแพงถึงแพงมาก จึงทำให้การพยากรณ์เป็นกิจกรรมที่ไม่น่าสนใจนัก สำหรับองค์กรที่มีทุนน้อยการนำค่าข้อมูลในอนาคตมาใช้เพื่อการวางแผนงานก็อาจจะไม่มีความจำเป็นมากมายนัก ในปัจจุบันเรามีการใช้ข้อมูลหลายๆด้านจากข้อมูลขนาดใหญ่หรือ BIG DATA ซึ่งทำได้ทั้งหน่วยหรือองค์กรขนาดเล็ก ขนาดกลางหรือขนาดใหญ่ การใช้โปรแกรมเพื่อการจัดการข้อมูลก็มีโปรแกรมที่ใช้ได้ฟรีกับเสียเงินบ้าง ผู้เขียนมีแรงบรรดาลใจที่จะใช้โปรแกรมที่เชื่อว่าทุกหน่วยงานมีใช้และสามารถจัดหาได้ซึ่งได้แก่ โปรแกรมสำเร็จรูป Microsoft Excel สำหรับตอบโจทย์หรือการหาผลลัพธ์ ในเรื่องการพยากรณ์ซึ่งผู้เขียนได้รวบรวมวิธีการพยากรณ์โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Excel มาใช้งานในการหาผลลัพธ์ซึ่งเมื่อผู้ใช้ได้ทำความเข้าใจในบทเรียนและ

การใช้ Excel ก็จะสามารถทำงานด้านการพยากรณ์ได้และเป็นประโยชน์ ซึ่งท้ายบทนี้จะแนะนำคำสั่ง ฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องและจำเป็นในการหาผลลัพธ์ เช่น เมนู Data คำสั่ง Data Analysis คำสั่ง Solvers หรือฟังก์ชัน SUMIF,COUNTIF,SUMXMY2,SUMSQ,VLOOKUP เป็นต้น

2. ตัวอย่างงานที่สามารถนำเทคนิคการพยากรณ์ไปใช้ให้เกิดประโยชน์

ในหัวข้อนี้จะนำตัวอย่างที่เราสามารถนำเอาเรื่องเทคนิคการพยากรณ์ไปใช้ได้อย่างเกิดประโยชน์

1. การจัดการสินค้าคงเหลือ (Inventory Management) หน่วยงานของเรามีการจำหน่ายสินค้า เราควรจะพยากรณ์ความต้องการสินค้าในช่วงระยะเวลาที่เราต้องการทราบหรือตามที่หน่วยงานขั้นสูงกว่ากำหนดเมื่อเราคาดการณ์ว่าความต้องการเราสามารถจะสต๊อกสินค้าได้ในจำนวนตอบสนองความต้องการโดยเสียค่าใช้จ่ายในการสต๊อกสินค้าน้อยที่สุดหรือเพื่อจักได้สั่งซื้อสินค้าเข้าสต็อกด้วยจำนวนที่เหมาะสม เพราะการคำนวนหาจำนวนสั่งซื้อสินค้าหรือการผลิตสินค้าที่เหมาะสม ต้องมีสูตรที่เกี่ยวข้องกับความต้องการ

เช่น $$Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{h}}$$

เมื่อ Q^* เป็นปริมาณการสั่งซื้อที่เหมาะสม

D เป็นอุปสงค์หรือความต้องการสินค้า

K เป็นค่าใช้จ่ายเริ่มต้นที่ไม่เกี่ยวข้องกับปริมาณสินค้า

h เป็นค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษา

2. การวางแผนการผลิต (Production Planning) เมื่อเราพยากรณ์ยอดขายสินค้าแต่ละชนิดในช่วงเวลาข้างหน้าฝ่ายบริหารก้จะนำค่าพยากรณ์นี้วางแผนการผลิตและการจัดทำตารางการผลิตของทั้งระบบได้อย่างมีประสิทธิภาพ

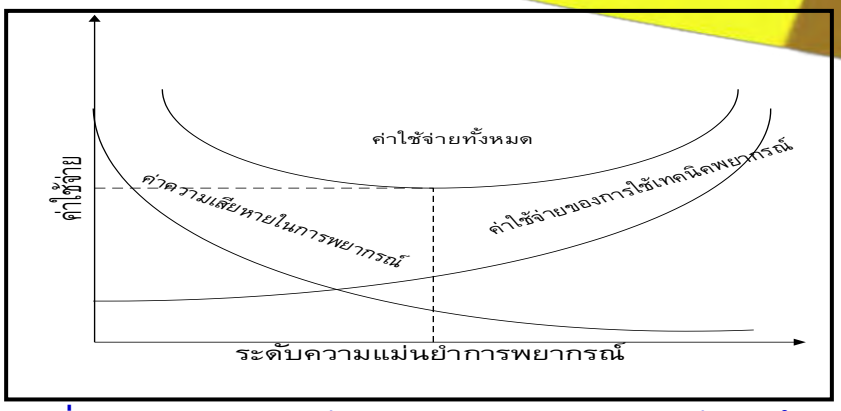
3. การวางแผนด้านการเงิน (Financial Planning) เรื่องอัตราดอกเบี้ยซึ่งสามารถคาดเดารายได้หรือพยากรณ์รายได้ประชาชาติและต่อเนื่องกับการการวางแผนด้านการเงิน เจ้าหน้าที่ด้านการเงินต้องพยากรณ์ถึงรายรับ/รายจ่าย เพื่อการทำ Cash Flow ขององค์กรและ/หรือเพื่อการจัดทำแผนงานโครงการงบประมาณได้อย่างมีประสิทธิผลและประสิทธิภาพ

4. การจัดกำลังคน (Staff Scheduling) การพยากรณ์จำนวนคนสำหรับงานหรือโครงการใหม่ การจัดการเกี่ยวกับการอบรมการเตรียมตัวกับงานใหม่หรือสอนงานกับบุคลากรใหม่ การพัฒนาบุคลากร เป็นเรื่องที่เจ้าหน้าที่บุคคลต้องจัดทำแผนการต่าง หรือเจ้าหน้าที่บุคคลต้องทำการพยากรณ์ อุปทานของแรงงานที่แตกต่างกันในแต่ละหน้าที่ที่ต้องการใช้ จำนวนแรงงานที่รับแล้วไม่

มาทำงานรวมทั้งอัตราการลาออกของแรงงานโดยหลักแล้วการวางแผนกำลังคนก็เพื่อการจัดเตรียมกำลังคนและอุปกรณ์ให้เหมาะสมกับจำนวนชนิดและปริมาณงาน

5. ปัญหาทางด้านเศรษฐศาสตร์การพยากรณ์ผลิตภัณฑ์มวลรวมประชาชาติการคาดการณ์ภาวะความเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ พยากรณ์ภาวะเงินเฟ้อ ฯลฯ พยากรณ์ผลกระทบต่าง ๆ ที่จะเกิดขึ้นถ้าหากรัฐบาลกำหนดนโยบายทางภาษีหรือนโยบายประกันราคาสินค้าหรือนโยบายจำนำสินค้า เป็นต้น

นอกจากตัวอย่างข้างต้นแล้วยังมีกรณีอื่น ๆ อีกมากที่สามารถนำเทคนิคการพยากรณ์ไปใช้ให้เกิดประโยชน์จากตัวอย่างที่กล่าวและกรณีอื่น ๆ ที่เราพอจะนึกได้ว่าจะใช้เทคนิคพยากรณ์ได้พบว่า การพยากรณ์เป็นการทำนายหรือคาดการณ์เหตุการณ์ในอนาคต แต่เนื่องจากเหตุการณ์ในอนาคตเป็นเรื่องที่ไม่แน่นอน ฉะนั้นการพยากรณ์โดยทั่วไปย่อมจะมีความคลาดเคลื่อน และดังนั้นวัตถุประสงค์ของการพยากรณ์ คือ ลดความคลาดเคลื่อนให้น้อยลงซึ่งจะลดลงได้มากน้อยเพียงใดนั้น โดยทั่วไปแล้วจะขึ้นอยู่กับระบบหรือเทคนิคพยากรณ์ที่เลือกใช้ ถ้าหากเพิ่มทรัพยากรให้แก่งานพยากรณ์มากขึ้น เราควรที่จะสามารถลดความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ลงได้ ซึ่งนั่นคือสามารถลดความเสี่ยงหรือความสูญเสียจากการตัดสินใจลงได้ แนวความคิดนี้แสดงให้เห็นเป็น กราฟได้ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 1 แสดงความสัมพันธ์ระดับความแม่นยำการพยากรณ์และค่าใช้จ่าย

จากรูปที่ 1 พบว่า เมื่อให้ความพยายามหรือทรัพยากรถึงจุด ๆ หนึ่งแล้ว การเพิ่มทรัพยากรให้มากขึ้นไปอีกเรื่อย ๆ จะไม่สามารถทำให้ระบบโดยส่วนรวมดีขึ้น หรือไม่สามารถลดค่าใช้จ่ายรวมลงได้ ทั้งนี้เพราะเป็นไปไม่ได้ที่จะลดความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ให้ต่ำกว่าระดับหนึ่งไม่ว่าจะใช้เทคนิคการพยากรณ์ที่ซับซ้อนมากเพียงใดก็ตาม เพราะฉะนั้น เมื่อไม่สามารถขจัดความเสี่ยงให้หมดไปโดยสิ้นเชิงได้ ในการใช้ค่าพยากรณ์ประกอบการตัดสินใจจึงควรมีการตัดสินใจเผื่อความคลาดเคลื่อนไว้ด้วย

การตัดสินใจ = การตัดสินภายใต้ข้อสมมติว่าการพยากรณ์ถูกต้อง +
ค่าใช้จ่ายเมื่อเกิดการพยากรณ์ผิดพลาด

ฉะนั้นในระบบของการพยากรณ์นอกจากจะระบุค่าพยากรณ์แล้วควรระบุความคลาดเคลื่อน ประกอบไว้ด้วย

3. การจำแนกวิธีการพยากรณ์

จำแนกวิธีการพยากรณ์ได้เป็นสองกลุ่มใหญ่ ๆ คือ

1. วิธีพยากรณ์เชิงคุณภาพ
2. วิธีพยากรณ์เชิงปริมาณ

วิธีพยากรณ์เชิงคุณภาพ เป็นวิธีการที่ใช้ความรู้สึก ความเชื่อ หรือความคิดเห็น ของผู้รู้หรือผู้เชี่ยวชาญในเรื่องที่จะพยากรณ์ ซึ่งอาจจะขึ้นหรือไม่ ขึ้นอยู่กับข้อมูลที่ผ่านมา โดยทั่วไปวิธีการพยากรณ์แบบนี้จะไม่มีหลักเกณฑ์ที่จะให้ผู้อื่นทำตามอย่างไรก็ตามถึงแม้วิธีนี้ดูจะไม่มีหลักการที่แน่ชัดทางวิชาการแต่ก็เป็นวิธีที่เหมาะสมเมื่อรูปแบบการเปลี่ยนแปลงข้อมูลไม่คงที่ซึ่งไม่อาจจะสมมติได้ว่าจะมีรูปแบบนี้ในอนาคต หรือเมื่อไม่มีข้อมูลในอดีต หรือเป็นการพยากรณ์ที่เกี่ยวกับเหตุการณ์ผิดปกติที่ไม่น่าจะเกิดขึ้น และก็มีบ่อยครั้งในทางปฏิบัติที่ใช้วิธีเชิงคุณภาพผสมกับวิธีเชิงปริมาณโดยเฉพาะถ้ามีความไม่แน่นอนสูงในวิธีเชิงปริมาณที่ใช้

วิธีการพยากรณ์เชิงปริมาณ เป็นวิธีการสร้างสูตรหรือตัวแบบพยากรณ์ด้วยวิธีการทางสถิติและคณิตศาสตร์ ซึ่งจะทำได้เมื่อมีข้อมูลในอดีตอยู่ในรูปของตัวเลขหรือสามารถแปลงเป็นตัวเลขได้และสมมติได้ว่ารูปแบบการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลที่ผ่านมาจะมีแนวโน้มเป็นเช่นนั้นด้วยในอนาคต

วิธีการเชิงปริมาณหรือตัวแบบเชิงปริมาณ สามารถจำแนกออกเป็น

1. ตัวแบบภายใต้ภาวะคงที่ หรือที่เรียกว่าตัวแบบดีเทอร์มินิสติค (Deterministic Models) โดยทั่วไปจะพบในเรื่องของวิทยาศาสตร์กายภาพ (Physical Science) ซึ่งจะขอไม่กล่าวถึงในที่นี้

2. ตัวแบบภายใต้ภาวะไม่คงที่ หรือที่เรียกว่าตัวแบบความน่าจะเป็น (Probabilistic Models) หรือตัวแบบสโตแคสติค (Stochastic Models) ในสภาพความเป็นจริงโดยทั่วไปภาวะหรือความสัมพันธ์ต่าง ๆ มีลักษณะไม่แน่นอนเพราะฉะนั้นตัวแบบจำลองที่สร้างขึ้นความสัมพันธ์

เหล่านี้ย่อมจะมีความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์เกิดขึ้นได้โดยผิดเพี้ยนจากความเป็นจริงหรือค่าจริงที่เราสนใจ ซึ่งความคลาดเคลื่อนที่มีความไม่แน่นอนนี้เรียกว่าความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงของความน่าจะเป็น จึงเรียกตัวแบบที่สร้างขึ้นว่าตัวแบบความน่าจะเป็น ตัวแบบพยากรณ์โดยทั่วไปจะเป็นตัวแบบความน่าจะเป็น ซึ่งมีมากมายหลายตัวแบบด้วยกัน ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะตัวแบบหรือวิธีการที่ใช้กันทั่ว ๆ ไปดังต่อไปนี้

1. วิธีการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่าง ๆ

วิธีนี้เป็นการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่ต้องการพยากรณ์หรือประมาณค่ากับตัวแปรอีกชุดหนึ่งที่มีอิทธิพลต่อค่าของตัวแปรที่จะพยากรณ์ได้ออกมาเป็นสมการหรือตัวแบบพยากรณ์ ตัวแบบที่นิยมใช้กันคือ ตัวแบบการถดถอย (Regression Models) และตัวแบบเศรษฐมิติ (Econometric Models) ซึ่งตัวแบบทั้งสองประเภทนี้ ใช้ได้ดีในการพยากรณ์ทั้งในคาบระยะเวลา (Forecasting Horizon) สั้น (ไม่เกิน 1 ปี) และยาว

ตัวแบบการถดถอย (Regression Models)

ตัวแบบการถดถอย เป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร Y ซึ่งมักเรียกกันว่าตัวแปรตาม (Dependent Variables) หรือตัวแปรผล เป็นตัวแปรที่ต้องการพยากรณ์ค่า กับตัวแปรอีกชุดหนึ่ง $X_{t1}, X_{t2}, X_{t3}, ..., X_{tp}$ ซึ่งมักเรียกกันว่า ตัวแปรอิสระ (Independent Variables) หรือตัวแปรสาเหตุเป็นตัวแปรที่มีผลกระทบต่อค่าของ Y เขียนเป็นสมการทั่วไปได้ดังนี้

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + ... + \beta_p X_{tp} + \varepsilon_t \qquad \text{---------(1)}$$

ตัวแบบการถดถอย (1) เป็นตัวแบบความน่าจะเป็นเพราะ ε_t เป็นเทอมค่าผิดพลาดหรือความคลาดเคลื่อนที่เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งมีข้อสมมติดังนี้

1. ε_t มีค่าเฉลี่ย = 0 หรือ $E(\varepsilon_t) = 0; \forall t$
2. ε_t มีความแปรปรวน σ^2 เป็นค่าคงที่ $V(\varepsilon_t) = \sigma^2; \forall t$
3. ε_i และ ε_j ไม่มีสหสัมพันธ์กัน นั่นคือ $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0; \forall i \neq j$ และ
4. ค่าผิดพลาด ε_t ต่างมีการแจกแจงแบบปกติ

ฉะนั้นจากข้อสมมติข้อที่ 3 ได้ด้วยว่า ค่าผิดพลาดเหล่านี้เป็นอิสระกัน เราจำแนกตัวแบบการถดถอยออกเป็นตัวแบบการถดถอยเชิงเส้น (Linear Regression Models) และตัวแบบการถดถอยไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Regression Models) ในเทอมของพารามิเตอร์

ตัวอย่างตัวแบบการถดถอยเชิงเส้น

1 $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$ เรียกว่าตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

2 $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_t^2 + \varepsilon_t$ เรียกว่าตัวแบบการถดถอยกำลังสอง

3 $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \varepsilon_t$ เรียกว่าตัวแบบเชิงเส้นประกอบด้วยตัวแปรอิสระสองตัว

4 $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \ldots\ldots \beta_p X_{tp} + \varepsilon_t$ เรียกว่าตัวแบบถดถอยเชิงเส้นพหุ

5 $Y_t = \beta_0 e^{-\beta_1 X_t} + \varepsilon_t$ เรียกว่าตัวแบบการถดถอยไม่เป็นเชิงเส้น

ตัวแบบเศรษฐมิติ (Econometric Models)

เศรษฐศาสตร์การพิจารณาความสัมพันธ์ตัวแบบเศรษฐมิติซึ่งอาจเป็นตัวแบบถดถอยอย่างง่ายหรือตัวแบบถดถอยแบบพหุคูณก็ได้ แต่ตัวแบบนั้นตัวแปรต่าง ๆ ต้องมีความสัมพันธ์กันตามทฤษฎีเศรษฐศาตร์หรือการศึกษาที่ผ่านมาเช่นตัวแบบเศรษฐมิติ ที่เกี่ยวกับการจำหน่ายสินค้า

$$Sales = f(GNP, \text{Price}, Advertizing) \quad \text{---------(2)}$$

จำนวนสินค้าที่ขายได้มีความสัมพันธ์กับผลิตภัณฑ์มวลรวมประชาชาติ 1 ปี,ราคาสินค้าและรายจ่ายในการโฆษณา ราคาสินค้าและรายจ่ายในการโฆษณาเป็นสิ่งที่จูงใจโดยตรงต่อการจำหน่ายสินค้าแต่ผลิตภัณฑ์มวลรวมประชาชาติ 1 ปีอาจไม่ใช่สิ่งที่จูงใจโดยตรงนัก

$$production\ \text{cost} = f(number\ of\ unit\ produced, inventories, labor\ \text{cost}, materiial\ \text{cost}) \quad \text{---------(3)}$$

ค่าใช้จ่ายในการผลิตมีความสัมพันธ์กับจำนวนสินค้าที่ผลิต,ขนาดสินค้าคงคลัง,ค่าแรงงานและค่าวัสดุ

$$selling\ \text{expenses} = f(\text{advertising}, other\ selling\ \text{expense}) \quad \text{---------(4)}$$

ค่าใช้จ่ายในการซื้อสินค้ามีความสัมพันธ์กับรายจ่ายในการโฆษณา,รายจ่ายในการบริโภคสินค้าอื่น

$$\text{advertising} = f(sales) \quad \text{---------(5)}$$

รายจ่ายในการโฆษณามีความสัมพันธ์กับจำนวนสินค้าที่ขายได้

$$price = f(production\ \text{cost}, selling\ \text{expenses}, \text{administrative overhead}, profit) \quad \text{---------(6)}$$

ราคาสินค้ามีความสัมพันธ์กับรายจ่ายในผลผลิต,ค่าใช้จ่ายในการซื้อสินค้า,ค่าบริหารงานและกำไร

จากสมการหรือฟังก์ชันที่ 2 ถึง 6 ที่กล่าวมาทั้งหมดต่างมีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกันเสมอ

และตัวอย่างต่อไปนี้เป็นเรื่อการเงินการธนาคาร ปริมาณเงินฝากของธนาคารจะสัมพันธ์กับปริมาณเงินหมุนเวียนภายในประเทศ จำนวนสาขาของธนาคาร และอัตราดอกเบี้ยเงินฝาก แต่จากการศึกษาพบด้วยว่าระดับอัตราของดอกเบี้ยเงินฝากในปัจจุบันเป็นผลมาจากปริมาณเงินลงทุนจากต่างประเทศ อัตราเงินดอกเบี้ยเงินกู้ในประเทศ หรือแม้กระทั่งปริมาณเงินฝากของธนาคารช่วงเวลาก่อนเวลาปัจจุบัน เป็นต้น ดังนั้นถ้าจะเขียนรูปแบบความสัมพันธ์ดังกล่าวจะได้ว่า

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \beta_3 X_{t3} + \varepsilon_t \qquad \text{---------(7)}$$

และ

$$X_{t3} = \alpha_0 + \alpha_1 I_t + \alpha_2 X_{t4} + \alpha_3 X_{t-1,2} + u_t \qquad \text{---------(8)}$$

เมื่อ Y_t เป็นปริมาณเงินฝากของธนาคาร ณ เวลา t

X_{t1} เป็นจำนวนสาขาของธนาคาร ณ เวลา t

X_{t2} เป็นปริมาณเงินหมุนเวียนในประเทศ ณ เวลา t

X_{t3} เป็นอัตราดอกเบี้ยเงินฝากเฉลี่ย ณ เวลา t

X_{t4} เป็นอัตราดอกเบี้ยเงินกู้เฉลี่ย ณ เวลา t

I_t เป็นปริมาณเงินลงทุนจากต่างประเทศ ณ เวลา t

$X_{t-1,2}$ เป็นปริมาณเงินหมุนเวียนในประเทศ ณ เวลา $t-1$

u_t, e_t เป็นความคลาดเคลื่อน ณ เวลา t

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ เป็นสัมประสิทธิ์การถดถอยหรือพารามิเตอร์ที่ต้องประมาณค่าขึ้นมาและการประมาณค่าพารามิเตอร์ยังคงใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดเป็นส่วนใหญ่ และ รูปแบบหรือตัวแบบความสัมพันธ์ทั้งสองรวมกันเรียกว่าความสัมพันธ์เชิงเศรษฐมิติ หรือตัวแบบเศรษฐมิติ (Econometric Models)

2. วิธีการวิเคราะห์ข้อมูลอนุกรมเวลา (Time Series analysis)

2.1 วิธีการหาค่าเฉลี่ย (Average Methods)

วิธีการดังกล่าวมี 2 ลักษณะ คือ วิธีการหาค่าเฉลี่ยแบบธรรมดา (Simple Average Method) และวิธีการหาค่าเฉลี่ยแบบเคลื่อนที่ (Moving Average Method)

2.1.1 วิธีการหาค่าเฉลี่ยแบบธรรมดา (Simple Average Method)

เป็นวิธีการหาค่าเฉลี่ยจากข้อมูลในอดีตที่มีจนถึงปัจจุบัน แล้วนำค่าเฉลี่ยนั้นไปหาเป็นค่าพยากรณ์ของช่วงเวลาในอนาคต เช่นเดียวกันวิธีนี้เหมาะสมสำหรับข้อมูลที่มีลักษณะการเคลื่อนไหวอยู่ในระดับคงที่ (Horizontal Data) และเหมาะสำหรับการพยากรณ์ในระยะสั้น (Short Term)

2.1.2 วิธีการหาค่าเฉลี่ยแบบเคลื่อนที่ (Moving Average Methods)

วิธีดังกล่าวนี้ที่นิยมใช้มีอยู่ 3 แบบ คือ วิธีการหาค่าเฉลี่ยแบบเคลื่อนที่อย่างง่าย (Simple Moving Average Method) วิธีการหาค่าเฉลี่ยแบบเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก (Weight Moving Average Method) และวิธีการหาค่าเฉลี่ยแบบเคลื่อนที่สองครั้ง (Double Moving Average Method)

1. วิธีการหาค่าเฉลี่ยแบบเคลื่อนที่อย่างง่าย (Simple Moving Average Method)

เป็นวิธีการพยากรณ์ที่มีหลักการคล้ายคลึงกับวิธีการหาค่าเฉลี่ยแบบธรรมดา แตกต่างที่ว่าวิธีนี้การหาค่าเฉลี่ยนั้นเมื่อข้อมูล ณ ช่วงเวลาล่าสุดถูกนำเข้ามาคำนวณ ข้อมูลช่วงเวลาห่างไกลที่สุดจะถูกตัดออกจากการคำนวณเพื่อให้จำนวนเทอมที่จะเฉลี่ยคงที่ทุกครั้งของการคำนวณ ดังนั้นวิธีนี้จำเป็นต้องกำหนดจำนวนเทอมของการเฉลี่ยซึ่งจะไม่เหมือนกับวิธีหาค่าเฉลี่ยแบบธรรมดา วิธีนี้เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีลักษณะการเคลื่อนไหวอยู่ในระดับคงที่ (Horizontal Data) และเหมาะกับการพยากรณ์ระยะสั้น (Short Term) จำนวนข้อมูลที่จำเป็นต้องใช้สำหรับการพยากรณ์ คือ 2 ถึง 5 ค่า สำหรับจำนวนเทอมของการเฉลี่ยนั้น ถ้าข้อมูลเคลื่อนไหวมากควรใช้จำนวนเทอมมาก และในทางกลับกัน ถ้าข้อมูลค่อนข้างเรียบ จำนวนเทอมจะน้อยตามลำดับ

2. วิธีการหาค่าเฉลี่ยแบบเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก (Weight Moving Average Method) วิธีการนี้การคำนวณคล้ายกับวิธีการหาค่าเฉลี่ยแบบเคลื่อนที่อย่างง่ายแต่น้ำหนักที่กำหนดให้กับข้อมูลมันจะแตกต่างกัน โดยการให้น้ำหนักกับข้อมูลนั้นคำนึงถึงค่าความผิดพลาดให้มีค่าน้อยที่สุด สำหรับจำนวนเทอมของค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่นั้นเป็นแบบเดียวกับวิธีการหาค่าเฉลี่ยแบบเคลื่อนที่อย่างง่าย

3. วิธีการหาค่าเฉลี่ยแบบเคลื่อนที่สองครั้ง (Double Moving Average Method)

วิธีการนี้เป็นการหาค่าเฉลี่ยแบบเคลื่อนที่อย่างง่ายซ้ำ 2 ครั้ง ครั้งแรกหาค่าเฉลี่ยจากข้อมูลที่มี และครั้งที่สองเป็นการหาค่าเฉลี่ยจากข้อมูลค่าเฉลี่ยที่ผ่านการคำนวณในครั้งแรก โดยมีเงื่อนไขว่าจำนวนเทอมของการหาค่าเฉลี่ยทั้งสองครั้งต้องกำหนดให้เท่ากัน ตามหลักการ

ของวิธีการหาค่าเฉลี่ยแบบเคลื่อนที่อย่างง่าย วิธีนี้เหมาะสมสำหรับข้อมูลที่มีการเคลื่อนไหวแบบแนวโน้มเชิงเส้นตรง (Linear Trend Data) และเหมาะสำหรับการพยากรณ์ในระยะสั้น

2.2 วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กโปเนนเชียล (Exponential Smoothing Technique)

การพยากรณ์ด้วยวิธีนี้เป็นการหาค่าเฉลี่ยเช่นเดียวกับวิธีการหาค่าเฉลี่ย ทั้งแบบธรรมดาและแบบเคลื่อนที่ ต่างกันที่ว่าการหาค่าเฉลี่ยของทั้งสองวิธีแรกนั้นความสำคัญของข้อมูลที่ใช้สำหรับการเฉลี่ยมีค่าเท่าเทียมกัน (น้ำหนักของข้อมูลแต่ละรายการเท่ากันคือเท่ากับ 1/N เมื่อ N มีค่าเท่ากับ n สำหรับกรณีการหาค่าเฉลี่ยแบบธรรมดา และ N เป็นจำนวนเทอมที่จะเฉลี่ยสำหรับกรณีการหาค่าเฉลี่ยแบบเคลื่อนที่) สำหรับวิธีนี้ความสำคัญของข้อมูลล่าสุดจะมากที่สุด และความสำคัญจะลดลงเรื่อยๆ สำหรับข้อมูลที่ระยะเวลาห่างไกลออกไป หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าเป็นการหาค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนัก (Weighted Average) และน้ำหนัก (Weight) ที่ใช้ถ่วงคือ α เรียกว่า อัลฟา หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า สัมประสิทธิ์ปรับให้เรียบ (Smoothing Coefficient) วิธีการปรับให้เรียบแบบเอ็กโปเนนเชียลที่นิยมใช้ในทางธุรกิจ แบ่งออกเป็น 3 กลุ่ม ขึ้นอยู่กับว่าลักษณะของข้อมูลจะมีการเคลื่อนไหวอย่างไร คือ การปรับให้เรียบแบบเอ็กโปเนนเชียลครั้งเดียว (Single Exponential Smoothing) การปรับให้เรียบแบบเอ็กโปเนนเชียลสองครั้ง (Double Exponential Smoothing) และการปรับให้เรียบแบบเอ็กโปเนนเชียลสามครั้ง (Triple Exponential Smoothing)

2.2.1 วิธีการพยากรณ์ปรับให้เรียบแบบเอ็กโปเนนเชียลครั้งเดียว (Single Exponential Smoothing)

วิธีดังกล่าวเป็นการหาค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนัก ด้วยน้ำหนัก α ที่ให้ความสำคัญของข้อมูลเวลาล่าสุดมากที่สุด และข้อมูลเวลาห่างออกไปลดหลั่นในลักษณะแบบเอ็กโปเนนเชียล วิธีนี้เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีลักษณะการเคลื่อนไหวอยู่ในระดับคงที่ (Horizontal Data) และเหมาะสมสำหรับการพยากรณ์ในระยะสั้น

2.2.2 วิธีการพยากรณ์ปรับให้เรียบแบบเอ็กโปเนนเชียลสองครั้ง (Double Exponential Smoothing)

วิธีการพยากรณ์นี้เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า วิธีการพยากรณ์ของบราวน์ (Brown's Method) เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีการเคลื่อนไหวแบบแนวโน้มเชิงเส้นตรง (Linear Trend Data) และไม่มีการเคลื่อนไหวแบบฤดูกาล (Seasonal Data) เหมาะสมกับการพยากรณ์ในระยะสั้น

จนถึงการพยากรณ์ในระยะปานกลาง (Short Term to Medium Term) สำหรับจำนวนข้อมูลที่จะใช้สำหรับการพยากรณ์ควรอยู่ระหว่าง 5 ถึง 10 รายการ

2.2.3 วิธีการพยากรณ์ปรับให้เรียบแบบเอ็กโปเนนเชียลสามครั้ง (Triple Exponential Smoothing)

เป็นวิธีการพยากรณ์ที่เหมาะกับข้อมูลที่มีการเคลื่อนไหวแบบแนวโน้มเชิงเส้นโค้ง เทคนิคนี้เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีการเคลื่อนไหวแบบแนวโน้มเชิงกำลังสอง (Quadratic Data) เหมาะสมกับการพยากรณ์ในระยะสั้น จนถึงการพยากรณ์ในระยะปานกลาง (Short Term to Medium Term)

2.2.4 วิธีการพยากรณ์ปรับให้เรียบแบบเอ็กโปเนนเชียลแบบ Winter

เป็นเทคนิคที่เหมาะกับข้อมูที่มีการเปลี่ยนแปลงทั้งแนวโน้มและฤดูกาลวิธีการพยากรณ์ปรับให้เรียบแบบเอ็กโปเนนเชียลแบบ Winter ประกอบด้วยเทคนิคย่อยอีก 2 เทคนิค คือ วิธีการพยากรณ์ปรับให้เรียบแบบเอ็กโปเนนเชียลแบบ Winter แบบคูณและวิธีการพยากรณ์ปรับให้เรียบแบบเอ็กโปเนนเชียลแบบ Winter แบบบวก

2.3 เทคนิคการพยากรณ์แบบแยกองค์ประกอบ (Decomposition Method)

เทคนิคการพยากรณ์การแยกองค์ประกอบจะแบ่งตัวแบบออกเป็น องค์ประกอบต่าง ๆ ไม่เกิน 4 องค์ประกอบ คือ องค์ประกอบแนวโน้ม (Trend Component) องค์ประกอบฤดูกาล (Seasonal Component) องค์ประกอบวัฏจักร (Cyclical Component) และองค์ประกอบที่ผิดปรกติ (Irregular Component หรือ Error) ในข้อมูลอนุกรมเวลาทั่วไปอาจจะมีเพียง 3 องค์ประกอบ คือ องค์ประกอบแนวโน้ม องค์ประกอบฤดูกาล และองค์ประกอบที่ผิดปรกติ (Irregular Component หรือ Error) เทคนิคการพยากรณ์การแยกองค์ประกอบแบ่งเป็น 2 วิธี

2.3.1 ตัวแบบการแยกองค์ประกอบแบบคูณ (Multiplicative Decomposition Model) เป็นดังนี้

$$Z_t = T_t \times S_t \times C_t \times E_t$$

โดยที่ Z_t แทนข้อมูลอนุกรมเวลา ณ คาบเวลา t

T_t แทนองค์ประกอบแนวโน้ม ณ คาบเวลา t

S_t แทนองค์ประกอบฤดูกาล ณ คาบเวลา t

C_t แทนองค์ประกอบวัฏจักร ณ คาบเวลา t

E_t แทนองค์ประกอบที่ผิดปรกติ ณ คาบเวลา t

2.3.2 ตัวแบบการแยกองค์ประกอบแบบบวก (Additive Decomposition Model) เป็นดังนี้

$$Z_t = T_t + S_t + C_t + E_t$$

ตัวแบบการแยกองค์ประกอบทั้ง 2 ตัวแบบมีการคิดคำนวณที่ ยากง่ายพอ ๆ กัน แล้วแต่ความถนัดของผู้ใช้แต่ละท่าน

2.4 วิธี Box-Jenkins หรือ ARIMA

วิธีการที่นิยมใช้กันมากวิธีหนึ่งคือวิธี Box-Jenkins หรือวิธีสร้างตัวแบบ Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) วิธีนี้เหมาะสมในการพยากรณ์ระยะสั้น

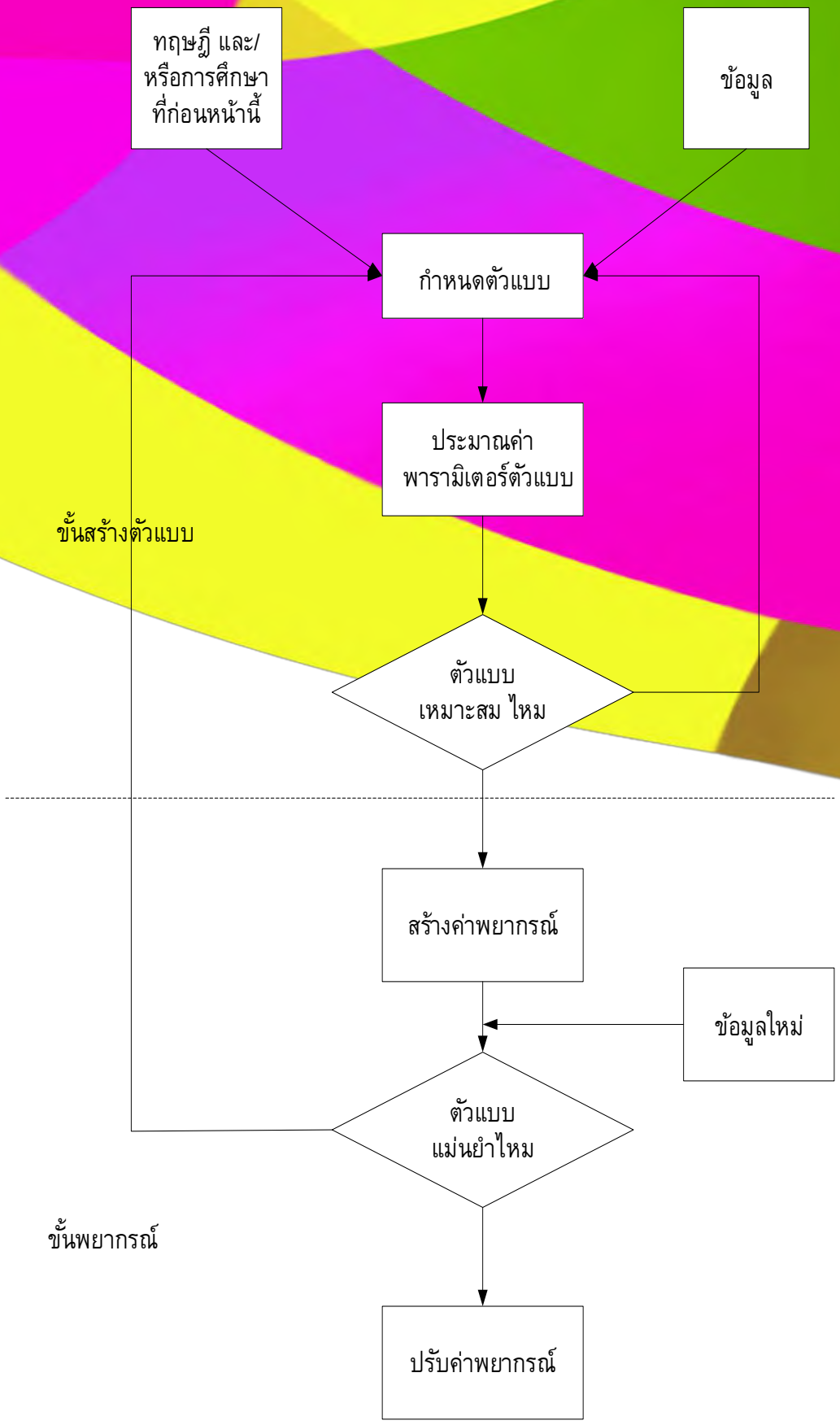
ARIMA (1,0,0) หรือ AR(1), ARIMA (2,0,0) หรือ AR(2), ARIMA (0,0,1) หรือ MA(1), ARIMA (0,0,2) หรือ MA(2), ARIMA (1,0,1) หรือ ARMA(1,1)

ในการสร้างตัวแบบ ARIMA จำเป็นต้องทราบลักษณะการเปลี่ยนแปลงของค่าฟังก์ชันอัตตสหสัมพันธ์ (Autocorrelation Function (ACF)) และค่าฟังก์ชันอัตตสหสัมพันธ์บางส่วน (Partial Autocorrelation Function (PACF)) ของความคลาดเคลื่อนสุ่มในทางทฤษฎี เพื่อใช้ในการเลือกตัวแบบ โดยวิธีเปรียบเทียบลักษณะของค่า ACF และ PACF ที่ได้จากข้อมูลกับค่าทางทฤษฎี ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของค่า ACF และ PACF ทางทฤษฎีของตัวแบบ AR, MA และ ARMA ในภาวะคงที่สรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ตัวแบบ	ACF	PACF
AR(p)	ค่าจะลดลงเป็นแนวโค้งหรือเป็นคลื่นที่ค่อยๆ หายไป	ค่าจะเป็นศูนย์หลังจาก lag p
MA(q)	ค่าจะเป็นศูนย์หลังจาก lag q	ค่าจะลดลงเป็นแนวโค้งหรือเป็นคลื่นที่ค่อยๆ หายไป
ARMA(p,q)	ค่าจะลดลงเป็นแนวโค้ง	ค่าจะลดลงเป็นแนวโค้ง

การพยากรณ์ยังมีอีกหลายวิธีได้กล่าวไว้ในเล่มแล้วผู้ศึกษาสามารถพิจารณาดูได้ว่าเหมาะสมกับข้อมูลอย่างไรบ้าง

4. โครงสร้างของระบบการพยากรณ์



เมื่อต้องการพยากรณ์ในสิ่งที่เราสนใจ เราควรจะศึกษาขั้นตอนการศึกษาการพยากรณ์ ซึ่งอธิบายได้จากผังงานดังต่อไปนี้

1. ทฤษฎี และ/หรือ การศึกษาที่ก่อนหน้านี้ เราต้องมีการศึกษาว่าในสิ่งที่เราสนใจพยากรณ์มีทฤษฎีรองรับหรือไม่ หรือเคยมีการศึกษาเรื่องนี้มาแล้วหรือไม่เพื่อเป็นแนวทางในการอ้างอิง การพยากรณ์ที่ผ่านมาเป็นการเทคนิคการวิเคราะห์การถดถอยหรือเศรษฐมิติหรือการวิเคราะห์อนุกรมเวลา
2. ข้อมูลการพยากรณ์คราวนี้มีข้อมูลเท่าไร อะไรบ้างเช่นหากต้องการใช้เทคนิคที่เป็นการพยากรณ์โดยอาศัยข้อมูลที่เป็นอนุกรมเวลาต้องใช้ปริมาณข้อมูลมากพอสมควร หรือหากเป็นวิเคราะห์การถดถอยหรือเศรษฐมิติต้องมีข้อมูลที่เป็นตัวแปรอิสระตามทฤษฎีหรือตามที่เคยศึกษามาแล้ว
3. กำหนดตัวแบบ เมื่อมีข้อมูลและทราบทฤษฎี และ/หรือการศึกษาที่ก่อนหน้านี้นำสถานการณ์ทั้งสองส่วนมากำหนดตัวแบบว่าเป็นตัวแบบอะไรเป็นวิเคราะห์การถดถอยหรือเศรษฐมิติหรือการวิเคราะห์อนุกรมเวลา
4. ประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบ เมื่อกำหนดได้แล้วว่าตัวแบบเป็นอะไร อย่างไรแล้วจึงนำข้อมูลที่ได้มาประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบ
5. ตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบ จากข้อมูลและการกำหนดรูปแบบของตัวแบบผู้พยากรณ์จะต้องมีการตรวจสอบว่าตัวแบบที่กำหนดนั้นและใช้ข้อมูลที่นำมาสร้างตัวแบบเป็นไปตามข้อสมมติเบื้องต้นของตัวแบบหรือไม่ เช่นความคลาดเคลื่อนสุ่มมีการแจกแจงปกติหรือไม่ มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนเป็น σ^2 ทุกตัวของความคลาดเคลื่อนสุ่มเป็นอิสระกันหรือไม่ ถ้าไม่เป็นตามข้อสมมติเบื้องต้น ต้องกลับไปกำหนดตัวแบบ แต่ถ้าเป็นไปตามข้อสมมติเบื้องต้นของตัวแบบก็นำตัวแบบประมาณการที่ได้ไปพยากรณ์ค่าในอนาคตต่อไป
6. การสร้างค่าพยากรณ์ เมื่อตัวแบบผ่านตรวจสอบความเหมาะสมแล้ว นำตัวแบบประมาณที่ได้ไปพยากรณ์ค่าในอนาคต
7. มีข้อมูลใหม่ ในการพยากรณ์ค่าหากเวลาผ่านไปมีข้อมูลใหม่ต้องนำข้อมูลใหม่นั้นมาปรับตัวแบบการพยากรณ์
8. การตรวจสอบความแม่นยำตัวแบบในกรณีที่นำข้อมูลใหม่เข้ามาเพิ่มในตัวแบบต้องมีการตรวจสอบตัวแบบเสมอว่าตัวแบบนั้นยังคงแม่นยำอยู่หรือไม่หรือตรวจสอบว่าตัวแบบนั้นมีความเหมาะสมอยู่หรือไม่หากพบว่าตัวแบบนั้นไม่มีความแม่นยำต้องมี

การกำหนดตัวแบบใหม่แต่ถ้าตัวแบบนั้นมีความแม่นยำก็จะนำตัวแบบประมาณการนี้ไปหาค่าพยากรณ์

9. การปรับค่าพยากรณ์ ค่าพยากรณ์ที่ได้จากการปรับค่าจากตัวแบบจะเป็นค่าพยากรณ์ที่เราใช้ในการพยากรณ์สำหรับข้อมูลในอนาคตต่อไป

5. การตรวจสอบความแม่นยำของตัวแบบ

การตรวจสอบความแม่นยำของตัวแบบพยากรณ์ โดยจะพิจารณาจากค่าจริงของข้อมูล Y_t เปรียบเทียบกับค่าพยากรณ์ของข้อมูล ($\hat{Y}_t$)

ให้ Y_t แทนข้อมูลจริงชุดที่ t ; $t = 1,2,3,...n$

$\hat{Y}_t$ แทนพยากรณ์ของข้อมูลชุดที่ t ; $t = 1,2,3,...n$

e_t แทนเศษตกค้าง (Residual) ชุดที่ t ; $t = 1,2,3,...n$

$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$

สำหรับวิธีที่ใช้หาค่าสถิติเพื่อทำการเปรียบเทียบกัน ซึ่งมีตัวสถิติดังนี้

1. ค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์เฉลี่ย (Mean Absolute Deviation : MAD)

$$MAD = \sum_{t=1}^{n} \frac{|e_t|}{n}$$

2. ค่าผิดพลาดเฉลี่ย (Mean Error : ME)

$$ME = \sum_{t=1}^{n} \frac{e_t}{n}$$

3. ค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error : MSE)

$$MSE = \sum_{t=1}^{n} \frac{e_t^2}{n}$$

4. ร้อยละความผิดพลาดเฉลี่ย (Mean Percentage Error : MPE)

$$MPE = \sum_{t=1}^{n} \frac{\frac{e_t \times 100}{Y_t}}{n}$$

5. ร้อยละความผิดพลาดสัมบูรณ์เฉลี่ย (Mean Absolute Percentage Error : MAPE)

$$MAPE = \sum_{t=1}^{n} \frac{\left|\frac{e_t \times 100}{Y_t}\right|}{n}$$

6. ตัวสถิติ Theil's U (Theil's U Statistics)

หรือหนังสือบางเล่มใช้.ตัวสถิติ Theil's U (Theil's U Statistics)

$$U=\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n-1}\left(\frac{\hat{Y}_{t+1}-Y_{t+1}}{Y_t}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n-1}\left(\frac{Y_{t+1}-Y_t}{Y_t}\right)^2}}$$

โดยที่ การเปลี่ยนแปลงที่สัมพันธ์ค่าพยากรณ์ (Forecasted Relative Change: FPE_{t+1}) $\left(\frac{\hat{Y}_{t+1}-Y_{t+1}}{Y_t}\right)$ และค่า $\left(\frac{Y_{t+1}-Y_t}{Y_t}\right)$ เป็นค่าการเปลี่ยนแปลงค่าจริง(Actual relative change: APE_{t+1})

ถ้า $U=1$ ถ้า $FPE_{t+1}=APE_{t+1}$ หมายความว่าวิธีการพยากรณ์ Naïve ให้ค่าพยากรณ์ที่ดีพอ ๆ กับการวิธีการพยากรณ์ที่ใช้อยู่

ถ้า $U>1$ ถ้า $FPE_{t+1}>APE_{t+1}$ หมายความว่าวิธีการพยากรณ์ Naïve ให้ค่าพยากรณ์ที่แม่นยำมากกว่าวิธีการพยากรณ์ที่ใช้อยู่

ถ้า $U<1$ ถ้า $FPE_{t+1}<APE_{t+1}$ หมายความว่าวิธีการพยากรณ์ Naïve ให้ค่าพยากรณ์ที่แม่นยำน้อยกว่าวิธีการพยากรณ์ที่ใช้อยู่

ตัวอย่างที่ 1 การคำนวณหาค่าตัวสถิติเพื่อการตรวจสอบความแม่นยำตัวแบบ

t	Y_t	$\hat{Y}_t$	$e_t=Y_t-\hat{Y}_t$	MAD	ME	MSE	MPE	$MAPE$
1	47.99664	7.013703	40.98294	40.98294	40.98294	1679.601	85.3871	85.3871
2	22.06848	9.556077	12.51241	12.51241	12.51241	156.5603	56.69808	56.69808
3	0.986577	44.63661	-43.65004	43.65004	-43.65004	1905.326	-4424.39	4424.394
4	27.47528	0.305718	27.16956	27.16956	27.16956	738.1852	98.8873	98.8873
5	39.15668	39.38177	-0.22509	0.225089	-0.22509	0.050665	-0.57484	0.574842
6	17.04163	13.7213	3.32033	3.32033	3.32033	11.02459	19.48364	19.48364
7	6.322302	10.97478	-4.65248	4.652481	-4.65248	21.64558	-73.5884	73.5884
8	22.28649	0.181883	22.1046	22.1046	22.1046	488.6135	99.18388	99.18388
9	2.522167	21.92506	-19.4029	19.4029	-19.4029	376.4724	-769.295	769.2945
10	24.4378	94.92794	-70.4901	70.49015	-70.4901	4968.861	-288.447	288.4472
			รวม	244.5105	-32.3308	10346.34	-5196.66	5915.939
			ค่าเฉลี่ย	24.45105	-3.23308	1034.634	-519.666	591.5939

จากข้อมูลต่อไปนี้จะได้ค่าสถิติต่าง ๆ ดังนี้

1. ค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์เฉลี่ย (Mean Absolute Deviation : MAD)

$$MAD = \sum_{t=1}^{n} \frac{|e_t|}{n}$$

$$MAD = \frac{244.5105}{10} = 24.4515$$

2. ค่าผิดพลาดเฉลี่ย (Mean Error : ME)

$$ME = \sum_{t=1}^{n} \frac{e_t}{n}$$

$$ME = \frac{-32.3308}{10} = -3.23308$$

3. ค่าผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error : MSE)

$$MSE = \sum_{t=1}^{n} \frac{e_t^2}{n}$$

$$MSE = \frac{10346.34}{10} = 1034.634$$

4. ร้อยละความผิดพลาดเฉลี่ย (Mean Percentage Error : MPE)

$$MPE = \sum_{t=1}^{n} \frac{\frac{e_t \times 100}{Y_t}}{n}$$

$$MPE = \frac{-5196.66}{10} = -519.666$$

5. ร้อยละความผิดพลาดสัมบูรณ์เฉลี่ย (Mean Absolute Percentage Error : MAPE)

$$MAPE = \sum_{t=1}^{n} \frac{\left|\frac{e_t \times 100}{Y_t}\right|}{n}$$

$$MAPE = \frac{5915.939}{10} = 591.5939$$

6. ตัวสถิติ Theil's U (Theil's U Statistics

$$U = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n-1}\left(\frac{\hat{Y}_{t+1} - Y_{t+1}}{Y_t}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n-1}\left(\frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t}\right)^2}}$$

ที่ $t = 2 \quad FPE_2 = \left(\frac{9.55607 - 22.06848}{47.99664}\right)^2 = 0.067961$

ที่ $t = 2 \quad APE_2 = \left(\frac{22.06848 47.99664}{47.99664}\right)^2 = 0.291824$

t	Y_t	$\hat{Y}_t$	FPE_{t+1}	APE_{t+1}
1	47.99664	7.013703		
2	22.06848	9.556077	0.067961	0.291824
3	0.986577	44.63661	3.912229	0.912588
4	27.47528	0.305718	758.4087	720.8741
5	39.15668	39.38177	6.71E-05	0.180761
6	17.04163	13.7213	0.00719	0.31898
7	6.322302	10.97478	0.074533	0.395652
8	22.28649	0.181883	12.22405	6.375925
9	2.522167	21.92506	0.757966	0.786467
10	24.4378	94.92794	781.1044	75.50233
		ผลรวม	1556.557	805.6386

จากตารางข้างต้นนี้

$$U = \frac{1556.557}{805.6386} = 1.932079$$

แสดงว่าวิธีการพยากรณ์ที่ใช้ให้ความแม่นยำต่ำกว่าวิธี naïve

นอกจากการพิจารณาค่าของตัวสถิติข้างต้นยังมีหลักเกณฑ์ที่ควรนำไปใช้ในการเลือกหรือสร้างตัวแบบคือ **หลักของการประหยัด** (Principle of Parsimony) ในกลุ่มตัวแบบที่ให้ผลพยากรณ์ที่เท่า ๆ กัน เลือกตัวแบบที่ง่ายที่สุด หรือ ในการสร้างตัวแบบพยายามกำหนดจำนวนพารามิเตอร์น้อยที่สุดเท่าที่เป็นได้ เหตุผลที่เลือกตัวแบบง่าย ๆ หรือตัวแบบที่มีพารามิเตอร์จำนวนน้อยเพราะ

1. ง่ายแก่การอธิบายและแปลความ

2. การประมาณค่าของพารามิเตอร์ที่ไม่จำเป็น หรือมีความสำคัญน้อย จะทำให้ความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อนพยากรณ์เพิ่มขึ้น

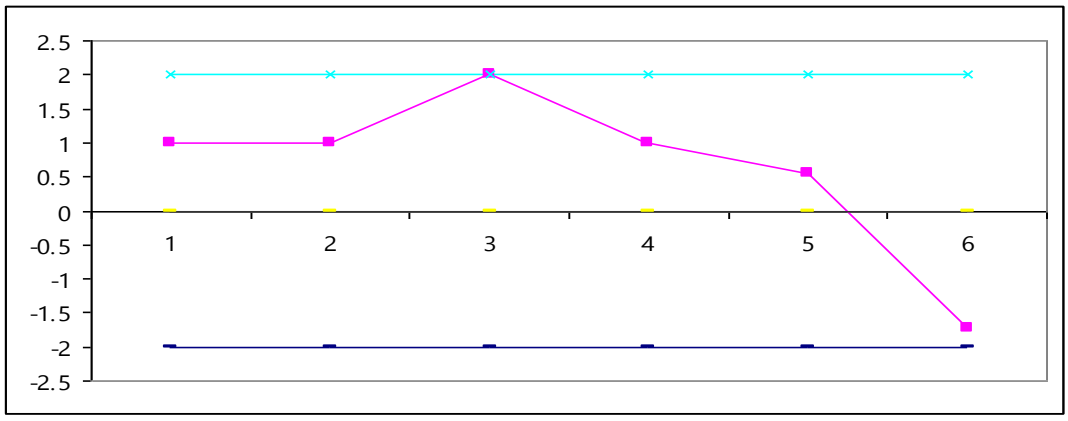
6. การควบคุมตัวแบบพยากรณ์

หลังจากที่เวลาผ่านไป จะได้ข้อมูลหรือค่าคลาดเคลื่อนใหม่เข้ามา ค่าคลาดเคลื่อนเหล่านี้อาจทำให้ตัวแบบพยากรณ์ที่ใช้อยู่ไม่เหมาะสม ฉะนั้นจึงควรทำการตรวจสอบว่าตัวแบบที่ใช้ยังมีความเพียงพอหรือเหมาะสมหรือไม่ ถ้าพบว่าตัวแบบยังมีความเหมาะสม เราสามารถนำค่าคลาดเคลื่อนใหม่นั้นไปใช้ในการปรับค่าพยากรณ์ที่เหลืออยู่ได้ด้วย ตัวสถิติที่ใช้ในการตรวจสอบได้แก่ ตัวสถิติ Tracking Signals หรือใช้วิธีการตรวจสอบที่ใช้ในขั้นวินิจฉัยตัวแบบ

$$Tracking\ Signals(p) = \frac{\sum_{t=1}^{p} e_t}{\sum_{t=1}^{p} \frac{|e_t|}{p}}$$

ค่า Tracking Signals มีค่าเกินจากช่วง ± 2 หรือ ± 5 (นิยมใช้กัน)ถือว่าค่าพยากรณ์นี้ไม่อยู่ในการควบคุม

t	y_t	$\hat{y}_t$	e_t	$\sum_{t=1}^{t} e_t$	$\lvert e_t \rvert$	$\sum_{t=1}^{t} \lvert e_t \rvert$	$\sum_{t=1}^{t} \frac{\lvert e_t \rvert}{t}$	Tracking signal $\frac{\sum_{t=1}^{p} e_t}{\sum_{t=1}^{p} \frac{\lvert e_t \rvert}{p}}$
1	98	95	3	3	3	3	3	1
2	94	95	-1	2	1	4	2	1
3	97	95	2	4	2	6	2	2
4	93	95	-2	2	2	8	2	1
5	94	95	-1	1	1	9	1.8	0.56
6	90	95	-5	-4	5	14	2.33	-1.71



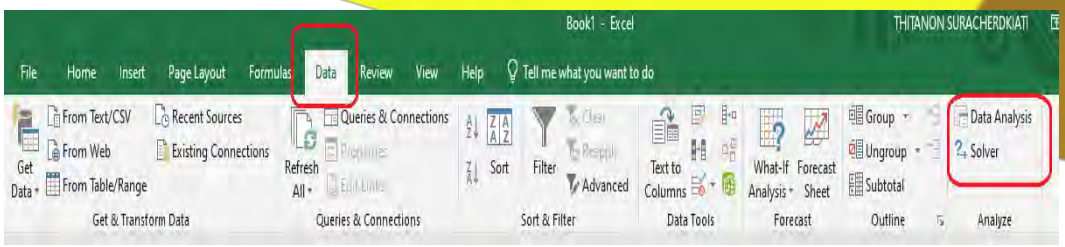
พิจารณาจากกราฟ ค่า Tracking Signals มีค่าอยู่นอกเขต ± 2 แสดงว่าตัวแบบที่สร้างค่าพยากรณ์อยู่นอกเขตควบคุมต้องมีการตรวจสอบตัวแบบใหม่

7. ปัญหาบางประการของงานพยากรณ์เชิงปริมาณ

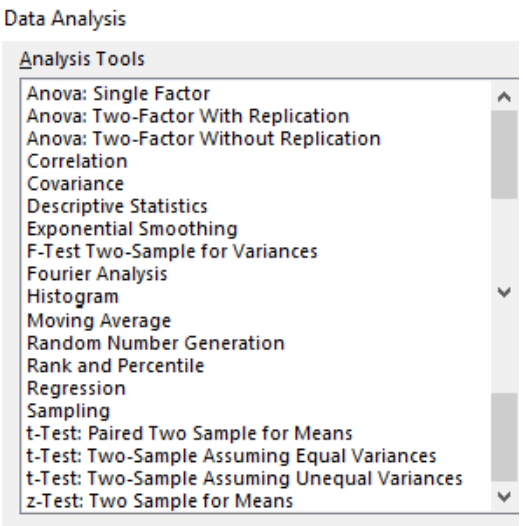
1. ความไม่คงที่ของรูปแบบการเปลี่ยนแปลงของข้อมูล
2. ข้อมูลไม่เพียงพอ
3. นักพยากรณ์มีความรู้ความสามารถน้อยในเทคนิคพยากรณ์
4. อุปกรณ์ช่วยคำนวณไม่พร้อม เช่น ไม่มีเครื่องคอมพิวเตอร์และโปรแกรม
5. ความสนใจของผู้ใช้หรือผู้บริหารมีน้อย

8. การพยากรณ์โดยอาศัยโปรแกรมสำเร็จรูป Microsoft Excel หาผลลัพธ์

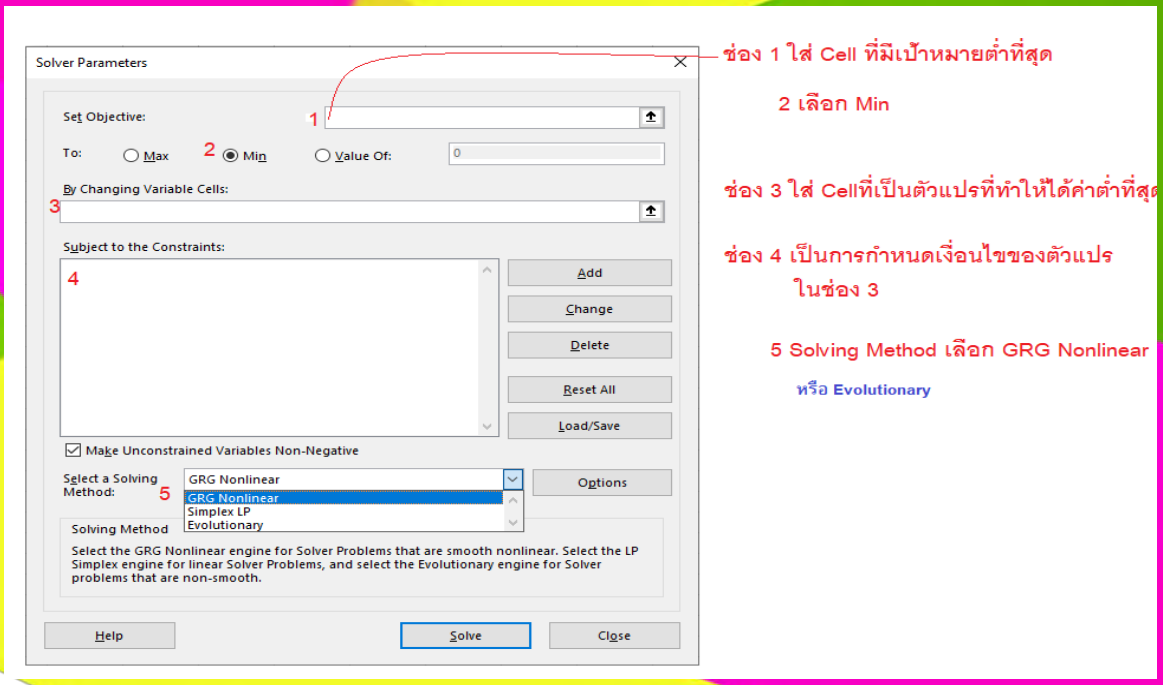
ในหนังสือเล่มนี้จะหาผลลัพธ์โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Minitab และโปรแกรม **Microsoft Excel** โดยใช้คำสั่งในเมนู DATA คำสั่ง DATA>Data Analysis ,DATA>Solver และฟังก์ชันในโปรแกรม Microsoft Excel



1. คำสั่ง DATA>Data Analysis ในโปรแกรม Excel มีคำสั่งย่อยหลายคำสั่งที่ช่วยใช้พยากรณ์ค่าในอนาคตได้ เช่น คำสั่ง Regression Correlation Covariance เป็นต้น แต่ส่วนใหญ่จะใช้คำสั่ง Regression



2. คำสั่ง DATA>Solver



3. คำสั่ง *fx* ที่มีอยู่ในหลายหมวดหมู่ เช่น Math & Trig ,Statistical, Lookup & Reference, Logical เช่น ฟังก์ชัน COUNTIF เป็นการนับจำนวนภายใต้เงื่อนไข, SUMIF เป็นการหาผลรวมภายใต้เงื่อนไข, SUMXMY2 เป็นการหาผลรวมของผลต่างกำลังสองของตัวแปร X และ Y, MMULT เป็นการคูณกันของเมทริกซ์และ/หรือเวคเตอร์, MINVERSE การหาเมทริกซ์ส่วนกลับ (Inverse Matrix) การหาเมทริกซ์ทรานสโพสใช้คำสั่ง Copy >Paste Special>transpose เป็นต้น

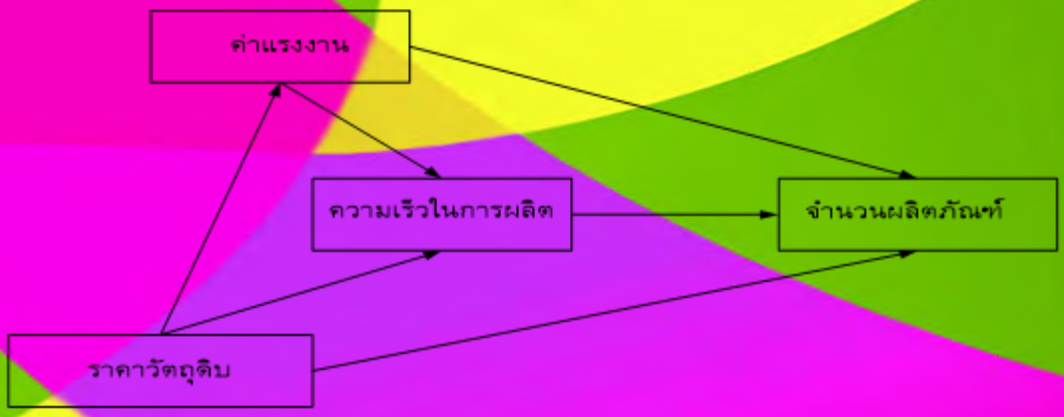
4. การใช้คำสั่ง INSERT>Line Chart ,INSERT>Scatter(x,y)

บทที่ 2
การวิเคราะห์การถดถอย
Regression Analysis

1. ความหมายและตัวแบบการถดถอย

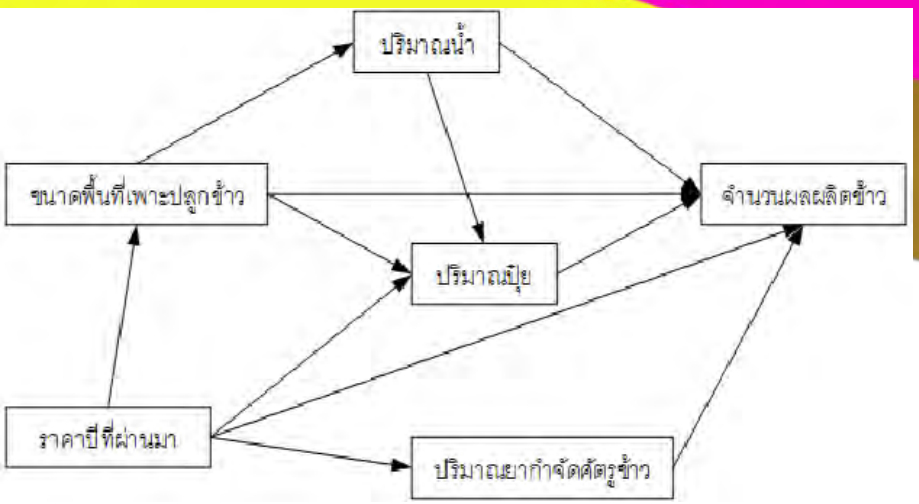
การวิเคราะห์ถดถอย คือ การศึกษาถึงตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของสิ่งที่เราสนใจที่มีความสัมพันธ์กับสิ่งอื่น ๆ ที่มาเกี่ยวข้องในชีวิตประจำวันเราอาจจะต้องการข้อเท็จจริงเกี่ยวกับสิ่งต่าง ๆ ควบคู่กันไปต้องการดูความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งต่าง ๆ เช่น เราสนใจในจำนวนผลิตภัณฑ์ที่ผลิตได้ขึ้นอยู่กับราคาวัตถุดิบที่ใช้ ความเร็วในการผลิต ค่าจ้างแรงงานหรือ ในทางเศรษฐศาสตร์รายได้ประชาชาติมีผลทำให้ค่าใช้จ่ายเรื่องอุปโภค-บริโภคเพิ่มขึ้นหรือลดลงหรือไม่ เป็นต้น

เราอาจจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่เราสนใจหรือตัวแปรที่สนใจในรูปฟังก์ชัน เช่น Y เป็นฟังก์ชันของสิ่งอื่น ๆ หรือ X โดยเราเรียก X ว่า ตัวแปรอิสระ (Independent Variable) ตัวแปรสาเหตุ และเรียก Y ว่าตัวแปรตาม (Dependent Variable) หรือตัวแปรผลกระทบ (Response Variable) ดังนั้น จุดมุ่งหมายที่สำคัญของการถดถอย ก็คือ เพื่อศึกษาว่าค่าของ Y ขึ้นอยู่กับค่าของ X หรือไม่ และใช้ประโยชน์ของฟังก์ชันนี้เพื่อที่จะทำนายค่าของ Y โดยอาศัยค่าของ X การศึกษารูปร่างลักษณะของโค้งการถดถอยจะแสดงรูปแบบความสัมพันธ์เชิงเหตุผลของการวิเคราะห์เส้นทางของตัวแบบต่างได้ดังนี้ เช่น รูปที่ 1 จำนวนผลิตภัณฑ์ที่ได้ในการผลิตจะมีมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับความเร็วของเครื่องจักรที่ใช้ในการผลิต หากตั้งช้าจำนวนผลิตภัณฑ์ที่ผลิตได้จะมีจำนวนน้อย ในทางตรงข้ามหากตั้งความเร็วเครื่องจักรสูงจำนวนผลิตภัณฑ์จะออกมามาก หรือการใช้วัตถุดิบที่มีคุณภาพดี(ราคาสูง) ในการผลิตจำนวนผลิตภัณฑ์ที่ดีจะออกมามาก หรือใช้คนงานผลิตที่มีทักษะในการผลิตภัณฑ์นั้น(ค่าแรงสูง) ก็น่าจะได้จำนวนผลิตภัณฑ์ที่ดีจะออกมามาก ทั้งความเร็วของเครื่องจักร ค่าแรงงาน ราคาวัตถุดิบน่าจะมีผลทำให้ผลิตจำนวนผลิตภัณฑ์ที่ดีผลิตได้มาก



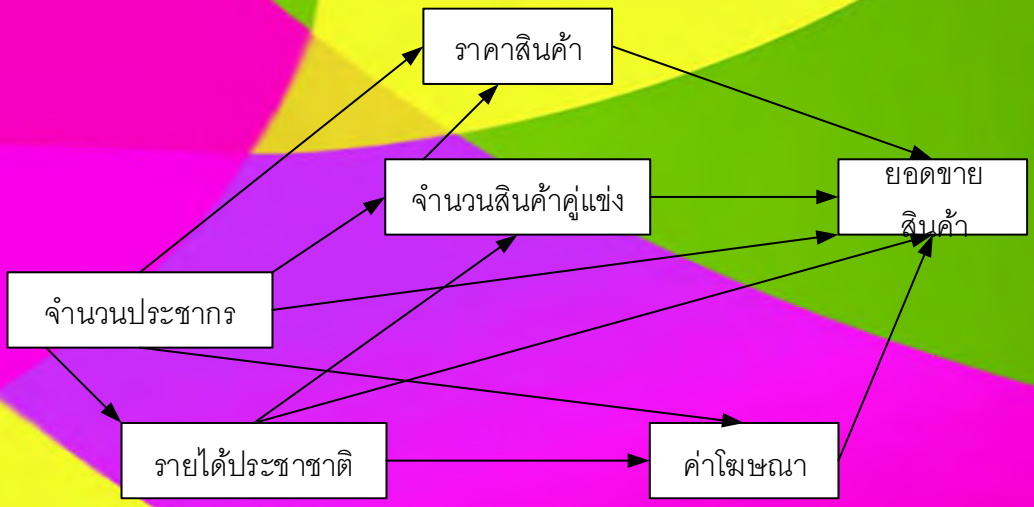
รูปที่ 1 เส้นทางความสัมพันธ์ของตัวแปรจำนวนผลิตภัณฑ์

อีกกรณีคือเรื่องของจำนวนผลผลิตข้าว ตามรูปที่ 2 จำนวนผลผลิตข้าวมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับปริมาณน้ำ ปริมาณปุ๋ยที่ให้แก่ต้นข้าวปริมาณยากำจัดศัตรูข้าว ขนาดพื้นที่เพาะปลูกข้าว และราคาข้าวปีที่ผ่านมา



รูปที่ 2 เส้นทางความสัมพันธ์ของตัวแปรจำนวนผลผลิตข้าว

รูปที่ 3 ยอดขายสินค้าจะขึ้นอยู่กับค่าใช้จ่ายในการโฆษณา ราคาสินค้า รายได้ประชาติ จำนวนประชากรเป้าหมาย และจำนวนสินค้าคู่แข่ง ยอดขายสินค้าเป็นตัวแปรตามหรือตัวแปรผลกระทบ ส่วนค่าใช้จ่ายในการโฆษณา ราคาสินค้า รายได้ประชาติ จำนวนประชากรเป้าหมาย และจำนวนสินค้าคู่แข่งเป็นตัวแปรอิสระ



รูปที่ 3 เส้นทางความสัมพันธ์ของยอดขายสินค้า

ตัวแบบการถดถอย (Regression Models)

ตัวแบบการถดถอย (Regression Models) ประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ ดังนี้

Y_t แทนตัวแปรตามชุดที่ t หรือตัวแปรผล

X_{ti} แทนตัวแปรอิสระตัวที่ i ชุดที่ t หรือตัวแปรสาเหตุ

$\mathbf{X_t} = \left(X_{t1}, X_{t2}, ..., X_{tp}\right)'$ แทนเวคเตอร์ตัวแปรอิสระ p ตัวสำหรับข้อมูลชุดที่ t

$\boldsymbol{\beta} = \left(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p\right)'$ แทนพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า

ε_t ความคลาดเคลื่อนสุ่มสำหรับข้อมูลชุดที่ t

$$Y_t = f\left(\mathbf{X_t}; \boldsymbol{\beta}\right) + \varepsilon_t \quad \text{.....(1)}$$

จากตัวแบบการถดถอย (1) เป็นตัวแบบความน่าจะเป็นเนื่องจาก ε_t เป็นตัวแปรสุ่ม ที่มีข้อสมมติเบื้องต้นว่า

1. $E\left(\varepsilon_t\right) = 0; \forall t$
2. $V\left(\varepsilon_t\right) = \sigma^2; \forall t$
3. $Cov\left(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}\right) = E\left(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}\right) = 0$
4. ε_t มีการแจกแจงแบบปกติ

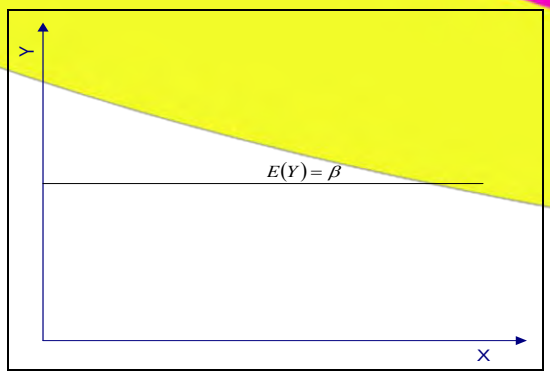
สรุปเป็นสัญลักษณ์ทางสถิติคือ $\varepsilon_t \sim NID\left(0, \sigma^2\right)$

จากคุณสมบัติของ ε_t จะส่งผลไปยังตัวแปรตาม Y_t กล่าวคือ $Y_t \sim NID\left(f\left(\mathbf{X_t}; \boldsymbol{\beta}\right), \sigma^2\right)$

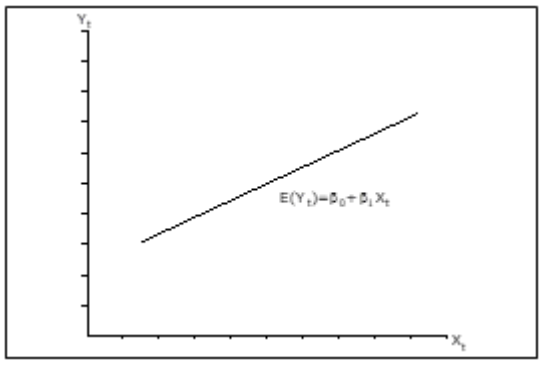
$$\varepsilon_t \sim NID\left(0, \sigma^2\right) \Leftrightarrow Y_t \sim NID\left(f\left(\mathbf{X_t}; \boldsymbol{\beta}\right), \sigma^2\right)$$

2. ตัวแบบการถดถอยที่พบทั่วไป

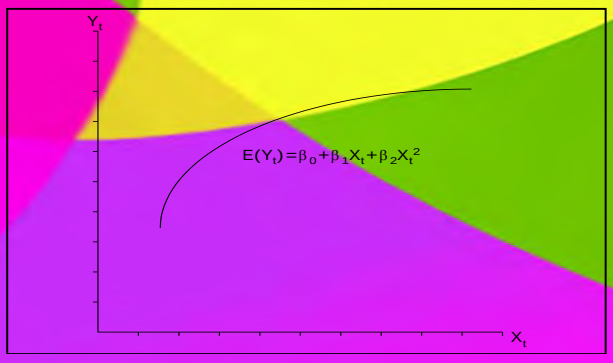
ลักษณะตัวแบบ	ชื่อตัวแบบ
$Y_t = \beta_0 + \varepsilon_t$	ตัวแบบค่าเฉลี่ยคงที่
$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$	ตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย
$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_t^2 + \varepsilon_t$	ตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นกำลังสอง
$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \varepsilon_t$	ตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นตัวแปรอิสระสองตัว
$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \beta_{11} X_{t1}^2 + \beta_{22} X_{t2}^2 + \beta_{12} X_{t1} X_{t2} + \varepsilon_t$	ตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นกำลังสองตัวแปรอิสระสองตัว
$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t2} + \ldots + \beta_p X_{tp} + \varepsilon_t$	ตัวแบบถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ
$Y_t = \beta_0 e^{\beta_1 X_t} + \varepsilon_t$	ตัวแบบเติบโตแบบชี้กำลัง



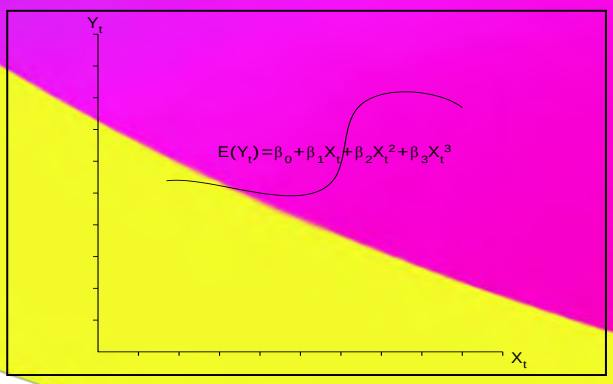
รูปที่ 4 แสดงลักษณะตัวแบบค่าเฉลี่ยคงที่



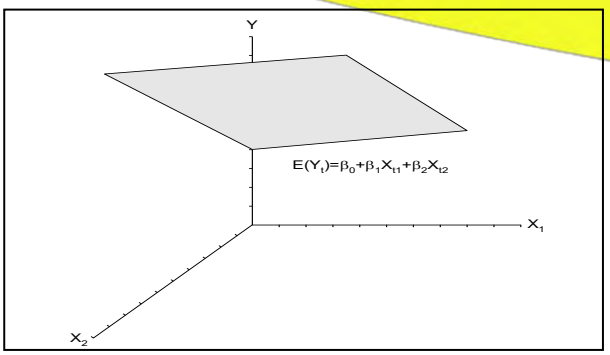
รูปที่ 5 แสดงลักษณะตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย



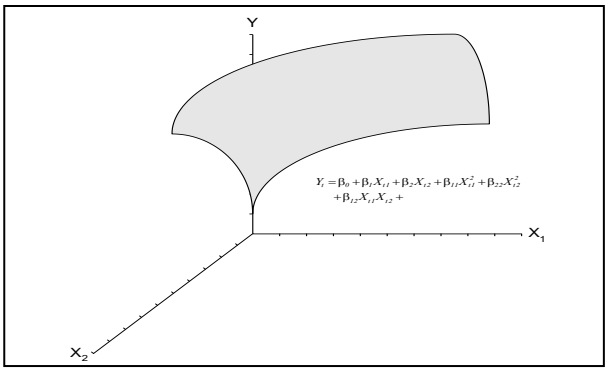
รูปที่ 6 แสดงลักษณะตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นกำลังสอง



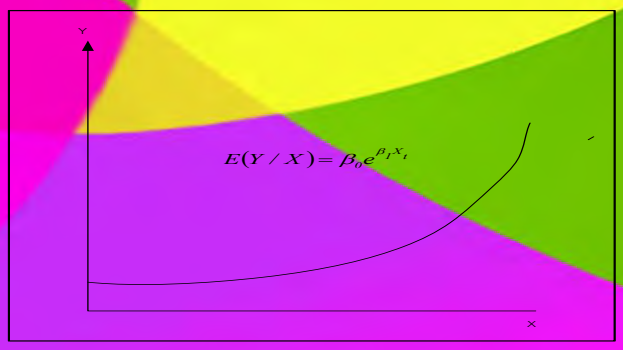
รูปที่ 7 แสดงลักษณะตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นโพลีโนเมียล



รูปที่ 8 แสดงลักษณะตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นสองตัวแปรอิสระ



รูปที่ 9 แสดงลักษณะตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นกำลังสอง-สองตัวแปรอิสระ



รูปที่ 10 แสดงลักษณะตัวแบบเติบโตแบบชี้กำลัง

3. ตัวแบบเชิงเส้นและตัวแบบไม่ใช่เชิงเส้น (Linear & Nonlinear Models)

ในการวิเคราะห์การถดถอยเราสามารถจำแนกตัวแบบการถดถอยออกเป็นตัวแบบการถดถอย***เชิงเส้น*** (Linear Regression Model) และตัวแบบการถดถอย***ไม่ใช่เชิงเส้น*** (Nonlinear Regression Models) ในเทอมของ***พารามิเตอร์***วิธีการจำแนกการเป็นตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นและตัวแบบการถดถอยไม่ใช่เชิงเส้นกระทำได้ดังนี้ตัวแบบการถดถอย $Y_t = f(\mathbf{X_t};\boldsymbol{\beta})+\varepsilon_t$ โดยที่ $\boldsymbol{\beta} = (\beta_o, \beta_{1,}\beta_{2,},...,\beta_p)'$ ทำการหาอนุพันธ์บางส่วนของ $Y_t = f(\mathbf{X_t};\boldsymbol{\beta})+\varepsilon_t$ เทียบกับ β_i $i = 1,2,...,p$ ทุกตัว $\dfrac{\partial f(\mathbf{X}_t,\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_i}$; $\beta_i = 1,2,3,...,p$

ถ้าผลการหาอนุพันธ์บางส่วนสำหรับ β_i แต่ละตัวแล้วไม่พบว่ามี β_i ตัวมันเองหรือ β_i ตัวอื่นๆ ปรากฏในผลการหาอนุพันธ์บางส่วน แสดงว่าเป็นตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นแต่ถ้ามี β_i ปรากฏในผลการหาอนุพันธ์บางส่วนแสดงว่าเป็นตัวแบบการถดถอยไม่ใช่เชิงเส้น ตัวอย่างการจำแนกตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นและตัวแบบการถดถอยไม่ใช่เชิงเส้น

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \quad \text{.....(2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_0}(\beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t) = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1}(\beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t) = X_t$$

แสดงว่า $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$ เป็นตัวแบบการถดถอยเชิงเส้น

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_t^2 + \varepsilon_t \quad \text{.....(3)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_0}\left(\beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_t^2 + \varepsilon_t\right) = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1}\left(\beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_t^2 + \varepsilon_t\right) = X_t$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_2}\left(\beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_t^2 + \varepsilon_t\right) = X_t^2$$

แสดงว่า $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_t^2 + \varepsilon_t$ เป็นตัวแบบการถดถอยเชิงเส้น

ตัวแบบการถดถอย $Y_t = \beta_0 e^{-\beta_1 X_t} + \varepsilon_t$ .....(4)

$$\frac{\partial}{\partial \beta_0}\left(\beta_0 e^{-\beta_1 X_t} + \varepsilon_t\right) = e^{-\beta_1 X_t}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1}\left(\beta_0 e^{-\beta_1 X_t} + \varepsilon_t\right) = -\beta_0 e^{-\beta_1 X_t} X_t$$

ปรากฏว่าผลการหาอนุพันธ์บางส่วนเมื่อเทียบกับ β_0 มี β_1 อยู่ด้วย และเมื่อหาอนุพันธ์บางส่วนเมื่อเทียบกับ β_1 มี β_0 อยู่ด้วย แสดงว่าเป็นตัวแบบการถดถอยไม่เชิงเส้น

4. วิธีการกำลังสองน้อยที่สุดแบบสามัญ (Ordinary Least Square Method :OLS)

ในการสร้างตัวแบบการถดถอยที่ $Y_t = f(\mathbf{X_t};\boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_t$ เป็นตัวแบบการถดถอยของประชากร ซึ่งไม่สามารถกระทำได้เพราะต้องนำข้อมูลทั้งหมดมาหาค่าพารามิเตอร์ $\boldsymbol{\beta}$ แต่ในทางสถิติเราใช้วิธีการประมาณค่า $\boldsymbol{\beta}$ จะเป็นการกระทำที่ดีกว่า การประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบถดถอยคือ $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p)'$ ก็ทำได้หลายวิธีเช่นวิธีภาวะสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation) วิธีการกำลังสองน้อยที่สุดแบบสามัญ (Ordinary Least Square) วิธีการกำลังสองน้อยที่สุดแบบทั่วไป (General Least Square) เป็นต้น ในหนังสือเล่มนี้จะใช้วิธีการกำลังสองน้อยที่สุดแบบสามัญในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ที่ต้องดำเนินการโดยหาค่าผลรวมความผิดพลาดกำลังสองที่น้อยที่สุดคือ $\min imize S(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[Y_t - f\left(\mathbf{X_t};\boldsymbol{\beta}\right)\right]^2$ จากนั้นเราจะหาอนุพันธ์บางส่วน (Partial Differentiation) เทียบกับพารามิเตอร์ $\beta_i;\ i = 0,1,2,...,p$ แต่ละตัวและให้ผลการหาอนุพันธ์บางส่วนมีค่าเป็นศูนย์และใช้การแก้สมการหาค่า $\hat{\beta}_i$

สำหรับตัวแบบการถดถอยอย่างง่าย $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$ ที่มีความสัมพันธ์ระหว่าง (X_t, Y_t) เป็นแนวเส้นตรง ดังรูปที่ 11 เป็นข้อมูลของอายุ (X_t)และจำนวนครั้งความพยายามในการกระโดดจับเชือกให้ได้ (Y_t)

อายุ	5	7	8	9	11	12	13	15
ความพยายาม	2	4	8	9	12	13	10	16

โดยที่ $Y_t = \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t + e_t$: e_t เป็นเศษตกค้าง (Residual) ค่าผลรวมความผิดพลาดกำลังสองที่น้อยที่สุดคือ $S(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_t - \hat{Y}_t\right]^2$ คำนวณหาอนุพันธ์บางส่วนเทียบกับ $\hat{\beta}_i$ แต่ละตัวและให้เท่ากับศูนย์

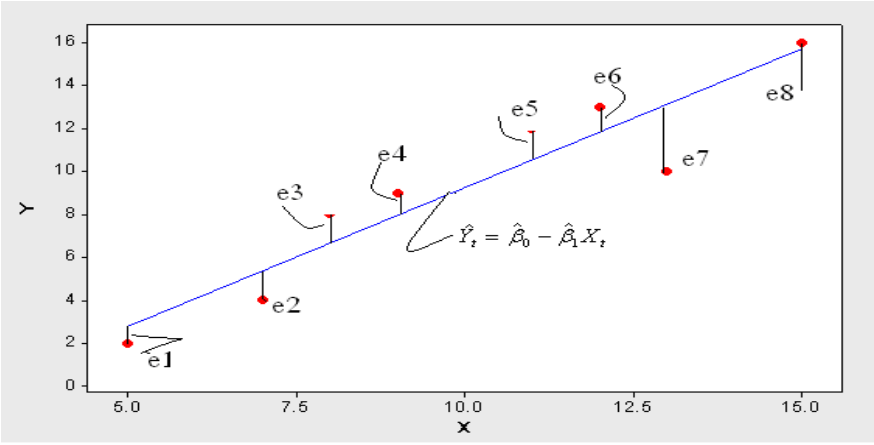
$$\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_0} S\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\right) = \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_0} \sum_{i=1}^{n} \left[Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t\right]^2 = -2 \sum_{i=1}^{n} \left[Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t\right] = 0 \quad \text{.....(5)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_1} S\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\right) = \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^{n} \left[Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t\right]^2 = -2 \sum_{i=1}^{n} X_t \left[Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t\right] = 0 \quad \text{.....(6)}$$

จาก (5) และ (6)

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left(X_t - \bar{X}\right) Y_t}{\sum_{t=1}^{n} \left(X_t - \bar{X}\right)^2} = \frac{n \sum_{t=1}^{n} X_t Y_t - \left(\sum_{t=1}^{n} X_t\right)\left(\sum_{t=1}^{n} Y_t\right)}{n \sum_{t=1}^{n} X_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} X_t\right)^2}$$

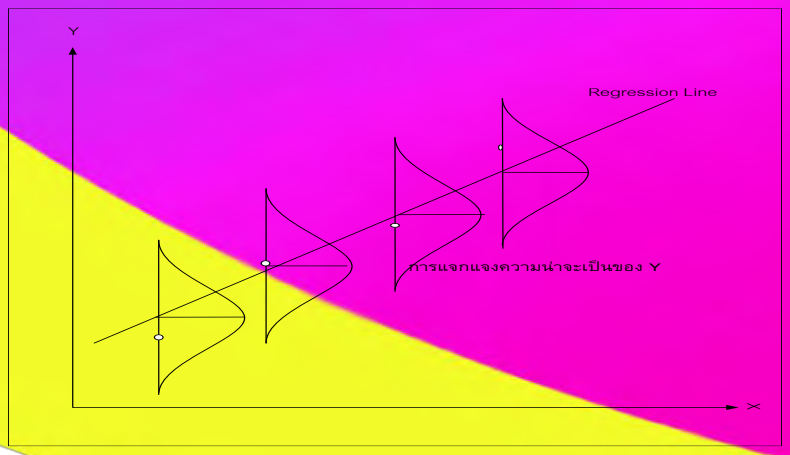
$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$



รูปที่ 11 ความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลของอายุ (X_t)และจำนวนครั้งความพยายามในการกระโดดจับเชือกให้ได้ (Y_t)

จากรูปที่ 11 เส้นประมาณ $\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t$ ที่คำนวณและขีดเป็นเส้นตรงเป้นเส้นหรือตัวแบบที่เป็นตัวแทนของจุด (x_t, y_t) โดยระยะห่างจากเส้นถึงจุดจริงของข้อมูล e_t ที่เราคิดว่าเส้นประมาณการนี้เป็นเส้นที่ดีที่สุดที่ทำให้ ค่า $\sum_{t=1}^{n} e_t^2$ มีค่าต่ำที่สุด

จากรูปที่ 12 แต่ละจุดที่อยู่บนเส้นประมาณการจะต้องมีการแจกแจงปกติมีความแปรปรวนคงที่



รูปที่ 12 แสดงเส้นการถดถอย และการแจกแจงความน่าจะเป็นของ Y

5. วิธีการสภาวะสูงสุด (Maximum Likelihood Estimator)

จากหัวข้อที่ (1) กล่าวว่า $\varepsilon_t \sim NID(0,\sigma^2) \Leftrightarrow Y_t \sim NID(f(\mathbf{X_t;\beta}),\sigma^2)$ ดังนั้นตัวแปรตาม $\hat{Y}$ มีการแจกแจงแบบปกติมีค่าเฉลี่ยเป็นฟังก์ชันของ $f(\mathbf{X_t;\hat{\beta}})$ ซึ่งก็มีรูปแบบดังรูปที่ 12 โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นดังนี้

$$f(y_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y_t - f(\mathbf{X_t;\beta}))^2}{\sigma^2}} \quad ;-\infty < y_t < \infty, \sigma > 0 \quad \text{.....(7)}$$

สำหรับกรณีฟังก์ชันการถดถอยอย่างง่าย $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$ ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น เป็นดังนี้

$$f(y_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y_t - \beta_0 - \beta_1 x_t)^2}{\sigma^2}} \quad ;-\infty < y_t < \infty, \sigma > 0 \quad \text{.....(8)}$$

เราสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ β_0, β_1 โดยวิธีสภาวะสูงสุด (Maximum Likelihood Estimator) โดยฟังก์ชันสภาวะสูงสุด คือ

$$L = f(y_1).f(y_2)....f(y_n) \quad \text{.....(9)}$$

$$L=\prod_{t=1}^{n}\left[\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}}exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y_t-\beta_0-\beta_1x_t)^2\right)\right]$$

$$L=\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{n}(y_t-\beta_0-\beta_1x_t)^2\right)$$

ใส่ล็อกฐานธรรมชาติกับฟังก์ชันสภาวะสูงสุด

$$ln(L)=-\frac{n}{2}ln(2\pi)-\frac{n}{2}ln\left(\sigma^2\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{n}(y_t-\beta_0-\beta_1x_t)^2 \quad \text{.....(10)}$$

$$\frac{\partial(\ln(L))}{\partial\beta_0}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=1}^{n}\left(y_t-\beta_0-\beta_1x_t\right)=0$$

$$\sum_{t=1}^{n}\left(y_t-\beta_0-\beta_1x_t\right)=0 \quad \text{.....(11)}$$

$$\frac{\partial(\ln(L))}{\partial\beta_1}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=1}^{n}x_t\left(y_t-\beta_0-\beta_1x_t\right)=0$$

$$\sum_{t=1}^{n}x_t\left(y_t-\beta_0-\beta_1x_t\right)=0 \quad \text{.....(12)}$$

$$\frac{\partial(\ln(L))}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{t=1}^{n}\left(y_t-\beta_0-\beta_1x_t\right)^2=0 \quad \text{.....(13)}$$

จาก (11)&(12)

$$\hat{\beta}_1=\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(x_t-\overline{x}\right)y_t}{\sum_{t=1}^{n}\left(x_t-\overline{x}\right)^2}=\frac{n\sum_{t=1}^{n}x_ty_t-\left(\sum_{t=1}^{n}x_t\right)\left(\sum_{t=1}^{n}y_t\right)}{n\sum_{t=1}^{n}x_t^2-\left(\sum_{t=1}^{n}x_t\right)^2} \quad \text{.....(14)}$$

$$\hat{\beta}_0=\overline{y}-\hat{\beta}_1\overline{x} \quad \text{.....(15)}$$

และ จาก (13) $$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(y_t-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_t\right)^2}{n} \quad \text{.....(16)}$$

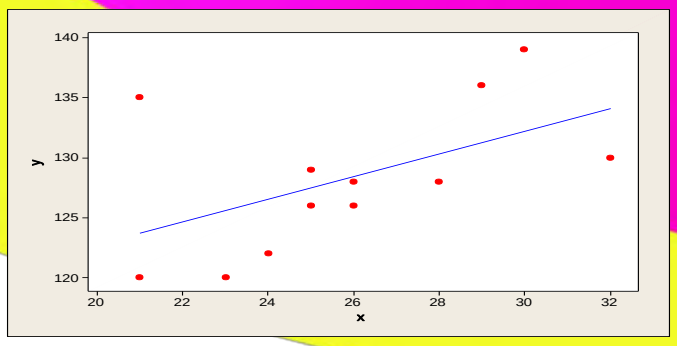
ตัวอย่างที่ 1 ข้อมูลจำนวนยอดขายสินค้า(Y)(ล้านบาท) ค่าใช้จ่ายในการโฆษณาสินค้า นั้น (X) (แสนบาท) จำนวน 12 ชุดเป็นดังนี้

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_t	23	24	25	26	32	25	21	26	28	21	29	30
y_t	120	122	126	128	130	129	120	126	128	135	136	139

จงสร้างตัวแบบประมาณการถดถอยของจำนวนยอดการขายบนค่าใช้จ่ายในการโฆษณา

วิธีทำ สร้างกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง X และ Y เป็นจุดต่างๆ ที่ปรากฏและ

ทดลองลากเส้นสมมติความสัมพันธ์ระหว่าง X และ Y ดังรูปต่อไปนี้



เมื่อพิจารณาข้อมูลพบว่าความสัมพันธ์ของจำนวนยอดขายสินค้าและจำนวนยอดขายสินค้าน่าจะเป็นตัวแบบการถดถอย คือ $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$ และคำนวณค่าตัวประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอย ดังนี้

t	X_t	Y_t	X_t^2	$X_t Y_t$
1	23	120	529	2760
2	24	122	576	2928
3	25	126	625	3150
4	26	128	676	3328
5	32	130	1024	4160
6	25	129	625	3225
7	21	120	441	2520
8	26	126	676	3276
9	28	128	784	3584
10	21	135	441	2835
11	29	136	841	3944
12	30	139	900	4170
ผลรวม	310	1539	8138	39880

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\sum_{t=1}^{n} x_t y_t - \left(\sum_{t=1}^{n} x_t\right)\left(\sum_{t=1}^{n} y_t\right)}{n\sum_{t=1}^{n} x_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} x_t\right)^2} = \frac{12\sum_{t=1}^{12} x_t y_t - \sum_{t=1}^{12} x_t \sum_{t=1}^{12} y_t}{12\sum_{t=1}^{12} x_t^2 - (\sum_{t=1}^{12} x_t)^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{12 \times 39880 - 310 \times 1539}{12 \times 8138 - (310)^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = 0.9447$$

$$\hat{\beta}_0 = 128.25 - 0.9447 \times 25.83 = 103.8445$$

$$\hat{y}_t = 103.8445 + 0.9447 x_t$$

ตัวแบบประมาณการถดถอยของจำนวนยอดการขายบนค่าใช้จ่ายในการโฆษณา คือ

$$\hat{y}_t = 103.8445 + 0.9447 x_t$$

สำหรับต่อไปนี้จะกล่าวถึงกรณีทั่วไปของตัวแบบการถดถอยที่ตัวแปรอิสระหลายตัวที่มีผลต่อตัวแปรตามหรือตัวแบบการถดถอยแบบพหุ(Multiple Linear Regression) ที่มีตัวแบบการถดถอยเป็นดังนี้

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \ldots + \beta_p X_{tp} + \varepsilon_t$$

เมื่อ $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)'$ และ $\mathbf{X_t} = (1, X_{t1}, X_{t2}, \ldots, X_{tp})'$

ดังนั้น ตัวแบบผลคูณเวคเตอร์ของการถดถอยคือ

$$Y_t = \mathbf{X_t'}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t$$

ผลคูณที่ได้คือ $Y_t = (1, X_{t1}, X_{t2}, \ldots, X_{tp}) \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \varepsilon_t$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \ldots + \beta_p X_{tp} + \varepsilon_t$$

ถ้าเป็นข้อมูลทั้งชุดหรือจากตัวอย่างทั้งหมดของการวิเคราะห์การถดถอย

$$\mathbf{Y}=(Y_1,Y_2,...,Y_n)',\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)'$$

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1 & X_{11} & ... & X_{1p}\\ 1 & X_{21} & ... & X_{2p}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & X_{n1} & ... & X_{np}\end{bmatrix}_{n\times(p+1)}$$

เราสามารถเขียนตัวแบบการถดถอยนี้เป็นชุดได้ คือ

$$\begin{aligned}Y_1 &= \beta_0+\beta_1X_{11}+\beta_2X_{12}+...+\beta_pX_{1p}+\varepsilon_1\\ Y_2 &= \beta_0+\beta_1X_{21}+\beta_2X_{22}+...+\beta_pX_{2p}+\varepsilon_2\\ &\vdots\\ Y_n &= \beta_0+\beta_1X_{n1}+\beta_2X_{n2}+...+\beta_pX_{np}+\varepsilon_n\end{aligned}$$

สามารถจัดอยู่ในรูปการกระทำของเมตริกซ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix}Y_1\\ Y_2\\ \vdots\\ Y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & X_{11} & \cdots & X_{1p}\\ 1 & X_{21} & \cdots & X_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & X_{n1} & \cdots & X_{np}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_p\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}$$

สำหรับความคลาดเคลื่อนสุ่มค่าคาดหวังและความแปรปรวนสามารถจัดในรูปเมตริกซ์และเวคเตอร์ได้ ดังนี้

เวคเตอร์ค่าคาดหวังของค่าความคาดเคลื่อนสุ่ม คือ

$$E(\boldsymbol{\varepsilon})=\begin{bmatrix}E(\varepsilon_1)\\ E(\varepsilon_2)\\ \vdots\\ E(\varepsilon_n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

เมตริกซ์ของความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนสุ่ม คือ

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} V(\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \dots & Cov(\varepsilon_1,\varepsilon_n) \\ Cov(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & V(\varepsilon_2) & \dots & Cov(\varepsilon_2,\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Cov(\varepsilon_1,\varepsilon_n) & Cov(\varepsilon_2,\varepsilon_n) & \dots & V(\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \sigma^2\mathbf{I}$$

$Cov(\varepsilon_i,\varepsilon_j) = 0; \forall i \neq j$ และ $\mathbf{I}$ เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$

เมตริกซ์ $\mathbf{X}$ เป็นเมตริกซ์ของค่าคงที่ที่มีสดมภ์แรงค์เต็ม (full column rank)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$E(\mathbf{Y}) = E(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$
$$\mathbf{V}(\mathbf{Y}) = \mathbf{E}[\mathbf{Y} - \mathbf{E}(\mathbf{Y})][\mathbf{Y} - \mathbf{E}(\mathbf{Y})]' = \sigma^2\mathbf{I}$$

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\boldsymbol{\beta}$ เริ่มต้นจากการหาค่าผลรวมความผิดพลาดกำลังสอง (Sum Square Error) ที่น้อยที่สุดในเทอมเมตริกซ์ จาก $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$
$$\text{หรือ} \quad \mathbf{S}(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n}\left[Y_t - \mathbf{X}_t'\boldsymbol{\beta}\right]^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

ทำการหาอนุพันธ์บางส่วนของ $\mathbf{S}(\boldsymbol{\beta})$ เทียบกับ $\boldsymbol{\beta}$

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}}\mathbf{S}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$$
$$-2\mathbf{X}'\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$$
$(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$ เรียกว่า สมการปกติ (Normal Equation)

$$\therefore \quad \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นดังนี้

$$f(y_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(y_t - f(\mathbf{X}_t;\boldsymbol{\beta}))^2}{\sigma^2}} \qquad ;-\infty < y_t < \infty, \sigma > 0$$

สำหรับกรณีฟังก์ชันการถดถอยแบบพหุ $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + ... + \beta_p X_{tp} + \varepsilon_t$ หรือ $y_t = \mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t$ ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น ดังนี้

$$f(y_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y_t-(\beta_0+\beta_1 X_t+...+\beta_p X_{tp}))^2}{\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y_t-\mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta})'(Y_t-\mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta})}{\sigma^2}}$$

$$;-\infty < y_t < \infty, \sigma > 0$$

เราสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p$ โดยวิธีสภาวะสูงสุด (Maximum Likelihood Estimator) โดยฟังก์ชันสภาวะสูงสุด คือ

$$L = \prod_{t=1}^{n} \left[\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_t - \mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta})'(Y_t - \mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta})}{\sigma^2} \right) \right]$$

$$L = \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right)$$

ใส่ล็อกฐานธรรมชาติกับฟังก์ชันสภาวะสูงสุด

$$\ln(L) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$\frac{\partial ln(L)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = 0$$

$$\left(-2\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

ในบทเรียนนี้สนใจเฉพาะวิธีการกำลังสองน้อยที่สุด เมื่อทำการกระจาย $\mathbf{S}(\boldsymbol{\beta})$ ออก

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\boldsymbol{\beta}) &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\ &= \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)'\left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right) \\ &= \left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)'\left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) + \left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right)'\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right)\end{aligned}$$

แต่

$$\begin{aligned}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right)'\mathbf{X}'\left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) &= \left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right)'(\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= \left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right)'\left(\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\right) \\ &= \left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right)'\left(\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \mathbf{X}'\mathbf{Y}\right) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

เราสามารถเขียน

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) + (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})' (\mathbf{X}'\mathbf{X})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$$
$$= \mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{c}'\mathbf{c}$$

โดยที่ $\mathbf{c} = \mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$

$$\mathbf{c}'\mathbf{c} = \sum_{t=1}^{n} c_t^2 \geq 0$$

ดังนั้น $\mathbf{S}(\boldsymbol{\beta}) \geq \mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$

การสร้างตัวแบบประมาณการถดถอยอย่างง่ายโดยอาศัยเมตริกซ์

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \quad ; \quad t = 1,2,3,\ldots,n$$

ที่แต่ละค่าของข้อมูลจะพบว่ามีตัวแบบการถดถอยดังนี้

$$Y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon_1$$
$$Y_2 = \beta_0 + \beta_1 X_2 + \varepsilon_2$$
$$Y_3 = \beta_0 + \beta_1 X_3 + \varepsilon_3$$
$$\vdots$$
$$Y_n = \beta_0 + \beta_1 X_n + \varepsilon_n$$
$$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)'$$
$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1)'$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)'$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ : & : \\ : & : \\ 1 & X_n \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} n & \sum_{t=1}^{n} X_t \\ \sum_{t=1}^{n} X_t & \sum_{t=1}^{n} X_t^2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} Y_t \\ \sum_{t=1}^{n} X_t Y_t \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 2 จากตัวอย่างที่ 1

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X_t	23	24	25	26	32	25	21	26	28	21	29	30
Y_t	120	122	126	128	130	129	120	126	128	135	136	139

จงสร้างตัวแบบประมาณการถดถอยโดยใช้วิธีการเมตริกซ์

วิธีทำ

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} n & \sum_{t=1}^{n} x_t \\ \sum_{t=1}^{n} x_t & \sum_{t=1}^{n} x_t^2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} x_t y_t \end{bmatrix}$$

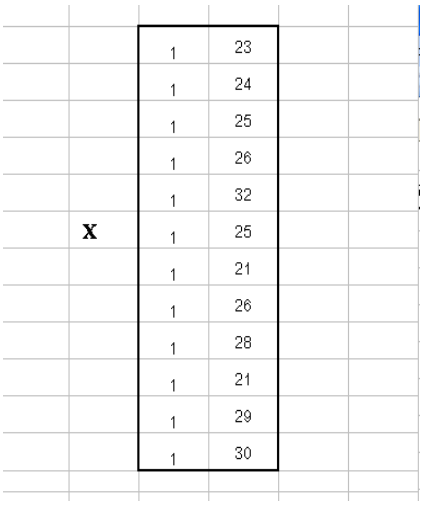
$$\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} 12 & 310 \\ 310 & 8138 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X'Y} = \begin{bmatrix} 1539 \\ 39880 \end{bmatrix}$$

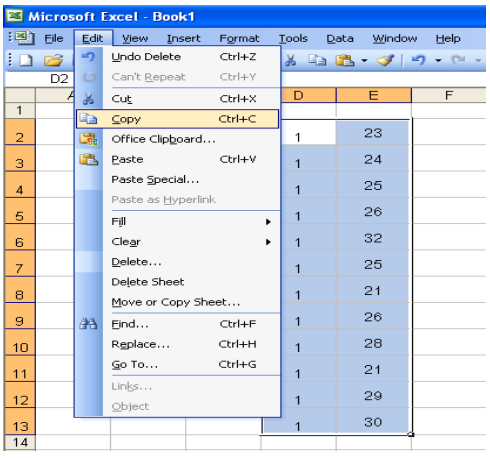
$$(\mathbf{X'X})^{-1} = \begin{bmatrix} 5.23 & -0.199 \\ -0.199 & 0.0077 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 103.8445 \\ 0.9447 \end{bmatrix}$$

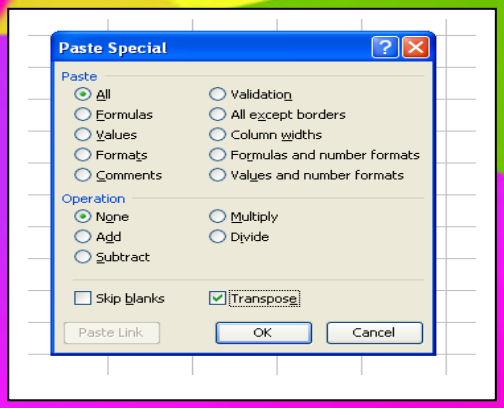
$$\therefore \quad \hat{Y}_t = 103.8445 + 0.9447 X_t$$

$\mathbf{X}'\ \mathbf{X}$ ใช้ Microsoft Excel



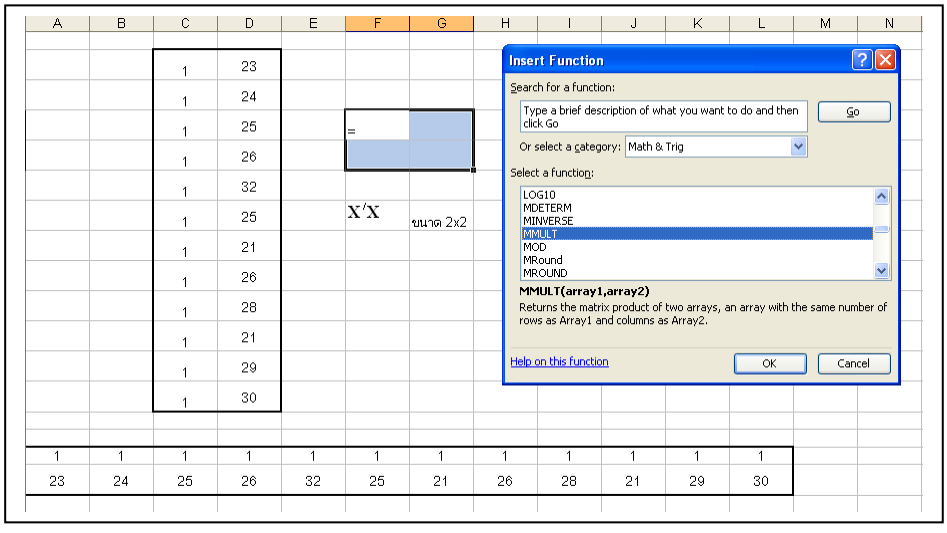


เลื่อนพอยท์เตอร์ไปที่อื่นนอกเมตริกซ์ X และใช้คำสั่ง Paste Special และ Transpose และ ok

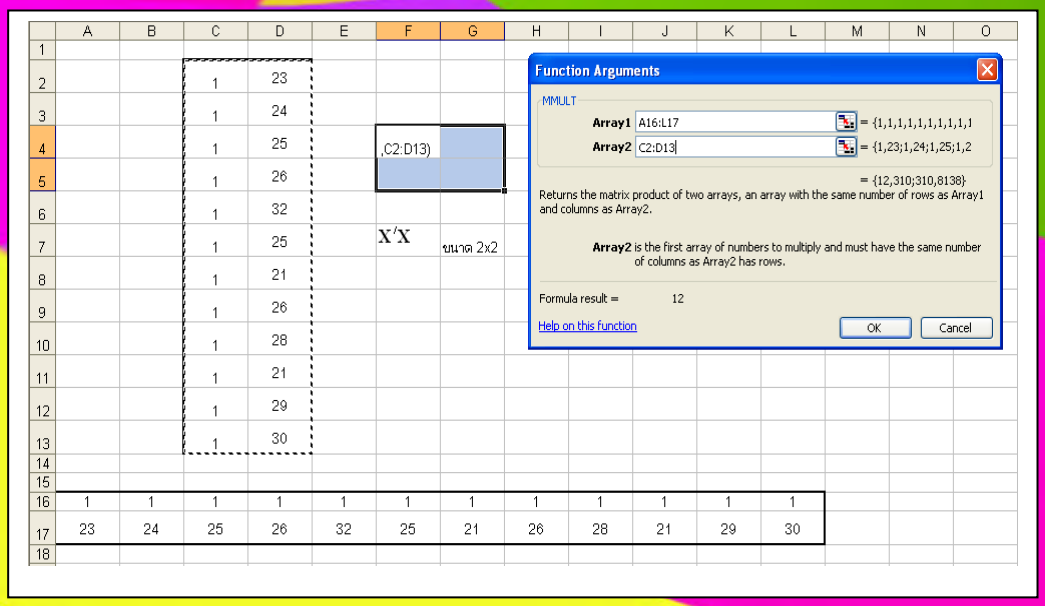


X'												
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	23	24	25	26	32	25	21	26	28	21	29	30

การคำนวณเมตริกซ์ $X'X$ ใช้ฟังก์ชันใน Category Math&Trig โดยใช้คำสั่ง MMULT(การคูณเมตริกซ์) เมตริกซ์ X' ในที่นี้มีมิติขนาด 2×12 และเมตริกซ์ X ในที่นี้มีมิติขนาด 12×2 ดังนั้น $X'X$ มีมิติขนาด 2×2 ต้องทำการจองพื้นที่ใน Worksheet ขนาด 2 แถว และ 2 สดมภ์

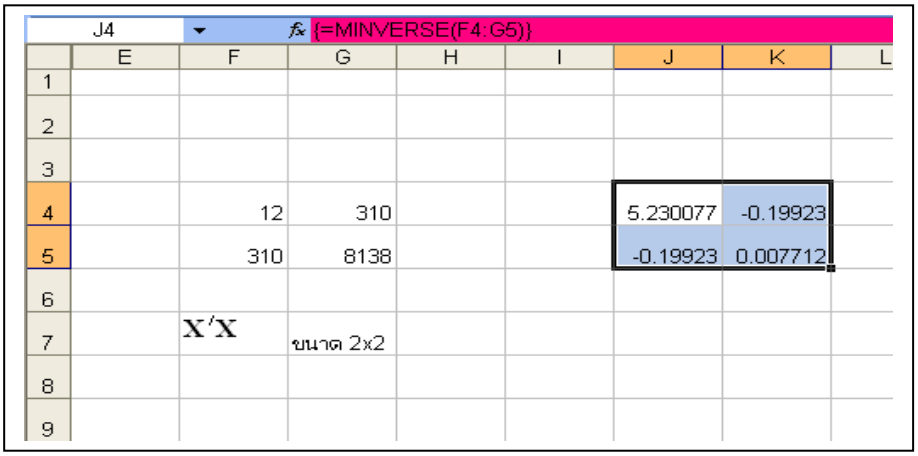


จากนั้น กดปุ่ม ok และใส่ค่า Array1 คือเมตริกซ์ $\mathbf{X}'$ และ Array2 คือเมตริกซ์ $\mathbf{X}$ จากนั้นกดปุ่ม Ctrl + Shift & Enter พร้อมกัน



จากนั้นหาค่าเมตริกซ์ $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ โดยใช้คำสั่ง MINVERSE $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ มีมิติขนาด 2×2 ดังนั้น $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ มีมิติขนาด 2×2 ต้องทำการจองพื้นที่ในWorksheet ขนาด 2 แถว และ 2 สดมภ์ ใช้คำสั่ง MINVERSE(F4:G5) จากนั้นกดปุ่ม Ctrl + Shift & Enter พร้อมกัน ในทำนองเดียวกันการคำนวณหา $\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ ก็กระทำเช่นเดียวกัน หาค่า

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(p+1)\times 1} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}_{(p+1)\times(p+1)} \left(\mathbf{X}'\mathbf{Y}\right)_{(p+1)\times 1}$$

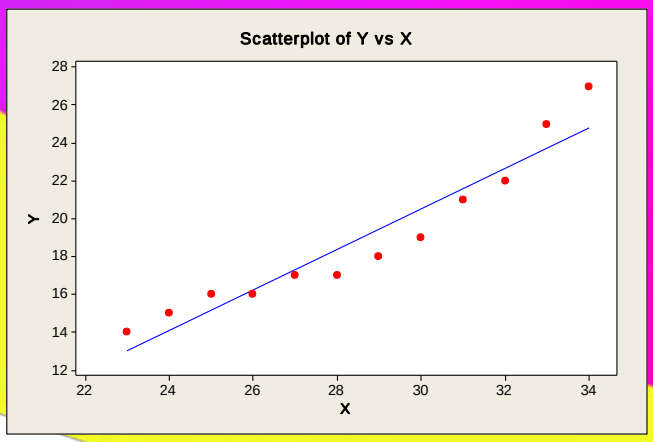


ตัวอย่างที่ 3 จากค่าสังเกตต่อไปนี้ของตัวแปร X และ Y

x	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
y	14	15	16	16	17	17	18	19	21	22	25	27

จงสร้างตัวแบบประมาณการถดถอยของ Y บน X โดยอาศัยวิธีการเมตริกซ์

วิธีทำ สร้างกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง X และ Y เป็นจุดต่างๆ ที่ปรากฏและทดลองลากเส้นสมมติความสัมพันธ์ระหว่าง X และ Y ดังรูปต่อไปนี้



ดังนั้นตัวแบบการถดถอย คือ $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$ ต้องประมาณค่า β_0 และ β_1

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} n & \sum_{t=1}^{n} x_t \\ \sum_{t=1}^{n} x_t & \sum_{t=1}^{n} x_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 342 \\ 342 & 9890 \end{bmatrix}$$

$$\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 5.763 & -0.199 \\ -0.199 & 0.007 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} Y_t \\ \sum_{t=1}^{n} X_t Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 227 \\ 6623 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.763 & -0.199 \\ -0.199 & 0.007 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 227 \\ 6623 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11.676 \\ 1.0734 \end{bmatrix}$$