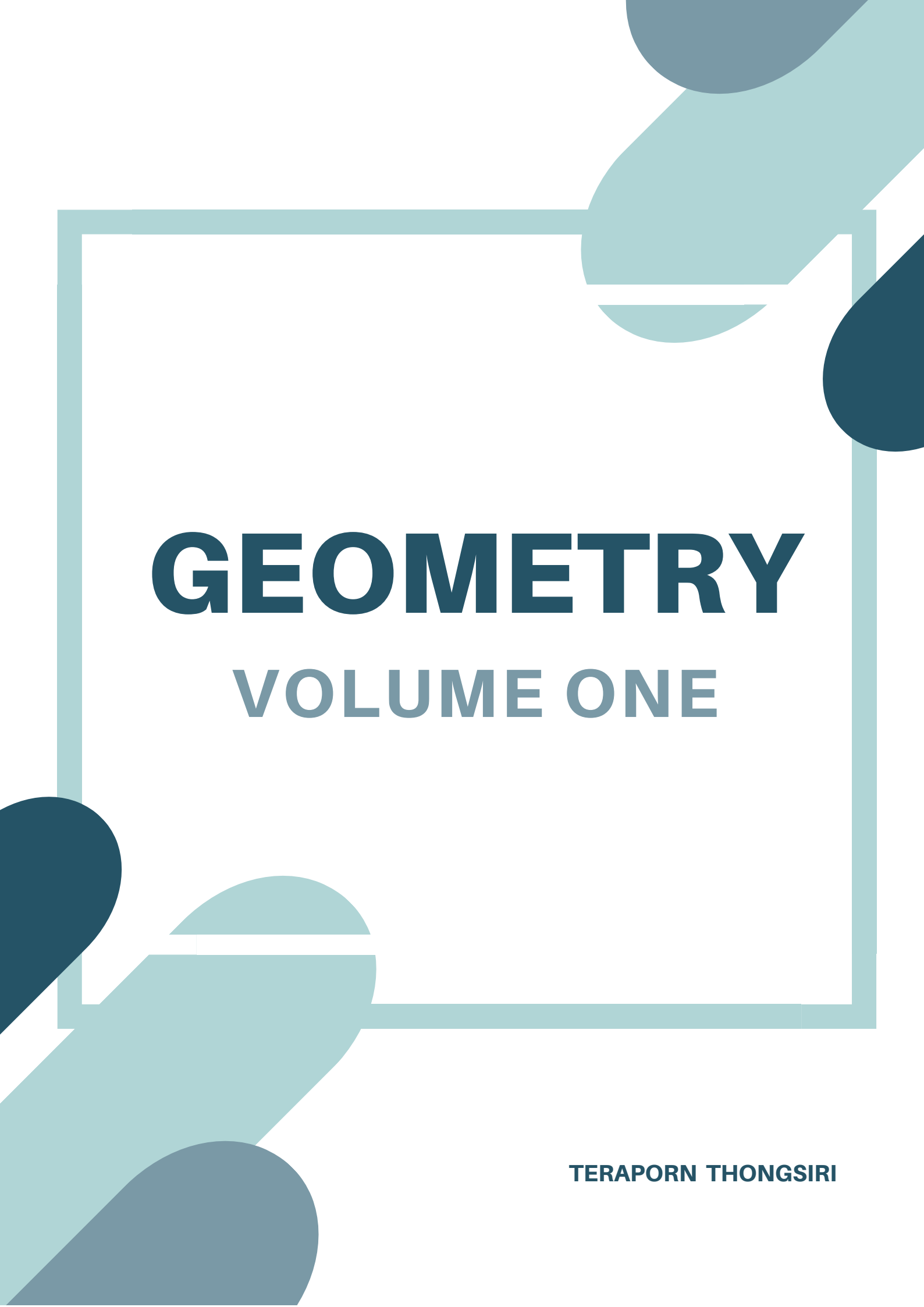




# **GEOMETRY**

## **VOLUME ONE**

**TERAPORN THONGSIRI**



TUTOR

สวัสดีครับ ผมหนึ่งในทีมงานของ TBTUTOR  
ต้องขอขอบคุณในการสนับสนุนหนังสือ  
ของ TBTUTOR เป็นอย่างมากครับ  
ผมหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์กับคุณมากนะครับ  
สามารถดูหนังสือเล่มอื่นหรือข้อมูลต่าง ๆ ของเราได้ตามนี้เลยนะ  
ครับ



TBTUTOR

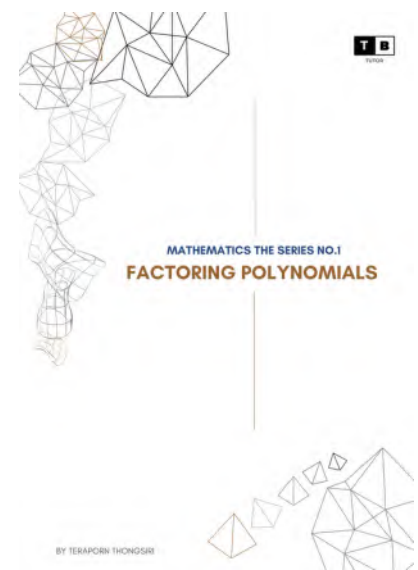
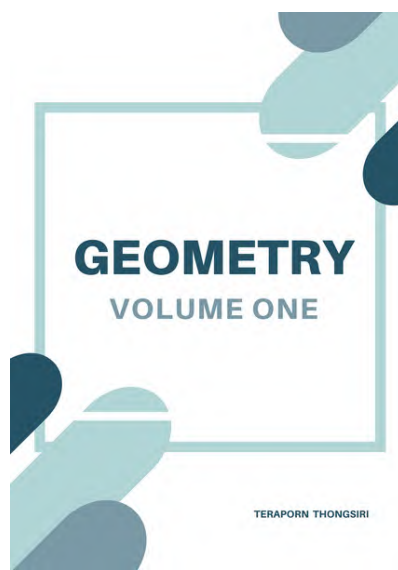


TBTUTOR



[sites.google.com/view/tbtutor](https://sites.google.com/view/tbtutor)

## หนังสือในเครือของ TBTUTOR



# คำนำ

หนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนได้จัดทำขึ้นมาเพราะผู้แต่งได้รับเป็นวิทยากรในโครงการที่เกี่ยวกับการสอบแข่งขันในค่ายโอลิมปิกวิชาการ สอวน. ในวิชาคณิตศาสตร์บ่อย ๆ ส่วนใหญ่จะได้สอนในหัวข้อของเรขาคณิต ผู้เขียนได้แต่งขึ้นมาจากประสบการณ์ของตัวเองได้รับการสอนในโครงการต่าง ๆ มา ซึ่งในหนังสือนี้ได้รวบรวมเนื้อหาเกี่ยวกับหัวข้อเรขาคณิตในสองมิติ

หนังสือเล่มนี้ประกอบไปด้วย 7 บท บทที่ 1 กล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่ควรทราบและนำไปใช้การพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยแบ่งออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกเราจะกล่าวถึงระบบจำนวนจริงและสมบัติที่นำไปใช้ รวมทั้งกล่าวถึงอัตราส่วนและเอกลักษณ์ทางพีชคณิต ส่วนหลังจะกล่าวถึงการพิสูจน์ในรูปแบบต่าง ๆ ที่นำไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ทางเรขาคณิต

ในบทที่ 2 เรากล่าวถึงคำนิยามและคำอธิบายของรูปเรขาคณิตหนึ่งมิติและสองมิติ ในรูปแบบต่าง ๆ และคุณสมบัติเบื้องต้นของรูปเรขาคณิต

ในบทที่ 3 เรากล่าวถึงการเท่ากันทุกประการของรูปหลายเหลี่ยม และกล่าวถึงการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมในรูปแบบต่าง ๆ รวมถึงการนำไปใช้ในเกิดทฤษฎีบทที่สำคัญเป็นอย่างมาก บทนี้ถือเป็นบทที่สำคัญบทหนึ่งในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นมาและลักษณะเฉพาะของรูปเรขาคณิตต่าง ๆ โดยไม่ผ่านการนิยามของรูปเรขาคณิตนั้น

ในบทที่ 4 เรากล่าวถึงความยาวเส้นรอบรูปและพื้นที่ของรูปเรขาคณิตต่าง ๆ บทนี้ถือว่าเป็นบทที่สำคัญบทหนึ่งที่สามารถนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้เป็นอย่างมาก

ในบทที่ 5 เรากล่าวถึงความคล้ายของรูปหลายเหลี่ยม และความคล้ายของรูปสามเหลี่ยมในรูปแบบต่าง ๆ รวมทั้งปัญหาที่น่าสนใจที่เกี่ยวกับความคล้าย นั่นคือ ปัญหาการไขว้กันของกระดี่

ในบทที่ 6 เรากล่าวถึงทฤษฎีที่สำคัญของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากคือทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะกล่าวถึงการใช้งานของทฤษฎีบทพีทาโกรัสและทฤษฎีอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยม รวมทั้งการระบุสามเหลี่ยมที่มีความลักษณะเฉพาะที่จะนำไปใช้ในการแก้ปัญหาลักษณะต่าง ๆ ได้ดี

ในบทที่ 7 เราจะรวบรวมข้อสอบและวิธีทำจากการแข่งขันในทางวิชาคณิตศาสตร์ต่าง ๆ พร้อมทั้งเฉลย เพื่อให้ผู้อ่านได้ศึกษาวิธีการและนำไปใช้ในการแก้ปัญหาลักษณะอื่นได้

---

จากทั้ง 7 บทนี้ ผู้เขียนยังมีความตั้งใจจะเขียนในเรื่องอื่น ๆ ด้วย อย่างเช่น ทฤษฎีของ วงกลม พังก์ชันตรีโกณมิติ โปรดได้ติดตามในเล่มที่ 2

ส่วนหนังสือเล่มนี้ หากมีผิดพลาดประการใด ต้องขออภัยใน ณ ที่นี้ หวังว่าหนังสือเล่มนี้จะ เป็นประโยชน์ ต่อผู้อ่านไม่มากนักน้อย

ธีรพร ทองศิริ

# สัญลักษณ์

|                                                     |     |                                         |
|-----------------------------------------------------|-----|-----------------------------------------|
| $\overleftrightarrow{AB}$                           | แทน | เส้นตรง $AB$                            |
| $\overline{AB}$                                     | แทน | ส่วนของเส้นตรง $AB$                     |
| $m(\overline{AB}), AB$                              | แทน | ความยาวของส่วนของเส้นตรง $AB$           |
| $\overrightarrow{AB}$                               | แทน | รังสี $AB$                              |
| $\hat{A}BC$                                         | แทน | มุม $ABC$                               |
| $m(\hat{A}BC)$                                      | แทน | ขนาดของมุม $ABC$                        |
| $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$     | แทน | เส้นตรง $AB$ และเส้นตรง $CD$ ตั้งฉากกัน |
| $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ | แทน | เส้นตรง $AB$ และเส้นตรง $CD$ ขนานกัน    |
| $\triangle ABC$                                     | แทน | รูปสามเหลี่ยม $ABC$                     |
| $\square ABCD$                                      | แทน | รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$                    |
| $A \cong B$                                         | แทน | $A$ และ $B$ เท่ากันทุกประการ            |
| $[A]$                                               | แทน | พื้นที่ของรูป $A$                       |
| $A \sim B$                                          | แทน | $A$ และ $B$ คล้ายกัน                    |

# สารบัญ

|          |                                                  |           |
|----------|--------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>ความรู้เบื้องต้น</b>                          | <b>1</b>  |
| 1.1      | ระบบจำนวนจริง . . . . .                          | 1         |
| 1.1.1    | ตัวดำเนินการและสมบัติ . . . . .                  | 2         |
| 1.1.2    | อสมการ . . . . .                                 | 4         |
| 1.1.3    | รากที่สอง . . . . .                              | 5         |
| 1.2      | อัตราส่วนและสัดส่วน . . . . .                    | 6         |
| 1.3      | เอกลักษณ์ทางพีชคณิต . . . . .                    | 7         |
| 1.4      | การพิสูจน์ . . . . .                             | 8         |
| 1.4.1    | การพิสูจน์โดยตรง . . . . .                       | 9         |
| 1.4.2    | การพิสูจน์ทางอ้อม . . . . .                      | 9         |
| 1.4.3    | การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง . . . . .                | 10        |
| 1.4.4    | การพิสูจน์โดยการแจงกรณี . . . . .                | 10        |
| 1.4.5    | การพิสูจน์ข้อความที่สมมูลกัน . . . . .           | 11        |
| 1.4.6    | การพิสูจน์โดยยกตัวอย่างค้าน . . . . .            | 12        |
| 1.4.7    | การพิสูจน์ด้วยตารางสองคอลัมน์ . . . . .          | 12        |
| 1.4.8    | การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ . . . . .      | 13        |
| 1.5      | แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                        | 16        |
| <b>2</b> | <b>ความรู้เบื้องต้นทางเรขาคณิต</b>               | <b>19</b> |
| 2.1      | จุด เส้นตรง ระนาบ ส่วนของเส้นตรง รังสี . . . . . | 19        |
| 2.2      | มุม . . . . .                                    | 20        |
| 2.3      | เส้นขนาน . . . . .                               | 24        |
| 2.4      | รูปสามเหลี่ยม . . . . .                          | 28        |
| 2.5      | รูปสี่เหลี่ยม . . . . .                          | 33        |
| 2.6      | รูปหลายเหลี่ยม . . . . .                         | 36        |

|          |                                                           |            |
|----------|-----------------------------------------------------------|------------|
| 2.7      | แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                                 | 42         |
| <b>3</b> | <b>การเท่ากันทุกประการ</b>                                | <b>47</b>  |
| 3.1      | การเท่ากันทุกประการในรูปเรขาคณิต . . . . .                | 47         |
| 3.2      | การเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม . . . . .             | 49         |
| 3.2.1    | การเท่ากันทุกประการแบบด้าน - ด้าน - ด้าน . . . . .        | 50         |
| 3.2.2    | การเท่ากันทุกประการแบบด้าน - มุม - ด้าน . . . . .         | 52         |
| 3.2.3    | การเท่ากันทุกประการแบบมุม - ด้าน - มุม . . . . .          | 54         |
| 3.2.4    | การเท่ากันทุกประการแบบมุม - มุม - ด้าน . . . . .          | 56         |
| 3.2.5    | การเท่ากันทุกประการแบบฉาก - ด้าน - ด้าน . . . . .         | 58         |
| 3.3      | สมบัติของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม . . . . .          | 61         |
| 3.3.1    | สมบัติของรูปสามเหลี่ยม . . . . .                          | 61         |
| 3.3.2    | สมบัติของรูปสี่เหลี่ยม . . . . .                          | 67         |
| 3.3.3    | ทฤษฎีบทที่สำคัญของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม . . . . . | 75         |
| 3.4      | แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                                 | 77         |
| <b>4</b> | <b>เส้นรอบรูปและพื้นที่</b>                               | <b>81</b>  |
| 4.1      | เส้นรอบรูป . . . . .                                      | 81         |
| 4.2      | พื้นที่ . . . . .                                         | 84         |
| 4.2.1    | สี่เหลี่ยมมุมฉาก . . . . .                                | 84         |
| 4.2.2    | สี่เหลี่ยมด้านขนาน . . . . .                              | 87         |
| 4.2.3    | สี่เหลี่ยมคางหมู . . . . .                                | 90         |
| 4.2.4    | สี่เหลี่ยมรูปร่าง . . . . .                               | 91         |
| 4.3      | สมบัติของพื้นที่ . . . . .                                | 93         |
| 4.4      | แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                                 | 98         |
| <b>5</b> | <b>ความคล้าย</b>                                          | <b>105</b> |
| 5.1      | ความคล้ายในรูปหลายเหลี่ยม . . . . .                       | 105        |
| 5.2      | สามเหลี่ยมคล้าย . . . . .                                 | 107        |
| 5.2.1    | สามเหลี่ยมคล้ายแบบมุม - มุม - มุม . . . . .               | 108        |
| 5.2.2    | สามเหลี่ยมคล้ายแบบมุม - มุม . . . . .                     | 110        |
| 5.2.3    | สามเหลี่ยมคล้ายแบบด้าน - ด้าน - ด้าน . . . . .            | 112        |
| 5.2.4    | สามเหลี่ยมคล้ายแบบด้าน - มุม - ด้าน . . . . .             | 114        |

|          |                                                  |            |
|----------|--------------------------------------------------|------------|
| 5.3      | คุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย . . . . .            | 115        |
| 5.4      | ปัญหาการไขว้กันของกระได . . . . .                | 118        |
| 5.4.1    | การพับกระดาษ . . . . .                           | 119        |
| 5.4.2    | ปัญหาการไขว้กันของกระไดในรูปสามเหลี่ยม . . . . . | 120        |
| 5.5      | แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                        | 123        |
| <b>6</b> | <b>ทฤษฎีบทพีทาโกรัส</b>                          | <b>129</b> |
| 6.1      | ทฤษฎีบทพีทาโกรัสกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก . . . . . | 129        |
| 6.2      | บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส . . . . .              | 131        |
| 6.3      | เลขชุดพีทาโกรัส . . . . .                        | 136        |
| 6.4      | สามเหลี่ยมมุมฉากที่มีลักษณะเฉพาะ . . . . .       | 137        |
| 6.5      | สูตรของเฮรอน . . . . .                           | 140        |
| 6.6      | แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                        | 145        |
| <b>7</b> | <b>โจทย์ปัญหาสำหรับการแข่งขัน</b>                | <b>155</b> |
| 7.1      | โจทย์ปัญหาของรูปสามเหลี่ยม . . . . .             | 155        |
| 7.2      | เส้นรอบรูปและพื้นที่ . . . . .                   | 157        |
| 7.3      | ความคล้าย . . . . .                              | 160        |
| 7.4      | ทฤษฎีบทพีทาโกรัส . . . . .                       | 167        |
| 7.5      | แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                        | 170        |



# Chapter 1

## ความรู้เบื้องต้น

ในบทแรกเราจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่จะนำไปใช้ในการพิสูจน์และแก้ไขปัญหาทางเรขาคณิต โดยจะแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ หัวข้อพีชคณิตและหัวข้อการพิสูจน์ โดยในหัวข้อพีชคณิต เราจะศึกษาในคุณสมบัติของระบบจำนวนจริงที่สามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหหรือการพิสูจน์ ทฤษฎีต่าง ๆ ได้ และในหัวข้อการพิสูจน์ เราฝึกเขียนการพิสูจน์ทฤษฎีต่าง ๆ ในเบื้องต้น

### 1.1 ระบบจำนวนจริง

ในระบบจำนวนจริง (Real Number System) จะประกอบไปด้วยสองส่วนนั้นคือ จำนวนตรรกยะ (Rational Number) และจำนวนอตรรกยะ (Irrational Number)

- จำนวนตรรกยะ คือจำนวนที่เขียนให้อยู่ในรูปของเศษส่วน  $\frac{m}{n}$  โดยที่  $m$  และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มและ  $n \neq 0$   
จำนวนตรรกยะนี้จะประกอบไปด้วย จำนวนเต็ม ทศนิยมรู้จบและทศนิยมไม่รู้จบแบบซ้ำ
- จำนวนอตรรกยะ คือจำนวนจริงใดก็ตามที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ ตัวอย่างเช่น  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$

ต่อมาเราศึกษาสมบัติของดำเนินการบนจำนวนจริงทั้งสองนั้นคือการบวกและการคูณ

### 1.1.1 ตัวดำเนินการและสมบัติ

ในระบบจำนวนจริงนั้น มีตัวดำเนินการ (Operation) บนระบบจำนวนจริงสองตัว นั่นคือ การบวก และการคูณ ในส่วนนี้ เรากล่าวถึงสมบัติของตัวดำเนินการการบวกและการคูณซึ่งมีดังนี้

1. สมบัติปิดสำหรับการบวก (Closure property under addition)

ถ้า  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงแล้ว  $a + b$  เป็นจำนวนจริง

2. สมบัติปิดสำหรับการคูณ (Closure property under multiplication)

ถ้า  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงแล้ว  $ab$  เป็นจำนวนจริง

3. สมบัติสลับที่สำหรับการบวก (Commutative Property under addition)

$a + b = b + a$  สำหรับทุกจำนวนจริง  $a$  และ  $b$

4. สมบัติสลับที่สำหรับการคูณ (Commutative Property under multiplication)

$ab = ba$  สำหรับทุกจำนวนจริง  $a$  และ  $b$

5. สมบัติเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวก (Associative Property under addition)

$(a + b) + c = a + (b + c)$  สำหรับทุกจำนวนจริง  $a, b$  และ  $c$

6. สมบัติเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณ (Associative Property under multiplication)

$(ab)c = a(bc)$  สำหรับทุกจำนวนจริง  $a, b$  และ  $c$

7. สมบัติการมีเอกลักษณ์สำหรับการบวก (Identity Property under addition)

$a + 0 = a = 0 + a$  สำหรับทุกจำนวนจริง  $a$

8. สมบัติการมีเอกลักษณ์สำหรับการคูณ (Identity Property under multiplication)

$a \times 1 = a = 1 \times a$  สำหรับทุกจำนวนจริง  $a$

9. สมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการบวก (Inverse Property under addition)

สำหรับทุกจำนวนจริง  $a$  มีจำนวนจริง  $-a$  ที่ทำให้  $a + (-a) = 0 = (-a) + a$

10. สมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการคูณ (Inverse Property under multiplication)

สำหรับทุกจำนวนจริง  $a$  ที่ไม่เท่ากับศูนย์ จะมีจำนวนจริง  $a^{-1}$  ที่ทำให้  $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$

11. สมบัติการแจกแจง (Distributive Property)

$a(b + c) = ab + ac$  สำหรับทุกจำนวนจริง  $a, b$  และ  $c$

ในส่วนถัดมา เรากล่าวถึงสมบัติการเท่ากันของเครื่องหมาย = ซึ่งเป็นสมบัติที่ใช้ในการพิสูจน์เป็นอย่างมาก

กำหนดให้  $a, b, c$  และ  $x$  เป็นจำนวนจริงใดๆ

**1. สมบัติสะท้อน (Reflexive Property)**

$$a = a$$

**2. สมบัติสมมาตร (Symmetric Property)**

$$\text{ถ้า } a = b \text{ แล้ว } b = a$$

**3. สมบัติถ่ายทอด (Transitive Property)**

$$\text{ถ้า } a = b \text{ และ } b = c \text{ แล้ว } a = c$$

**4. สมบัติการบวกที่เท่ากัน (Addition Property)**

$$\text{ถ้า } a = b \text{ แล้ว } a + c = b + c$$

**5. สมบัติการคูณที่เท่ากัน (Multiplication Property)**

$$\text{ถ้า } a = b \text{ แล้ว } ac = bc$$

**6. สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก (Cancellation law of Addition)**

$$\text{ถ้า } a + c = b + c \text{ แล้ว } a = b$$

**7. สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ (Cancellation law of Multiplication)**

$$\text{ถ้า } ac = bc \text{ และ } c \neq 0 \text{ แล้ว } a = b$$

**8. สมบัติการแทนที่ (Substitution Property)**

$$\text{ถ้า } a = b \text{ แล้วเราสามารถแทนที่นิพจน์ที่มี } a \text{ ได้ด้วย } b$$

## 1.1.2 อสมการ

ในส่วนนี้ เรากล่าวถึงความไม่เท่ากัน โดยมีเครื่องหมายของการเปรียบเทียบ  $>, <, \leq, \geq, \neq$  ก่อนอื่นเราจะเปรียบเทียบจำนวนสองจำนวนได้โดยใช้กฎไตรวิภาค

**กฎไตรวิภาค (Law of Trichotomy)**

กำหนดให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว สามข้อความต่อไปนี้จะเป็นจริงเพียงหนึ่งข้อความเท่านั้น

1.  $a > b$

2.  $a = b$

3.  $a < b$

ถัดมา เรากล่าวถึงสมบัติของอสมการ ซึ่งเป็นอสมการที่สำคัญในการพิสูจน์อสมการที่ซับซ้อนมากขึ้นและนำไปใช้ได้อย่างมากมาย กำหนดให้  $a, b, c$  เป็นจำนวนจริงใดๆ

## • สมบัติการบวกที่เท่ากัน (Addition Property)

ถ้า  $a < b$  แล้ว  $a + c < b + c$

ถ้า  $a \leq b$  แล้ว  $a + c \leq b + c$

ถ้า  $a > b$  แล้ว  $a + c > b + c$

ถ้า  $a \geq b$  แล้ว  $a + c \geq b + c$

## • สมบัติการคูณที่เท่ากัน (Multiplication Property)

สำหรับ  $c$  เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

ถ้า  $a < b$  และ  $c > 0$  แล้ว  $ac < bc$

ถ้า  $a \leq b$  และ  $c > 0$  แล้ว  $ac \leq bc$

ถ้า  $a > b$  และ  $c > 0$  แล้ว  $ac > bc$

ถ้า  $a \geq b$  และ  $c > 0$  แล้ว  $ac \geq bc$

สำหรับ  $c$  เป็นจำนวนจริงลบ จะได้ว่า

ถ้า  $a < b$  และ  $c < 0$  แล้ว  $ac > bc$

ถ้า  $a \leq b$  และ  $c < 0$  แล้ว  $ac \geq bc$

ถ้า  $a > b$  และ  $c < 0$  แล้ว  $ac < bc$

ถ้า  $a \geq b$  และ  $c < 0$  แล้ว  $ac \leq bc$

**อสมการที่สำคัญ**

• ถ้า  $a + c = b$  และ  $c > 0$  แล้ว  $a < b$

• ถ้า  $a + c = b$  และ  $c < 0$  แล้ว  $a > b$

### 1.1.3 รากที่สอง

ในส่วนนี้จะกล่าวถึง รากที่สองของจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ ซึ่งนำไปใช้ในทฤษฎีพีทาโกรัส เป็นส่วนใหญ่ เราจึงได้ศึกษาโดยให้  $a$  เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ เรากล่าวว่า  $x$  เป็นรากที่สอง (Square Root) ของ  $a$  ก็ต่อเมื่อ

$$x^2 = a$$

**ตัวอย่างที่ 1.1.** รากที่สองของ 4 เท่ากับ 2 และ  $-2$  เพราะว่า  $2^2 = 4$  และ  $(-2)^2 = 4$

รากที่สองของ 0.0016 เท่ากับ 0.04 และ  $-0.04$  เพราะว่า  $0.04^2 = 0.0016$  และ  $(-0.04)^2 = 0.0016$

จากการนิยามเราจะได้ว่า รากที่สองของจำนวนจริงบวกใด ๆ จะมีสองค่า เราจะให้สัญลักษณ์ดังนี้ เมื่อ  $a$  เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

- $\sqrt{a}$  แทนรากที่สองของ  $a$  ที่เป็นจำนวนบวก และ
- $-\sqrt{a}$  แทนรากที่สองของ  $a$  ที่เป็นจำนวนลบ

และนิยาม  $\sqrt{0} = 0$

#### สมบัติของรากที่สอง

กำหนดให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์

1.  $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
2.  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  เมื่อ  $b \neq 0$
3.  $(\sqrt{a})^2 = a$
4.  $\sqrt{x^2} = |x|$  เมื่อ  $x$  เป็นจำนวนจริงใด ๆ

## 1.2 อัตราส่วนและสัดส่วน

ในตอนนี้จะกล่าวถึง อัตราส่วนและสัดส่วน ซึ่งนำไปใช้ในเรื่องความคล้ายเป็นส่วนใหญ่ เราจึงควรรู้บทนิยามและสมบัติทั่วไปของอัตราส่วนและสัดส่วน

กำหนดให้  $a, b, c$  และ  $d$  เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ เราใช้สัญลักษณ์  $a:b$  แทน  $\frac{a}{b}$  อ่านว่า อัตราส่วน เอ ต่อ บี และเราใช้สัญลักษณ์  $a:b = c:d$  แทนข้อความ  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

### สมบัติของสัดส่วน

กำหนดให้  $a, b, c, d, x, y$  และ  $k$  เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

1.  $a:b = c:d$  ก็ต่อเมื่อ  $ad = bc$
2. ถ้า  $a:b = c:d$  แล้ว  $b:a = d:c$
3. ถ้า  $a:b = c:d$  และ  $c:d = x:y$  แล้ว  $a:b = x:y$
4. ถ้า  $a:x = b:x$  แล้ว  $a = b$
5. ถ้า  $a:b = c:d$  แล้ว  $a:c = b:d$
6.  $a:b = ka:kb$
7. ถ้า  $a:b = x:y$  แล้ว  $(a+b):b = (x+y):y$
8. ถ้า  $a:b = x:y$  แล้ว  $(a-b):b = (x-y):y$
9. ถ้า  $a:b = x:y$  แล้ว  $(a+b):(a-b) = (x+y):(x-y)$

**ทฤษฎีบท 1.** กำหนดให้  $n$  เป็นจำนวนนับ และ  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  และ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า  $x_1:y_1 = x_2:y_2 = x_3:y_3 = \dots = x_n:y_n$  แล้ว

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n}{a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + \dots + a_ny_n}$$

## 1.3 เอกลักษณ์ทางพีชคณิต

เราบทวนเอกลักษณ์ที่สำคัญและนำไปใช้ในการแก้ปัญหาดังต่อไปนี้ ได้ดีขึ้น โดยพิจารณาจากเอกลักษณ์ต่อไปนี้

ผลต่างกำลังสอง

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

กำลังสองสมบูรณ์

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

ผลต่างกำลังสาม

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

ผลบวกกำลังสาม

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

กำลังสามสมบูรณ์

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

กำลังสองสมบูรณ์สามพจน์

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2CA$$

กำลังสามสมบูรณ์สามพจน์

$$(A + B + C)^3 = A^3 + B^3 + C^3 + 3(AB + BC + CA)(A + B + C) - 3ABC$$

$$(A + B + C)^3 = A^3 + B^3 + C^3 + 3(A + B)(B + C)(C + A)$$

$$A^3 + B^3 + C^3 = (A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA) + 3ABC$$

จากเอกลักษณ์ที่ปรากฏข้างต้นทำให้เราได้ว่า

$$1. (A + B)^2 + (A - B)^2 = 2(A^2 + B^2)$$

$$2. (A + B)^2 - (A - B)^2 = 4AB$$

$$3. A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB$$

$$4. A^3 + B^3 = (A + B)^3 - 3AB(A + B)$$

$$5. A^3 - B^3 = (A - B)^3 - 3AB(A - B)$$

$$6. A^2 + B^2 + C^2 = (A + B + C)^2 - 2(AB + BC + CA)$$

$$7. A^3 + B^3 + C^3 = (A + B + C)^3 - 3(A + B + C)(AB + BC + CA) + 3ABC$$

$$8. \text{ ถ้า } A + B + C = 0 \text{ จะได้ว่า } A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$$

## 1.4 การพิสูจน์

ในการศึกษาวิชาเรขาคณิต เรามักจะเห็นคำว่า บทนิยาม อนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท คำพวกนี้เป็นหลักสำคัญในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์เพื่อให้เข้าใจได้ตรงกัน

- **อนิยาม (Undefined Term)** หมายถึง สิ่งที่ไม่สามารถให้ความหมายเฉพาะเจาะจงได้ แต่เข้าใจตรงกันได้ว่าเป็นสิ่งใด
- **บทนิยาม (Definition)** หมายถึง สิ่งที่ให้ความหมายหรือคำจำกัดความที่มีความเฉพาะเจาะจง
- **สัจพจน์ (Postulate)** หมายถึง ข้อความที่เป็นยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องผ่านการพิสูจน์
- **ทฤษฎีบท (Theorem)** หมายถึง ข้อความที่เป็นจริงโดยผ่านการพิสูจน์

และสิ่งหนึ่งที่เราจะเจอในทางคณิตศาสตร์นั้นคือ **ข้อคาดการณ์ (Conjecture)** หมายถึง ข้อความที่อาจจะเป็นจริงแต่ยังไม่สามารถพิสูจน์ได้

ในการเริ่มต้นของการพิสูจน์ เราควรทำความเข้าใจของบทนิยาม เพื่อใช้ในการอ้างเหตุผลในบทพิสูจน์ได้ดีขึ้น โดยเราจะยกตัวอย่างการพิสูจน์โดยผ่านบทนิยามดังนี้

**บทนิยาม 1.** ให้  $a$  เป็นจำนวนเต็มใด ๆ เรากล่าวว่า  $a$  เป็น **จำนวนคู่ (Even Number)** เมื่อเราสามารถหาจำนวนเต็ม  $k$  ที่ทำให้  $a = 2k$

**บทนิยาม 2.** ให้  $a$  เป็นจำนวนเต็มใด ๆ เรากล่าวว่า  $a$  เป็น **จำนวนคี่ (Odd Number)** เมื่อเราสามารถหาจำนวนเต็ม  $k$  ที่ทำให้  $a = 2k + 1$

**บทนิยาม 3.** ให้  $a$  และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มใด ๆ เรากล่าวว่า  $a$  หารด้วย  $n$  ลงตัว เมื่อเราสามารถหาจำนวนเต็ม  $k$  ที่ทำให้  $a = nk$



### 1.4.1 การพิสูจน์โดยตรง

**การพิสูจน์โดยตรง (Direct Proof)** คือการพิสูจน์ข้อความ "ถ้า  $p$  แล้ว  $q$ " โดยที่ให้อรรถาธิบายข้อความ  $p$  เป็นจริง แล้วใช้บทนิยาม อนุกรม ทฤษฎี สัจพจน์ หรือข้อเท็จจริงในการสรุปว่าข้อความ  $q$  เป็นจริง

**ตัวอย่างที่ 1.2.** กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า  $a$  เป็นจำนวนคู่ แล้ว  $a-1$  เป็นจำนวนคี่

**พิสูจน์** กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนคู่

จากบทนิยาม 1 เราจะได้ว่าจะมีจำนวนเต็ม  $k$  ที่ทำให้  $a = 2k$

เนื่องจาก  $k$  เป็นจำนวนเต็ม ทำให้ได้ว่า  $k-1$  เป็นจำนวนเต็มเช่นกัน และจาก

$$a-1 = 2k-1 = 2k-2+1 = 2(k-1)+1$$

โดยบทนิยาม 2 จะได้ว่า  $a-1$  เป็นจำนวนคี่

□

### 1.4.2 การพิสูจน์ทางอ้อม

**การพิสูจน์ทางอ้อมหรือการพิสูจน์แย้งสลับที่ (Contrapositive Proof)** คือการพิสูจน์ข้อความ "ถ้า  $p$  แล้ว  $q$ " โดยใช้การสมมูลทางตรรกศาสตร์  $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$  นั่นคือการพิสูจน์ว่า ถ้าข้อความตรงข้ามของข้อความ  $q$  เป็นจริง แล้วใช้บทนิยาม ทฤษฎี สัจพจน์ และข้อเท็จจริงในการสรุปว่าข้อความตรงข้ามของข้อความ  $p$  เป็นจริง

**ตัวอย่างที่ 1.3.** กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า  $a^2$  เป็นจำนวนคี่ แล้ว  $a$  เป็นจำนวนคี่

**พิสูจน์** เราจะพิสูจน์ข้อความที่สมมูลกันคือ

ถ้า  $a$  เป็นจำนวนคู่ แล้ว  $a^2$  เป็นจำนวนคู่

กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนคู่

จากบทนิยาม 1 เราจะได้ว่าจะมีจำนวนเต็ม  $k$  ที่ทำให้  $a = 2k$

เนื่องจาก  $k$  เป็นจำนวนเต็ม ทำให้ได้ว่า  $2k^2$  เป็นจำนวนเต็มเช่นกัน และจาก

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

โดยบทนิยาม 1 จะได้ว่า  $a^2$  เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น ข้อความ ถ้า  $a$  เป็นจำนวนคู่ แล้ว  $a^2$  เป็นจำนวนคู่ เป็นจริง

ทำให้ ข้อความ ถ้า  $a^2$  เป็นจำนวนคี่ แล้ว  $a$  เป็นจำนวนคี่ เป็นจริงด้วยเช่นกัน

□

### 1.4.3 การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง

การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง (Contradiction Proof) คือการพิสูจน์ข้อความ "ถ้า  $p$  แล้ว  $q$ " โดยให้ข้อความ  $p$  เป็นจริง และข้อความ  $q$  ไม่เป็นจริงแล้วใช้บทนิยาม ทฤษฎี สัจพจน์ ให้เกิดข้อขัดแย้ง

**ตัวอย่างที่ 1.4.** กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า  $a^2$  เป็นจำนวนคู่ แล้ว  $a$  เป็นจำนวนคู่

**พิสูจน์** กำหนดให้  $a^2$  เป็นจำนวนคู่

สมมติว่า  $a$  ไม่เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า  $a$  เป็นจำนวนคี่ จากบทนิยาม 2 เราจะได้ว่าจะมีจำนวนเต็ม  $k$  ที่ทำให้  $a = 2k + 1$

เนื่องจาก  $k$  เป็นจำนวนเต็ม ทำให้ได้ว่า  $2k^2 + 2k$  เป็นจำนวนเต็มเช่นกัน และจาก

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

โดยบทนิยาม 2 จะได้ว่า  $a^2$  เป็นจำนวนคี่ เกิดข้อขัดแย้งกับข้อความ  $a^2$  เป็นจำนวนคู่

ทำให้ข้อสมมติที่ไว้เป็นเท็จ เราจะได้ว่า  $a$  เป็นจำนวนคู่ □

### 1.4.4 การพิสูจน์โดยการแจกกรณี

การพิสูจน์โดยการแจกกรณี (Proof by Cases) คือการพิสูจน์ข้อความ "ถ้า  $p$  หรือ  $q$  แล้ว  $r$ " โดยใช้การสมมูลทางตรรกศาสตร์  $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$  นั่นคือการพิสูจน์ข้อความ "ถ้า  $p$  แล้ว  $r$ " เป็นจริงและพิสูจน์ข้อความ "ถ้า  $q$  แล้ว  $r$ " เป็นจริง

**ตัวอย่างที่ 1.5.** กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า  $a(a + 1)$  เป็นจำนวนคู่

**พิสูจน์** กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนเต็ม เราจะได้ว่า  $a$  เป็นจำนวนคู่ หรือ  $a$  เป็นจำนวนคี่

**กรณี 1** สมมติว่า  $a$  เป็นจำนวนคู่

จากบทนิยาม 1 เราจะได้ว่าจะมีจำนวนเต็ม  $k$  ที่ทำให้  $a = 2k$

เนื่องจาก  $k$  เป็นจำนวนเต็ม ทำให้ได้ว่า  $2k^2 + k$  เป็นจำนวนเต็มเช่นกัน และจาก

$$a(a + 1) = 2k(2k + 1) = 2(2k^2 + k)$$

โดยบทนิยาม 1 จะได้ว่า  $a(a + 1)$  เป็นจำนวนคู่

**กรณี 2** สมมติว่า  $a$  เป็นจำนวนคี่

จากบทนิยาม 2 เราจะได้ว่าจะมีจำนวนเต็ม  $k$  ที่ทำให้  $a = 2k + 1$