



การวิจัยดำเนินงาน Operations Research

รองศาสตราจารย์ ดร.จิตนนท์ จารุโรจน์เกียรติ

ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

การวิจัยดำเนินงาน

Operations Research

รองศาสตราจารย์ ดร.ฉัตรนันทน์ จารุโรจน์เกียรติ
ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

การวิจัยดำเนินงาน

Operations Research

สงวนลิขสิทธิ์ ห้ามการลอกเลียนไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ นอกจากจะ
ได้รับอนุญาต จาก รองศาสตราจารย์ ดร.จิตนันท จารุโรจน์กীরติ

เรียบเรียงโดย รองศาสตราจารย์ ดร.จิตนันท จารุโรจน์กীরติ

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

National Library of Thailand Cataloguing in Publication Data

จิตนันท จารุโรจน์กীরติ.

การวิจัยดำเนินงาน = Operations research -- กรุงเทพฯ : 2565.

หน้า.444

1. วิจัย. 2. วิจัยปฏิบัติการ. I. ชื่อเรื่อง.

ISBN 978-616-368-050-1

ราคา 250 บาท หรือ \$8

พิมพ์ที่ -

ได้รับการรับรองคุณภาพจากคณะกรรมการประจำส่วนงานวิชาการ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

คำนำ

หนังสือการวิจัยดำเนินงาน ได้เรียบเรียงขึ้น โดยมีจุดมุ่งหมายให้นักศึกษาของภาควิชาสถิติประยุกต์ได้ศึกษาอันมีผลมาจากระบบการประกันคุณภาพการศึกษาของมหาวิทยาลัยที่ต้องทำให้นักศึกษาได้เรียนรู้และได้รับความรู้อย่างตามที่ได้กำหนดไว้ในหลักสูตรของภาควิชาสถิติประยุกต์ มีเนื้อหาหรือรายละเอียดของวิชาการวิจัยดำเนินงาน 1 ดังนี้ 1. บทนำ 2. การโปรแกรมเชิงเส้น 3. ปัญหาควบคู่ 4. ปัญหาการขนส่ง 5. ปัญหาการจัดสรรงาน 6. การวิเคราะห์ข่ายงาน 7. การบริหารโครงการ 8. การโปรแกรมจำนวนเต็ม 9. การโปรแกรมที่ไม่ใช่เชิงเส้น 10. ระบบแถวคอย 11. ตัวแบบสินค้าคงคลัง 12. ตัวแบบมาร์คอฟและทฤษฎีเกม ในหนังสือเล่มนี้ผู้เขียนได้ใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MS.Excel ในบางบทเรียนเพื่อให้ง่ายต่อการหาคำตอบ

หนังสือการวิจัยดำเนินงาน ได้รับการสนับสนุนการพิมพ์โดยโครงการตำราของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือและได้รับทุนในการผลิตตำราจากคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีงบประมาณ 2560

ผู้เขียนขอขอบพระคุณบิดา มารดา ครู อาจารย์ ที่ช่วยทำให้ผู้เขียนมีสติปัญญาและเขียนหนังสือเล่มนี้ได้ ความดีที่เกิดขึ้นของหนังสือเล่มนี้ผู้เขียนขอมอบให้แก่บุคคลที่ผู้เขียนกล่าวถึงและหากหนังสือเล่มนี้มีข้อผิดพลาดผู้เขียนขออภัยและขอขอบใจครอบครัวภริยาและบุตรทั้งสองคน ที่สร้างและให้กำลังใจผู้เขียนตลอดมา

รองศาสตราจารย์ ดร.ฐิตนันท จารุโรจน์กิริติ

ภาควิชาสถิติประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

ธันวาคม 2564

สารบัญ

	หน้า
บทนำ (Introduction to Operations Research)	1
1. ความหมายของการวิจัยดำเนินงาน	1
2. ขั้นตอนของการวิจัยดำเนินงาน	3
3. ปัญหาในทางการวิจัยดำเนินงาน	4
4. อุปสรรคในการศึกษาวิจัยดำเนินงาน	5
การโปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming)	7
1. บทนำ	7
2. ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น	8
3. การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น	12
3.1 การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นโดยวิธีกราฟ	12
3.2 การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นโดยวิธีซิมเพล็กซ์	26
4. การใช้โปรแกรม Microsoft Excel ในการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น	62
5. ปัญหาบางประการที่สำคัญของการโปรแกรมเชิงเส้น	69
แบบฝึกหัด	74
ปัญหาควคู่ (Dual Problem)	79
1. ตัวแบบปัญหาควคู่	79
2. ความสัมพันธ์ระหว่างปัญหาเดิมกับปัญหาควคู่	85
3. วิธีซิมเพล็กซ์ควคู่	90
4. การวิเคราะห์ด้านเศรษฐศาสตร์ของปัญหาควคู่	95
5. การวิเคราะห์ความไว	98
แบบฝึกหัด	110

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
ปัญหาการขนส่ง (Transportation Problem)	113
1. บทนำและตัวแบบปัญหาการขนส่ง	113
2. การแก้ปัญหาของตัวแบบปัญหาการขนส่ง	117
2.1 การหาคำตอบเบื้องต้น	117
2.2 การหาผลลัพธ์ที่เหมาะสม	130
3. การแก้ปัญหาการขนส่งโดยคำนึงถึงกำไรสูงสุด	146
4. การแก้ปัญหาการขนส่งโดยใช้ Microsoft Excel	165
แบบฝึกหัด	168
ปัญหาการจัดสรรงาน (Assignment Problem)	171
1. บทนำ	171
2. การหาผลลัพธ์	173
3. การแก้ปัญหาการจัดสรรงานโดยใช้ Microsoft Excel	194
แบบฝึกหัด	199
การวิเคราะห์ข่ายงาน (Network Analysis)	203
1. บทนำ	203
2. ปัญหาเส้นทางสั้นที่สุด	205
3. ปัญหาการกระจายเป็นแขนงต้นไม้ที่น้อยที่สุด	209
4. ปัญหาการเคลื่อนย้ายได้มากที่สุด	213
5. การแก้ปัญหาการเคลื่อนย้ายได้มากที่สุดโดยใช้ Microsoft Excel	222
แบบฝึกหัด	225

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
การบริหารโครงการ (Project Management)	231
1. บทนำ	231
2. หลักเกณฑ์การเขียนโครงข่ายงาน	233
3. เทคนิคสายงานวิกฤต	243
4. เวลาเหลือของงาน	248
5. เทคนิค PERT	250
6. การเร่งโครงการ	254
แบบฝึกหัด	272
การโปรแกรมจำนวนเต็ม (Integer Programming)	277
1. วิธีการหาค่าผลลัพธ์แบบตัดพื้นที่	277
1.1 วิธีการหาค่าผลลัพธ์ที่ตัวแปรทุกตัวเป็นจำนวนเต็ม	278
1.2 วิธีการหาค่าผลลัพธ์ที่ตัวแปรบางตัวเป็นจำนวนเต็ม	285
2. วิธีขอบเขตและกระจาย	289
3. การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็มโดยใช้ Microsoft Excel	302
แบบฝึกหัด	305
การโปรแกรมที่ไม่ใช่เชิงเส้น (NonLinear Programming)	309
1. บทนำ	309
2. การหาค่าที่ดีที่สุดเมื่อไม่มีฟังก์ชันข้อจำกัดสำหรับ 2 ตัวแปรตัดสินใจ	310
3. การหาค่าที่ดีที่สุดเมื่อมีฟังก์ชันข้อจำกัดสำหรับ 2 ตัวแปรตัดสินใจ	312
3.1 วิธีกราฟ	312
3.2 เทคนิคตัวคูณลาแกรนจ์	318
4. การหาค่าที่ดีที่สุดของตัวแปรตัดสินใจหลายตัว	322
แบบฝึกหัด	333
ระบบแถวคอย	335
1. องค์ประกอบพื้นฐานในระบบแถวคอย	336
2. นิยาม และสัญลักษณ์	338
3. ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยบางค่า	340
4. ข้อตกลงเบื้องต้นในระบบแถวคอย	340

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
5.การแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนลูกค้าที่มารับบริการ	341
6.การแจกแจงของช่วงเวลาระหว่างการมาของลูกค้า	344
7.การแจกแจงจำนวนลูกค้าที่รับบริการเสร็จสิ้น	345
8.การแจกแจงของเวลาในการให้บริการกับลูกค้า	348
9.ระบบแถวคอยแบบที่มีการแจกแจงของการมา และเสร็จจากการรับบริการ	349
10.อัตราการให้บริการที่ทำให้ค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด	364
11.จำนวนผู้ให้บริการที่ทำให้ค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด	365
แบบฝึกหัด	367
ตัวแบบสินค้าคงคลัง	368
1.บทนำ	368
2.ค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวข้องในระบบสินค้าคงคลัง	368
3.นิยามของค่าต่างๆ ที่ใช้ในระบบสินค้าคงคลัง	371
4.ตัวแบบต่างๆ ของระบบสินค้าคงคลัง	371
แบบฝึกหัด	394
ตัวแบบมาร์คอฟ	397
1.บทนำ	397
2.ลักษณะทั่วไปตัวแบบมาร์คอฟ	397
3.สมมติฐานสำหรับตัวแบบมาร์คอฟ	398
4.ตัวแบบสภาวะไม่คงที่	399
5.ตัวแบบสภาวะคงที่	405
แบบฝึกหัด	409
ทฤษฎีเกม	412
1.รูปแบบเกมระหว่างสองฝ่ายที่มีผลรวมเป็นศูนย์	412
2.การหาผลลัพธ์เทคนิคกราฟ	422
3.การหาแผนกลยุทธ์ผสมที่เหมาะสมที่สุดโดยใช้การโปรแกรมเชิงเส้น	434
แบบฝึกหัด	440
ภาคผนวก	443
บรรณานุกรม	444
ประวัติผู้เรียบเรียง	445

Introduction to Operations Research

1. ความหมายของการวิจัยดำเนินงาน

ในวงการธุรกิจและอุตสาหกรรมปัญหาที่พบบ่อยมาก ก็คือการหาข้อมูลเพื่อช่วยในการตัดสินใจ ซึ่งข้อมูลที่ช่วยในการตัดสินใจมีอยู่หลายประเภท เช่น ข้อมูลเกี่ยวกับบุคลากรเรามีบุคลากรเพียงพอหรือไม่ ข้อมูลเกี่ยวกับเครื่องจักร เครื่องจักรที่มีอยู่ใช้ได้กี่ตัว หรือข้อมูลเกี่ยวกับวัตถุดิบ หรือข้อมูลเกี่ยวกับความต้องการสินค้า เป็นต้น แต่ข้อมูลที่จำเป็นสำหรับผู้บริหารอย่างยิ่งและเป็นประโยชน์แก่องค์กรอย่างมาก ก็คือข้อมูลเกี่ยวกับการจัดการผลิต ซึ่งเป็นข้อมูลที่คำนึงถึงประโยชน์สูงสุด เช่น

จะผลิตสินค้าอย่างละกี่ชิ้นเพื่อให้ได้กำไรสูงสุด โดยมีจำนวนคนงานหรือแรงงานจำกัด เครื่องไม้เครื่องมือจำกัด มีวัตถุดิบจำนวนจำกัด หรือมีเงินทุนจำกัด

จะสต็อกสินค้าไว้เท่าไรดี เพื่อให้ค่าใช้จ่ายในเรื่องสินค้าคงคลังต่ำที่สุด ซึ่งค่าใช้จ่ายในเรื่องนี้ประกอบด้วย ค่าใช้จ่ายในการสั่งซื้อ ราคาสินค้า ค่าใช้จ่ายในการเก็บรักษาดูแล ค่าความเสียหายเกิดจากสินค้าไม่มีขาย

จะเพิ่มเครื่องจักร หรือสายการผลิตเพื่อผลิตสินค้าให้ได้มากขึ้นจะคุ้มทุนที่ลงไปหรือไม่ เมื่อเทียบกับความต้องการสินค้าทั้งในปัจจุบันและอนาคตหรือเลือกทางเลือกอื่นๆ เช่น ให้มีการทำงานล่วงเวลาเพื่อให้ผลิตสินค้าได้มากขึ้น

เมื่อโรงงานผลิตสินค้าออกมาแล้ว มีการสั่งซื้อสินค้าจะมีการจัดส่งสินค้าอย่างไรทำให้มีค่าใช้จ่ายในการจัดส่ง (ค่าโซห่วย) ต่ำที่สุด

กรณีการเพิ่มจำนวนตู้บริการ ATM ธนาคารจะดูการใช้บริการจำนวนคนที่เข้ากดปรับบัญชีกับตู้ ATM จะทำการวิเคราะห์ถึงความหนาแน่นการมารับบริการเพื่อเพิ่ม/ลดจำนวนตู้ ATM สำหรับปัญหาการวิจัยดำเนินการคือเรื่องปัญหาแถวคอยนั่นเอง

การบริหารเวลาในการก่อสร้างอาคารหรือการบริหารโครงการวิจัยทำให้โครงการเสร็จตามเวลาที่กำหนดไว้ เช่น ในการก่อสร้างที่เราเคยพบมักจะมีการขยายเวลาการก่อสร้างออกไป

เพราะสิ่งที่ก่อสร้างไม่แล้วเสร็จ และทำให้ค่าใช้จ่ายที่เพิ่มขึ้นคือค่าแรงงานและค่าปรับ ดังนั้นถ้ามีการบริหารโครงการโดย CPM (Critical Path Method) ก็จะทำให้โครงการดำเนินไปและแล้วเสร็จตามที่กำหนด

ข้อมูลเหล่านี้หากผู้ที่มีอำนาจในการตัดสินใจได้รับทราบข้อมูลเหล่านี้จะทำให้ผู้บริหารสามารถตัดสินใจได้อย่างมีประสิทธิภาพสูงสุด ข้อมูลที่ผู้บริหารต้องการและใช้เพื่อการตัดสินใจจึงมิใช่เป็นเพียงข้อมูลเกี่ยวกับบุคลากร ข้อมูลเกี่ยวกับเครื่องจักร ข้อมูลเกี่ยวกับวัตถุดิบ หรือข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับความต้องการสินค้า เท่านั้น

สำหรับข้อมูลที่เป็นเรื่องของการผลิต การสต็อกสินค้า การจัดการเกี่ยวกับค่าเสียหาย การจะเพิ่มเครื่องจักรในการผลิต หรือการแข่งขันเพื่อขายสินค้านั้น เป็นข้อมูลที่ผู้บริหารมีความต้องการสูง แต่ข้อมูลเหล่านี้หากมาได้ยากต้องมีการใช้เทคนิควิธีการทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์มาช่วยในการคำนวณหาและวิธีการทางการวิจัยดำเนินงานเป็นวิธีการหนึ่งที่น่ามาช่วยในหาข้อมูลเพื่อการในการตัดสินใจได้

มีผู้บริหารที่ประสบความสำเร็จบางท่านกล่าวว่าการทำงานที่ผู้บริหารหรือผู้มีอำนาจการตัดสินใจจะตัดสินใจอย่างมีโอกาสมิติดพลาดน้อยที่สุดต้องมีปัจจัย 2 ปัจจัยเป็นองค์ประกอบคือ

1. การระดมสมองและสติปัญญาของผู้บริหารระดับรองลงไปมาช่วยกัน (Brain Storming)
2. การนำเทคนิคของการวิจัยดำเนินงานเข้ามาช่วย (Operations Research)

ความหมายการวิจัยดำเนินงาน การวิจัยดำเนินงานเป็นศาสตร์และศิลป์อยู่ด้วยกันผสมผสานกันอย่างเป็นระบบและมีหลักเกณฑ์ ที่ว่าเป็นศาสตร์คือการใช้เทคนิควิธีการทางวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์มาเป็นเครื่องมือในการหาข้อมูล และศิลป์เป็นศิลปะในการตัดสินใจภายใต้ข้อจำกัดหรือเงื่อนไขที่มีอยู่ เพื่อให้ได้ผลลัพธ์หรือคำตอบที่ดีที่สุด

การวิจัยดำเนินการเป็นเทคนิควิธีการที่เริ่มขึ้นเมื่อสงครามโลก ประเทศอังกฤษที่ถือว่าเป็นจุดเริ่มต้นของศาสตร์การวิจัยดำเนินงานได้ใช้เทคนิคการวิจัยดำเนินงานในการป้องกันประเทศจากการโจมตีของฝ่ายตรงข้ามทำให้ประเทศอังกฤษเสียหายจากภัยสงครามไม่มากเท่าที่ควร หลังจากนั้นเทคนิคการวิจัยดำเนินงานก็เริ่มแพร่หลายเข้าสู่ในวงการธุรกิจ วงการอุตสาหกรรม ในวงการธุรกิจการทำธุรกิจต้องมีการแข่งขันแย่งชิง ซึ่งก็คล้ายๆ กับการทำสงคราม ดังนั้น ผู้ที่สามารถใช้ได้เปรียบคู่แข่งขันย่อมมีโอกาสจะประสบความสำเร็จทางธุรกิจมากกว่า การใช้เทคนิคการวิจัยดำเนินงานเข้าช่วยก็เป็นวิธีการอย่างหนึ่งที่ทำให้สามารถได้เปรียบหรือไม่เสียเปรียบคู่แข่งขันด้วย

ในปัจจุบันมีความเจริญด้านเทคโนโลยีได้เข้ามามีส่วนช่วยในการพัฒนาประเทศให้เจริญก้าวหน้า มีการขยายตัวของหน่วยงาน หรือกิจการต่างๆ ทั้งภาคเอกชนและภาครัฐบาล ถึงกระนั้นไม่ได้หมายความว่าความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีเป็นสิ่งเพียงพอต่อการพัฒนาประเทศ การบริหารงานที่ดี การตัดสินใจอย่างรอบคอบภายใต้ข้อมูลที่ถูกต้อง การวางแผนงานอย่างเป็นระบบ การนำความก้าวหน้าทางด้านวิชาการอื่นๆ เข้ามาช่วยและประยุกต์ใช้ จึงทำให้การพัฒนาประเทศบรรลุถึงจุดมุ่งหมายที่ทุกคนต้องการได้ การนำเอาการวิจัยดำเนินงาน มาใช้หาข้อมูลที่ใช้ในองค์กรด้านต่างๆ เช่น ด้านบริหารธุรกิจ ด้านอุตสาหกรรม เกษตรกรรม วิศวกรรม ที่การวิจัยดำเนินงานได้เข้ามามีส่วนช่วยในการตัดสินใจ การวางแผน และการบริหารองค์กรงานต่างๆ

2. ขั้นตอนของการวิจัยดำเนินงาน

การวิจัยดำเนินงาน ที่นำเข้าไปใช้ในการแก้ปัญหาต่างๆ นั้น จะมีขั้นตอนทั้งหมด 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. กำหนดปัญหา (Define the Problem)

การกำหนดนิยามของปัญหาหมายถึงการที่จะต้องรู้จักปัญหา กล่าวคือต้องรู้ว่าจุดมุ่งหมายของปัญหาคืออะไร อะไรเป็นตัวแปร และอะไรเป็นข้อจำกัดหรือเงื่อนไขของปัญหา

2. สร้างตัวแบบของปัญหา (Construction of the Model)

เมื่อรู้จักและเข้าใจในปัญหานั้นแล้ว ขั้นตอนต่อไปจะต้องสร้างตัวแบบของปัญหานั้น โดยการแปรเปลี่ยนปัญหาให้เป็นตัวแบบคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ด้วยการเขียนปัญหาที่แสดงถึงจุดมุ่งหมายของปัญหา ข้อจำกัดของปัญหาและความสัมพันธ์ของตัวแปรตัดสินใจ (Decision Variables) กับจุดมุ่งหมายและข้อจำกัด

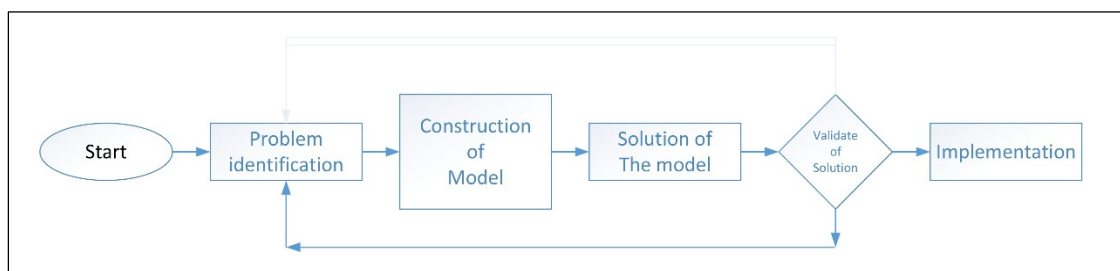
3. การหาผลลัพธ์ของปัญหา (Solution of the Model)

การหาผลลัพธ์โดยการใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ คำนวณหาผลลัพธ์ของปัญหาที่ได้ เช่น อาจจะใช้เทคนิคของเมทริกซ์ เทคนิคเรื้องอนุพันธ์ เทคนิคการอินทิเกรต ฯลฯ ในการหาผลลัพธ์

4. ตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบ (Validation of Model)

การตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบของปัญหาที่สร้างขึ้นว่า ถูกต้องกับปัญหาที่เกิดขึ้นหรือไม่ ตรวจสอบได้โดยการนำเอาข้อมูลผลลัพธ์จริงจากอดีต แล้วนำมาเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากตัวแบบภายใต้ข้อจำกัดเช่นเดียวกัน ถ้าไม่แตกต่างอย่างมีนัยสำคัญแสดงว่าตัวแบบที่สร้างขึ้นมานั้นสามารถใช้หาผลลัพธ์ได้

5. การนำเอาผลลัพธ์ไปใช้งาน (Implementation of the final results) หลังจากมีการคำนวณหาผลลัพธ์ของปัญหาและตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบแล้ว ขั้นตอนต่อไปจะนำผลลัพธ์ที่ได้ไปใช้กับงานจริง เราพิจารณาขั้นตอนการวิจัยดำเนินงานโดยอาศัยผังงานต่อไปนี้



รูปที่ 1 ผังงานขั้นตอนของการวิจัยดำเนินงาน

3. ปัญหาในทางการวิจัยดำเนินงาน

ปัญหาที่สามารถนำเอการวิจัยดำเนินงานเข้ามาแก้ปัญหาได้มีหลายแบบ ดังนี้

1. ปัญหาการจัดสรรทรัพยากร
 2. ปัญหาการขนส่ง
 3. ปัญหาการจัดงาน
 4. ปัญหาระบบสินค้าคงคลัง
 5. ปัญหาระบบแถวคอย การผลิต
 6. ปัญหาการจัดลำดับของงาน
 7. ปัญหาการวิเคราะห์โครงการ
 8. ปัญหาการวางแผนการแข่งขัน
 9. การพยากรณ์ทางธุรกิจ
- ฯลฯ

4. อุปสรรคในการศึกษาวิชาการวิจัยดำเนินงาน

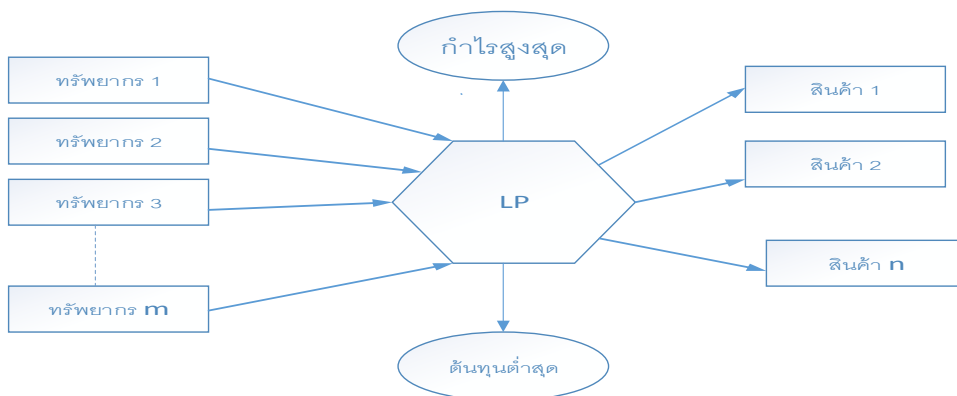
ตามที่เราทราบขั้นตอนการแก้ปัญหาของการวิจัยดำเนินงานแล้วนั้น เมื่อเราเปลี่ยนปัญหาให้มาเป็นตัวแบบการวิจัยดำเนินงานแล้วนั้นตัวแบบที่ได้เป็นแบบคณิตศาสตร์ ดังนั้นการหาผลลัพธ์ของตัวแบบนี้ต้องดำเนินการโดยวิธีการทางคณิตศาสตร์ เช่น การหาอนุพันธ์ การกระทำของเมทริกซ์ การอินทิเกรต ฯลฯ เหล่านี้ต้องอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงทุกระดับ และต้องควรมีความรู้ทางด้านสถิติดีพอในเรื่องความน่าจะเป็น ตัวแปรสุ่ม ฯลฯ ดังนั้น ผู้ที่จะศึกษาวิชาการวิจัยดำเนินงาน ได้ดีควรมีพื้นฐานคณิตศาสตร์และสถิติดีพอสมควร สำหรับในโลกปัจจุบันผู้ที่ศึกษาวิชาการวิจัยดำเนินงานอาจจะต้องมีความรู้ทางด้านคอมพิวเตอร์รวมอยู่ด้วย เช่น ในปัจจุบันมีโปรแกรมสำเร็จรูปที่ช่วยแก้ปัญหการวิจัยดำเนินการคือ LINDO, TORA, Win-QSB, Ms-EXCEL ฯลฯ

การโปรแกรมเชิงเส้น

Linear Programming

1. บทนำ

การโปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming: LP) เป็นเทคนิคในการแก้ปัญหาทาง การวิจัยดำเนินงานวิธีหนึ่งที่นิยมใช้กันมากในปัจจุบัน เช่น ด้านอุตสาหกรรม เกษตรกรรม ด้านวิทยาศาสตร์ การทหาร ธุรกิจ ฯลฯ เนื่องจากเป็นเทคนิคที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับ ปัญหาต่างๆ ที่เกิดขึ้นได้ โดยเฉพาะปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการจัดสรรทรัพยากรที่มีจำนวนจำกัด ไม่ว่าจะเป็นเรื่อง การจัดสรรกำลังคน เครื่องจักร วัตถุดิบ เงินทุน ที่ดิน เวลา หรือปัจจัยอื่นๆ ที่มีอยู่ให้ใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ และก่อให้เกิดประโยชน์สูงสุดในการดำเนินงาน ด้วยเหตุนี้ เทคนิคของการโปรแกรมเชิงเส้นจึงมีบทบาทอย่างมากที่จะเข้าไปมีส่วนช่วยหน่วยงานหรือ องค์กรต่างๆ ทั้งในภาครัฐและเอกชน ในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในการดำเนินงาน หรือเป็น เครื่องมือที่ช่วยค้นหาข้อมูลในการตัดสินใจต่างๆ การโปรแกรมเชิงเส้นเป็นเทคนิคที่ได้ถูก พัฒนาขึ้นมาใช้โดยตรงกับปัญหาในลักษณะการจัดสรรทรัพยากร โดยมีวัตถุประสงค์ ที่จะทำให้เกิดผลประโยชน์ที่เหมาะสมที่สุด (Optimum) ในที่นี้ก็คือ การทำให้ค่าใช้จ่ายในการดำเนินงาน น้อยที่สุด (Minimize Cost) หรือการทำให้เกิดกำไรมากที่สุด (Maximize Profit) โดยมีเงื่อนไขหรือ ข้อจำกัดที่มีความสัมพันธ์ที่เป็นทรัพยากรต่างๆ ในลักษณะเชิงเส้น



จุดมุ่งหมายของการโปรแกรมเชิงเส้นการใช้ทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดที่มีเป้าหมายให้เกิดประโยชน์สูงสุดในที่นี้คือกำไรสูงสุดหรือค่าใช้จ่ายหรือต้นทุนต่ำที่สุด ดังนั้น การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นจึงจะมีส่วนประกอบที่สัมพันธ์กันทรัพยากรต่างๆ ในที่นี้เรียกว่าฟังก์ชันเป้าหมาย (Objective Function) ซึ่งมีอยู่สองแบบ คือ ฟังก์ชันเป้าหมายหาค่าสูงสุด (Maximization) หรือฟังก์ชันเป้าหมายหาค่าต่ำสุด (Minimization) ตัวแปรในการตัดสินใจ (Decision Variables) และอสมการหรือสมการ แสดงถึงข้อจำกัด (Constraint Equation or Inequation) หรือเรียกว่า ฟังก์ชันข้อจำกัด (Constraint Function) ที่ทั้งหมดนั้นรวมเป็นตัวแทนทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ที่เรียกว่าตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของการโปรแกรมเชิงเส้นหรือเรียกอีกอย่างว่าตัวแทนการโปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming Model)

2. ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming Model)

ในขั้นตอนของการวิจัยดำเนินงาน ที่กล่าวในตอนต้นแล้วว่า ต้องมีปัญหาและต้องการแก้ปัญหา นั้น จากนั้นจะต้องเปลี่ยนปัญหาที่เกิดขึ้นให้เป็นตัวแทนของปัญหาทางคณิตศาสตร์เสียก่อน ปัญหาการจัดสรรทรัพยากรจะต้องใช้เทคนิคของการโปรแกรมเชิงเส้นในการแก้ปัญหาและจะต้องมีการสร้างตัวแบบให้สอดคล้องกับปัญหาดังกล่าว ซึ่งตัวแทนของการโปรแกรมเชิงเส้นโดยทั่วไปมีลักษณะดังนี้

1. มีฟังก์ชันเป้าหมาย (Objective Function)
2. ฟังก์ชันข้อจำกัด (Constraint Function)
3. ตัวแปรตัดสินใจ (Decision Variables) ต่างๆ ในฟังก์ชันเป้าหมาย อสมการ (สมการ)

ข้อจำกัด จะต้องมีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นเท่านั้น

4. ตัวแปรตัดสินใจ (Decision Variables) ต่างๆ ต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

ให้ Z แทนกำไร หรือค่าใช้จ่ายทั้งหมด

C_j แทนกำไร หรือค่าใช้จ่ายต่อ 1 หน่วยในการผลิตสินค้าชนิดที่ j ; $j = 1, 2, \dots, n$

x_j แทนจำนวนที่ผลิตสินค้าชนิดที่ j

b_i แทนทรัพยากรที่ i ในการผลิตสินค้าทั้งหมด ; $i = 1, 2, \dots, m$

a_{ij} แทนจำนวนทรัพยากร ที่ i ที่ถูกใช้ในการผลิตสินค้าชนิดที่ j

n แทนจำนวนชนิดสินค้าที่ผลิต

m แทนจำนวนชนิดของทรัพยากร

ตัวอย่างที่ 1 บริษัทผลิตปุ๋ยแห่งหนึ่งทำการผลิตปุ๋ย 2 ชนิด ซึ่งปุ๋ยแต่ละชนิดมีขั้นตอนการผลิต 4 ขั้นตอน และใช้เวลาในแต่ละขั้นตอนการผลิตเป็นรายวันดังนี้

ขั้นตอน	เวลาผลิต(นาทึ)		ความสามารถในการผลิต (นาทึต่อวัน)
	ปุ๋ยชนิดที่ 1	ปุ๋ยชนิดที่ 2	
1	20	35	150
2	18	22	100
3	-	10	130
4	5	-	170
กำไรต่อหน่วย (บาท)	8	12	

จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นของปัญหานี้เพื่อหาคำไรสูงสุด

วิธีทำ ให้ x_1 แทนจำนวนปุ๋ยชนิดที่ 1 ที่สามารถผลิตได้
 x_2 แทนจำนวนปุ๋ยชนิดที่ 2 ที่สามารถผลิตได้
 Z แทนกำไรในการผลิตปุ๋ย 2 ชนิด

$$MaxZ = 8x_1 + 12x_2$$

ข้อจำกัด

$$20x_1 + 35x_2 \leq 150$$

$$18x_1 + 22x_2 \leq 100$$

$$10x_2 \leq 130$$

$$5x_1 \leq 170$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ตัวอย่างที่ 2 ฟาร์มเลี้ยงสุกรแห่งหนึ่งทำการวิเคราะห์สารอาหารซึ่งได้แก่ โปรตีน เกลือแร่ คาร์โบไฮเดรต และวิตามิน ในวัตถุดิบที่นำมาทำเป็นอาหารสุกร 4 ชนิด ซึ่งราคาของวัตถุดิบ สารอาหารที่มีในวัตถุดิบแต่ละชนิดเป็นดังตารางต่อไปนี้

สารอาหาร	จำนวนสารอาหารเป็นกรัม ในวัตถุดิบ 1 กก. ความต้องการ				สารอาหารที่สุกร ต้องการ
	ชนิดที่ 1	ชนิดที่ 2	ชนิดที่ 3	ชนิดที่ 4	
โปรตีน	70	50	62	80	120
เกลือแร่	10	11	12	15	20
คาร์โบไฮเดรต	50	100	50	120	180
วิตามิน	5	8	7	4	15
ราคาต่อหน่วย	30	40	35	23	

จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นสำหรับการหาค่าใช้จ่ายต่ำสุดในการซื้อวัตถุดิบแต่ละชนิดมาผลิตอาหารสุกรโดยให้ได้สารอาหารตามที่ต้องการ

วิธีทำ ให้ Z แทนค่าใช้จ่ายทั้งหมดในการจัดซื้อวัตถุดิบทั้งหมด

x_j แทนปริมาณวัตถุดิบที่จัดซื้อชนิดที่ j ; $j = 1, 2, 3, 4$ (หน่วย: กิโลกรัม)

$$\text{Min } Z = 30x_1 + 40x_2 + 35x_3 + 23x_4$$

ข้อจำกัด

$$70x_1 + 50x_2 + 62x_3 + 80x_4 \geq 120$$

$$10x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 15x_4 \geq 20$$

$$50x_1 + 100x_2 + 50x_3 + 120x_4 \geq 180$$

$$5x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4 \geq 15$$

$$x_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4$$

ตัวอย่างที่ 3 ในการผลิตสินค้า A และ B ของบริษัทแห่งหนึ่งต้องใช้เครื่องจักรในการผลิต 3 เครื่อง และเครื่องจักรแต่ละเครื่องมีความสามารถในการทำงานและมีรายละเอียดการผลิตกำหนดไว้ดังนี้

เครื่องจักร	เวลาผลิตสินค้าต่อหน่วย (นาที)		ความสามารถในการทำงาน ไม่เกิน (นาที/วัน)
	สินค้า A	สินค้า B	
1	23	12	240
2	21	50	180
3	18.5	21.5	300
ค่าใช้จ่ายในการผลิตต่อหน่วย (บาท)	18	16	

จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นของปัญหานี้เพื่อหาค่าใช้จ่ายทั้งหมดที่ต่ำสุดในการผลิตสินค้าทั้งสองชนิด

วิธีทำ ให้ Z แทนค่าใช้จ่ายในการผลิตทั้งหมด

x_1 แทนจำนวนสินค้า A ที่ผลิต

x_2 แทนจำนวนสินค้า B ที่ผลิต

ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น คือ

$$\text{Min } Z = 18x_1 + 16x_2$$

ข้อจำกัด

$$23x_1 + 12x_2 \leq 240$$

$$21x_1 + 50x_2 \leq 180$$

$$18.5x_1 + 21.5x_2 \leq 300$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ตัวอย่างที่ 4 บริษัทที่ผลิตเฟอร์นิเจอร์ครัวแห่งหนึ่ง โดยมีไม้ 3 ประเภท คือไม้อัด 450 ลูกบาศก์เมตร ไม้ระแนง 100 ลูกบาศก์เมตร ไม้สัก 420 ลูกบาศก์เมตร และมีแรงงานที่ใช้ทำการสร้างเฟอร์นิเจอร์ครัว 800 ชั่วโมงและมีรายละเอียดในการผลิตดังนี้

ชนิดไม้ (ลูกบาศก์เมตร)	ตู้ 1 ตัว	โต๊ะ 1 ตัว	เก้าอี้ 1 ตัว
ไม้อัด	30	8	4
ไม้ระแนง	9	3	-
ไม้สัก	5	5	2
แรงงาน (ชั่วโมง)	30	20	8
ต้นทุน/ตัว	1100	580	200

จงสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นของปัญหานี้เพื่อหาค่าใช้จ่ายทั้งหมดที่ต่ำสุดในการผลิตสินค้าทั้งสามอย่างนี้

วิธีทำ ให้ Z แทนค่าใช้จ่ายในการผลิตทั้งหมด

x_1 แทนจำนวนตู้ที่ผลิต

x_2 แทนจำนวนโต๊ะที่ผลิต

x_3 แทนจำนวนเก้าอี้ที่ผลิต

$$\text{Min } Z = 1100x_1 + 580x_2 + 200x_3$$

ข้อจำกัด

$$30x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leq 450$$

$$9x_1 + 3x_2 \leq 100$$

$$5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 420$$

$$30x_1 + 20x_2 + 8x_3 \leq 800$$

$$x_j \geq 0 ; j=1,2,3$$

3. การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น ในบทเรียนบทนี้มีวิธีการหาผลลัพธ์ 2 วิธี คือ วิธีกราฟ และวิธีซิมเพล็กซ์

3.1. การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นโดยวิธีกราฟ

การแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นด้วยวิธีกราฟเป็นวิธีหนึ่งที่ค่อนข้างง่ายเพราะวิธีกราฟนี้มีข้อจำกัดเกี่ยวกับจำนวนตัวแปรตัดสินใจซึ่งมีเพียง 2 ตัว แต่แนวความคิด และหลักการในการแก้ปัญหานั้นยังคงเป็นพื้นฐานในการหาวิธีการแก้ปัญหาใหม่ๆ ในการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้น