

เวฟเล็ต

การวิเคราะห์ และการออกแบบ

Wavelet, Analysis, and Design

ฉบับปรับปรุงใหม่



พีชิต กิตติสุวรรณ

เวฟเล็ต การวิเคราะห์ และการออกแบบ

Wavelet, Analysis, and Design

ฉบับปรับปรุงใหม่

$$P(z) + P(-z) = 2, P(z) = G_0(z)G_0(z^{-1}),$$

$$G_1(z) = -z^{-1}G_0(-z^{-1}),$$

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_0[n]\varphi(2t - n),$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_1[n]\varphi(2t - n)$$

พิชิต กิตติสุวรรณ

เวฟเล็ต การวิเคราะห์ และการออกแบบ

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

ห้ามทำการลอกเลียนแบบไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้
นอกจากจะได้รับอนุญาต

พิมพ์ครั้งที่ 1 สิงหาคม 2558

พิมพ์ครั้งที่ 2 ธันวาคม 2561

พิมพ์ครั้งที่ 3 มีนาคม 2566

ราคา 200 บาท

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

พิชิต กิตติสุวรรณ

เวฟเล็ต การวิเคราะห์ และการออกแบบ = Wavelet, Analysis,
and Design. -- พิมพ์ครั้งที่ 3. -- กรุงเทพฯ : ทริปเพิลกรุ๊ป, 2566.
148 หน้า

1. คณิตศาสตร์วิเคราะห์. I. ชื่อเรื่อง.
515

ISBN 978-616-7822-93-8

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย



บริษัท ทริปเพิล เอ็ดดูเคชั่น จำกัด

95 ถ.แจ้งวัฒนะ ซ.6 แขวงตลาดบางเขน เขตหลักสี่ กรุงเทพฯ 10210

www.triple-ed.com E-mail : editor.triple@gmail.com

พิมพ์ที่



บริษัท ทริปเพิล กรุ๊ป จำกัด www.triple-group.co.th

คำนิยม

เวฟเล็ต เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งที่ถูกนำมาประยุกต์ใช้อย่างมากในทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม ในอดีตเวฟเล็ตมักถูกมองว่าเป็นเรื่องทางคณิตศาสตร์ที่ยาก ซับซ้อน แม้แต่ในปัจจุบันงานวิจัยส่วนใหญ่ทางวิศวกรรมก็จะเน้นไปที่การนำเวฟเล็ตมาประยุกต์ใช้ โดยปราศจากความเข้าใจพื้นฐานที่แท้จริง ดังนั้นหากมีหนังสือภาษาไทยสักเล่มที่เขียนขึ้นเกี่ยวกับพื้นฐานของทฤษฎีเวฟเล็ตก็จักเป็นประโยชน์อย่างมาก

สำหรับ รองศาสตราจารย์ ดร.พิชิต กิตติสุวรรณ ในอดีตเป็นนิสิตที่ข้าพเจ้าได้มีโอกาสเป็นประธานสอบวิทยานิพนธ์ในระดับดุษฎีบัณฑิตที่ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ซึ่งข้าพเจ้ามีความมั่นใจในความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์พื้นฐานของลูกศิษย์คนนี้อย่างมากเป็นทุนเดิมอยู่แล้วโดยสังเกตจากงานวิจัยที่ได้ทำมาในอดีต ยิ่งเมื่อได้ลองอ่านหนังสือเรื่อง เวฟเล็ต การวิเคราะห์ และการออกแบบ ฉบับปรับปรุงใหม่ ที่ได้ปรับปรุงจากในอดีตเล่มนี้ด้วยแล้ว ยิ่งทำให้ข้าพเจ้ามั่นใจขึ้นไปอีกว่าหนังสือเล่มนี้จะช่วยให้ความกระจ่างเกี่ยวกับที่มาที่ไป ของทฤษฎีเวฟเล็ต ต่อผู้ที่ต้องการศึกษาทางด้านนี้อย่างมากไม่ว่าจะเป็น นิสิต นักศึกษา หรือผู้ประกอบการอาชีพทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมทั่วไป

รองศาสตราจารย์ ดร.เจษฎา ชินรุ่งเรือง
อาจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้าสื่อสาร ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

มกราคม 2566

คำนิยม

ในแง่มุมหนึ่ง เว็บไซต์ เป็นกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ถูกพัฒนาขึ้นเพื่อแก้ไขข้อจำกัดบางประการของผลการแปลงฟูเรียร์เพื่อให้เหมาะกับการวิเคราะห์สัญญาณทั้งในเชิงความถี่และเชิงเวลา ทั้งยังสามารถใช้ในการวิเคราะห์หลายอานาจจำแนกได้ด้วย ในปัจจุบัน เว็บไซต์ ได้กลายเป็นเครื่องมือมาตรฐานในการวิเคราะห์สัญญาณต่าง ๆ โดยเฉพาะในการประมวลผลภาพเชิงเลข (digital image processing) ไม่ว่าจะเป็นในด้านการลดสัญญาณรบกวน (denoising) หรือการรู้จำรูปแบบ (pattern recognition)

หนังสือเล่มนี้นำเสนอทฤษฎีพื้นฐานของการวิเคราะห์เว็บไซต์ ซึ่งเหมาะกับทั้งผู้ที่เริ่มศึกษาเรื่องนี้ และผู้ที่เคยใช้งานเว็บไซต์มาแล้วแต่ไม่ได้ศึกษาในรายละเอียดเช่นข้าพเจ้า ผู้เขียนได้ทำการเรียบเรียงเนื้อหาต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเว็บไซต์ ตั้งแต่คณิตศาสตร์พื้นฐานจนถึงแง่มุมจากฟังก์ชันของเว็บไซต์และผลการแปลงเว็บไซต์เชิงซ้อน นอกจากทฤษฎีพื้นฐานต่าง ๆ แล้วผู้เขียนยังได้เพิ่มตัวอย่างและแบบฝึกหัดที่ช่วยเสริมความเข้าใจพร้อมทั้งยังมีตัวอย่างการใช้งานทฤษฎีต่าง ๆ ที่น่าสนใจและบางทีก็คาดไม่ถึง เช่น การหารูปแบบปิดของลำดับฟีโบนัชชีด้วยผลการแปลงซี เป็นต้น

ข้าพเจ้าหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเรื่องเว็บไซต์ การวิเคราะห์ และการออกแบบ ฉบับปรับปรุงใหม่ที่ได้ปรับปรุงจากในอดีตเล่มนี้จะทำให้ผู้อ่านได้รับความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับเว็บไซต์มากขึ้นเช่นเดียวกับข้าพเจ้าซึ่งได้อ่านหนังสือเล่มนี้

ดร.สรพพฤทธิ์ มฤคทัต

นักวิจัยประจำศูนย์เทคโนโลยีอิเล็กทรอนิกส์และคอมพิวเตอร์แห่งชาติ (NECTEC)

สำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ (สวทช.)

กระทรวงวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มกราคม 2566

คำนำ

หนังสือเรื่อง เวฟเล็ด การวิเคราะห์ และการออกแบบ ฉบับปรับปรุงใหม่นี้ ข้าพเจ้าตั้งใจจัดทำขึ้นเพื่อตอบสนองความต้องการหนังสือที่มีเนื้อหาเกี่ยวกับ เวฟเล็ด ซึ่งมีเพิ่มขึ้นอย่างมาก โดยสังเกตได้จากการสั่งซื้อหนังสือที่มีมาอย่างต่อเนื่อง โดยข้าพเจ้าได้ตรวจสอบ ปรับปรุงแก้ไขเนื้อหาของหนังสือเล่มนี้ให้มีความถูกต้อง ทันสมัยมากขึ้นกว่าหนังสือเล่มนี้ในฉบับดั้งเดิม

ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณมารดาผู้ที่ได้ล่วงลับไปแล้ว ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วรกร (สุวิมล) กิตติสุวรรณ อาจารย์ประจำคณะบัญชี มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย เป็นที่น่าเสียดายยิ่งที่ท่านด่วนจากไปก่อนที่จะได้เห็นความสำเร็จของข้าพเจ้า อย่างไรก็ตามข้าพเจ้ายังระลึกถึงท่านอยู่เสมอ บิดา คุณสมเกียรติ กิตติสุวรรณ น้องสาว คุณวิมลพรรณ กิตติสุวรรณ รวมทั้งคุณย่า คุณสุวรรณ กิตติสุวรรณ อาจารย์ผู้ที่เคยประสิทธิ์ประสาทวิชาแก่ข้าพเจ้าในทุกระดับชั้น รวมทั้งผู้คิดค้น ผู้อ่าน และผู้ที่สนใจเกี่ยวกับ เวฟเล็ด ทุกท่าน ซึ่งหากปราศจากท่านเหล่านี้ หนังสือเล่มนี้คงไม่สามารถเกิดขึ้นได้ ดังนั้นหากมีคุณความดีใดก็ตามที่เกิดจากหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนขอยกความดีนั้นให้ท่านเหล่านี้ทั้งหมด สุดท้ายหากมีข้อผิดพลาดประการใด ผู้เขียนต้องกราบขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

รองศาสตราจารย์ ดร.พิชิต กิตติสุวรรณ
อาจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลรัตนโกสินทร์ พื้นที่ศาลายา
มกราคม 2566

สารบัญ

	หน้า
สารบัญ	i
สารบัญภาพ	iii
คำอธิบายสัญลักษณ์	vi
บทที่ 1 คณิตศาสตร์พื้นฐาน.....	1
1.1 ปริภูมิฮิลเบิร์ต.....	1
1.2 สภาพเชิงตั้งฉาก.....	3
1.3 ภาพฉายเชิงตั้งฉาก.....	4
1.4 ตัวดำเนินการภาพฉายเชิงตั้งฉาก.....	5
1.5 ผลการแปลงฟูเรียร์ต่อเนื่อง.....	8
1.6 ผลการแปลงฟูเรียร์เวลาวิฤต.....	9
1.7 ผลการแปลงซี.....	10
1.8 ระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา.....	14
1.8.1 การชักตัวอย่างขึ้น.....	15
1.8.2 การชักตัวอย่างลง.....	16
1.9 วิธีการเขียนแทนลำดับหรือสัญญาณวิฤตในรูปลำดับเดลตา.....	17
1.10 ความเป็นอิสระเชิงเส้น.....	18
1.11 ฟิลเตอร์แบบสมมาตร.....	19
1.12 ลำดับเชิงเหตุ.....	20
แบบฝึกหัดและตัวอย่างที่น่าสนใจท้ายบทที่ 1.....	21
บทที่ 2 ทฤษฎีฐานหลัก.....	27
2.1 ฐานหลักเชิงตั้งฉาก.....	27
2.2 อนุกรมฟูเรียร์	32
2.2.1 ผลการแปลงฟูเรียร์ต่อเนื่องของฟังก์ชันเป็นคาบ.....	34
แบบฝึกหัดและตัวอย่างที่น่าสนใจท้ายบทที่ 2.....	40
บทที่ 3 เวฟเล็ตจากแ่งมุมของลำดับ.....	44
3.1 ฟิลเตอร์แบงก์กับเงื่อนไขการสร้างคีนสมบรูณ์แบบ.....	44
3.2 ฟิลเตอร์แบงก์และเงื่อนไขเชิงตั้งฉาก.....	45

	หน้า
3.3 การออกแบบฟิลเตอร์แบงก์เชิงตั้งฉาก.....	55
3.3.1 การออกแบบฟิลเตอร์แบงก์เชิงตั้งฉากด้วยวิธีแยกตัวประกอบสเปกตรัม.....	56
3.3.2 การออกแบบฟิลเตอร์แบงก์เชิงตั้งฉากโดยใช้ลำดับแบบฟังก์ชันซิงก์.....	61
3.3.3 การออกแบบฟิลเตอร์แบงก์เชิงตั้งฉากแบบโดเบอซี.....	63
3.3.4 การออกแบบฟิลเตอร์แบงก์เชิงตั้งฉากแบบคอฟแมน.....	65
3.4 โครงสร้างของฟิลเตอร์แบงก์กับอนุกรมของลำดับ.....	65
แบบฝึกหัดและตัวอย่างที่น่าสนใจท้ายบทที่ 3.....	72
บทที่ 4 เวฟเล็ตจากแ่งมุมของฟังก์ชัน.....	76
4.1 การวิเคราะห์หลายอำนาจจำแนก.....	76
4.1.1 สเกลลิงฟังก์ชัน.....	80
4.1.2 เวฟเล็ตฟังก์ชัน.....	81
4.1.3 อนุกรมเวฟเล็ต.....	86
4.2 สมบัติของฟังก์ชันที่สามารถใช้เป็นสเกลลิงฟังก์ชัน.....	92
4.2.1 ฟังก์ชันสปีนส์.....	95
4.3 การสร้างสเกลลิงและเวฟเล็ตฟังก์ชันจากฟิลเตอร์แบงก์.....	101
แบบฝึกหัดและตัวอย่างที่น่าสนใจท้ายบทที่ 4.....	110
บทที่ 5 เวฟเล็ตเชิงซ้อน.....	119
5.1 ผลการแปลงเวฟเล็ตเชิงซ้อนแบบกึ่งคู่จากแ่งมุมของลำดับ.....	120
5.1.1 วิธีการออกแบบฟิลเตอร์ผลการแปลงเวฟเล็ตเชิงซ้อนแบบกึ่งคู่ด้วยวิธีแยกตัวประกอบสเปกตรัม.....	121
5.1.2 โครงสร้างแบบอนุกรมของผลการแปลงเวฟเล็ตเชิงซ้อนแบบกึ่งคู่.....	123
5.2 ผลการแปลงเวฟเล็ตเชิงซ้อนแบบกึ่งคู่จากแ่งมุมของฟังก์ชัน.....	124
แบบฝึกหัดและตัวอย่างที่น่าสนใจท้ายบทที่ 5.....	127
รายการอ้างอิง.....	129
บรรณานุกรม.....	131
ประวัติของผู้เขียน.....	133

สารบัญภาพ

หน้า

1.1	ลักษณะความสัมพันธ์ของปริภูมิต่าง ๆ.....	1
1.2	แสดงเวกเตอร์ $y = \hat{s}$ ซึ่งเป็นภาพฉายเชิงตั้งฉากของ x บนปริภูมีย่อย S	4
1.3	ลักษณะทางเรขาคณิตที่ได้จากตัวดำเนินการภาพฉายเชิงตั้งฉาก.....	5
1.4	ฟังก์ชัน $x = \cos(3\pi t / 2)$ กับ y คือ ภาพฉายเชิงตั้งฉาก x ลงบน S	7
1.5	แสดงส่วนบริเวณการลู่เข้า (ROC) ของ $x_1[n]$	11
1.6	แสดงส่วนบริเวณการลู่เข้า (ROC) ของ $x_2[n]$	11
1.7	แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณขาเข้าและออกของระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา กรณี (a) สัญญาณเวลาต่อเนื่อง (b) สัญญาณเวลาวิฤต.....	14
1.8	แสดงสัญลักษณ์การชักตัวอย่างขึ้น M	15
1.9	แสดงสัญลักษณ์การชักตัวอย่างลง M	16
1.10	ลักษณะของสัญญาณในตัวอย่าง 1.7.....	16
1.11	(a) ลำดับ $x[n]$ (b) ลำดับ $y[n]$	17
1.12	แสดงการหาค่า (a) $y(t)$ ในบริเวณ $-1 < t < 0$ (b) $y(t)$ ในบริเวณ $0 < t < 1$	26
2.1	แสดงลักษณะทางเรขาคณิตของลำดับ x บน ฐานหลักเชิงตั้งฉากปกติ $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$	30
2.2	ตัวอย่างฟังก์ชันคาบ $f_T(t)$ ที่มีคาบเวลา T	33
2.3	ฟังก์ชัน $f_T(t)$ ในตัวอย่าง 2.4.....	35
2.4	ผลการแปลงฟูเรียร์ $\mathcal{F}\{f_T(t)\}$ ในตัวอย่าง 2.4.....	35
2.5	(a) ระบบทางภาคส่ง (b) ระบบทางภาครับ (c) ลักษณะของสัญญาณทางภาคส่งเมื่อหาผล การแปลงฟูเรียร์แล้ว.....	36
2.6	(a) ลักษณะของสัญญาณ $\hat{x}_s(\omega)$ (b) ลักษณะของฟิลเตอร์ $\hat{\phi}(\omega)$	37
2.7	แสดงผลรวมของ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-n)$ ในตัวอย่าง 2.6.....	38
B-1	แสดงรูปฟังก์ชัน $rect(t)$	40
B-2	แสดงฟังก์ชัน $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$	40
B-3	แสดงฟังก์ชัน $f(t) = e^{-2t}$ ที่เขียนบนฐานหลักเชิงตั้งฉากปกติ $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$	42
B-4	ฟังก์ชันคาบ $f_T(t)$ ในแบบฝึกหัดข้อ 3.....	42
3.1	โครงสร้างฟิลเตอร์แบงก์	44

3.2	โครงสร้างฟิลเตอร์แบ่งกั้นใน ส่วน $x_v[n]$	46
3.3	แสดง $x_v[n]$ คือ ภาพฉายเชิงตั้งฉากของ $x[n]$ บนปริภูมิย่อย V	47
3.4	โครงสร้างฟิลเตอร์แบ่งกั้นใน ส่วน $x_w[n]$	48
3.5	แสดง $x_w[n]$ คือ ภาพฉายเชิงตั้งฉากของ $x[n]$ บนปริภูมิย่อย W	49
3.6	ลักษณะสัญญาณ $x[n] = x_v[n] + x_w[n]$ เมื่อปริภูมิย่อย $V \perp W$	50
3.7	ฟิลเตอร์ที่ใช้ประกอบตัวอย่าง 3.1.....	51
3.8	ฟิลเตอร์ที่ใช้ประกอบตัวอย่าง 3.2.....	53
3.9	ฟิลเตอร์ประกอบตัวอย่าง 3.3.....	53
3.10	(a) ลักษณะทางฝั่งขาเข้าของฟิลเตอร์ (b) ฝั่งขาออกของฟิลเตอร์ ในตัวอย่าง 3.4.....	54
3.11	รากของ $P(z)$ ในตัวอย่าง 3.7.....	59
3.12	ลักษณะโครงสร้างที่สมมูลกันของฟิลเตอร์ใด ๆ $G(z)$ กับ อุปกรณ์การชักตัวอย่างขึ้น 2.....	65
3.13	ลักษณะโครงสร้างที่สมมูลกันของฟิลเตอร์ใด ๆ $H(z)$ กับ อุปกรณ์การชักตัวอย่างลง 2.....	65
3.14	ฟิลเตอร์แบ่งกั้น 2 ขั้น (2 stages).....	66
3.15	โครงสร้างของฟิลเตอร์ที่สมมูลกับโครงสร้างของรูป 3.14.....	67
3.16	แสดงฐานหลักที่บริเวณ $g_1^{(1)}[n-k], g_1^{(2)}[n-4k]$ และ $g_0^{(2)}[n-4k]$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$	69
C-1	ฟิลเตอร์ประกอบแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3 ข้อ 1.....	72
C-2	ฟิลเตอร์ประกอบแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3 ข้อ 2.....	72
C-3	ฟิลเตอร์ประกอบแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3 ข้อ 4.....	74
4.1	ความสัมพันธ์ของปริภูมิย่อย V_m ตามทฤษฎีการวิเคราะห์หลายอำนาจจำแนก.....	77
4.2	แสดงความสัมพันธ์ของปริภูมิย่อย V_m กับ W_m	82
4.3	ลักษณะฟังก์ชันฐานหลัก $\varphi(t-n)$ $\psi(t-n)$ และ $\psi(2t-n)$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$ บริเวณต่าง ๆ	88
4.4	แสดงฟังก์ชันฐานหลัก $\varphi(4t-n)$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$ ที่บริเวณต่าง ๆ.....	90
4.5	ฟังก์ชันกล่อง.....	95
4.6	ลักษณะของฟังก์ชัน $\varphi(t-n)$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$	98
4.7	ฟังก์ชัน $\varphi(t)$ และ $\varphi(2t-n)$	99
4.8	ฟังก์ชัน $ \hat{\varphi}(\omega + 2k\pi) ^2$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$	101
4.9	ลำดับ $g_0^{(i)}[n]$ กับ $\varphi^{(i)}(t)$ ในกรณี $i = 1, 2, 3$	104
D-1	แสดง $ \hat{\varphi}(\omega + 2\pi k) ^2$ ทุก ๆ ค่า $k \in \mathbb{Z}$	114
5.1	โครงสร้างของฟิลเตอร์แบ่งกั้นที่ใช้ในการแปลงเวฟเล็ต.....	119
5.2	โครงสร้างของการแปลงเวฟเล็ตเชิงซ้อนแบบกึ่งคู่ที่ใช้ฟิลเตอร์แบ่งกั้นเชิงตั้งฉาก 2 ชุด.....	121

	หน้า
5.3 การแปลงเวฟเลิตเชิงซ้อนแบบกึ่งคู่ 2 ระดับ (2 stages).....	124
5.4 โครงสร้างการแปลงเวฟเลิตเชิงซ้อนแบบกึ่งคู่ 2 ระดับ (2 stages) ที่สมมูลกับโครงสร้างใน รูป 5.3.....	124

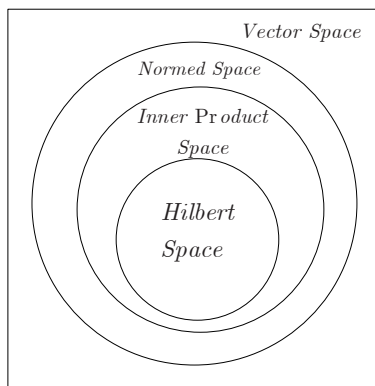
คำอธิบายสัญกรณ์

- | | |
|---|---|
| (1) เซตของจำนวนนับ | $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ |
| (2) เซตของจำนวนเต็ม | $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ |
| (3) เซตของจำนวนจริง | $\mathbb{R}$ |
| (4) เซตของจำนวนเชิงซ้อน | $\mathbb{C}$ |
| (5) จำนวนเชิงซ้อน | $j = \sqrt{-1}$ |
| (6) ฟังก์ชันขั้นบันไดหน่วย
(unit-step function) | $u[n] = 1, n = \{0, 1, 2, \dots\}$ |
| (7) ฟังก์ชันเดลตา
(dirac delta function) | $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \text{ โดยเมื่อ } t_1 < t_0 < t_2 \text{ แล้ว}$ $\int_{t_1}^{t_2} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \right)$ $\text{และ } \int_{t_1}^{t_2} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$ |
| (8) ลำดับเดลตา
(delta sequence) | $\delta[n] = \delta_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$ |
| (9) ฟังก์ชันซิงก์
(sinc function) | $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{(\pi t)}$ |
| (10) ฟังก์ชันสี่เหลี่ยม
(rectangular function) | $\text{rect}(t) = 1, t \leq 1/2$ |
| (11) สูตรของออยเลอร์
(Euler's formula) | $e^{\pm j\omega} = \cos(\omega) \pm j \sin(\omega)$ |
| (12) สูตรของฟังก์ชัน $\cos(\omega)$ ในรูป
ฟังก์ชันเลขยกกำลัง | $\cos(\omega) = \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}$ |
| (13) สูตรของฟังก์ชัน $\sin(\omega)$ ในรูป
ฟังก์ชันเลขยกกำลัง | $\sin(\omega) = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j}$ |
| (14) $\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$ | |
| (15) โมเมนต์ (moment) ของ $f(t)$ | $M_f(t_0, l) = \int (t - t_0)^l f(t) dt \text{ เมื่อ } l \in \mathbb{N}, t_0 \in \mathbb{R}$ |

บทที่ 1 คณิตศาสตร์พื้นฐาน

ในบทนี้เราจะศึกษาถึง คณิตศาสตร์พื้นฐาน ที่จำเป็นในการอธิบายและศึกษา เวฟเล็ต (wavelet) โดยจะศึกษาในเรื่อง ปริภูมิ (space) แบบต่างๆ โดยเฉพาะ ปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space) สภาพเชิงตั้งฉาก (orthogonality) ภาพฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection) ตัวดำเนินการภาพฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection operator) ผลการแปลงฟูเรียร์ต่อเนื่อง (continuous Fourier transform) ผลการแปลงฟูเรียร์เวลาวิยุต (discrete-time Fourier transform, DTFT) ผลการแปลงซี (Z transform) ระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา (linear time-invariant, LTI, system) สังวัตนาการ (convolution) การชักตัวอย่างขึ้น (up-sampling) และการชักตัวอย่างลง (down-sampling) วิธีเขียนลำดับหรือสัญญาณไม่ต่อเนื่องทางเวลาด้วยลำดับเดลตา ความเป็นอิสระเชิงเส้น (linear independent) ฟิลเตอร์สมมาตร (symmetric filter) และ ลำดับเชิงเหตุ (causal sequence)

1.1 ปริภูมิฮิลเบิร์ต



รูป 1.1 ลักษณะความสัมพันธ์ของปริภูมิต่าง ๆ

ปริภูมิ คือ เซตที่มีโครงสร้างพิเศษบางประการ ในที่นี้เราจะศึกษาเฉพาะปริภูมิที่สำคัญ ที่ใช้สำหรับอธิบายทฤษฎีเวฟเล็ตเท่านั้น ดังแผนภาพในรูป 1.1 คือ ปริภูมิเวกเตอร์ (vector space) ปริภูมินอร์ม (normed space) ปริภูมิผลคูณภายใน (inner product space) และ ปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space) ซึ่งจากรูปจะเห็นว่าปริภูมิเวกเตอร์นั้นจะครอบคลุมทุกปริภูมิที่กล่าวมาแล้วทั้งหมด เพราะอยู่วงนอกสุดของแผนภาพ ส่วนปริภูมิฮิลเบิร์ตจะเป็นสมาชิกของทุกปริภูมิที่กล่าวมาแล้วเพราะอยู่วงในสุดของแผนภาพ นั้นเอง ซึ่งเรื่องเกี่ยวกับปริภูมิเวกเตอร์นั้นผู้อ่านสามารถหาอ่านเนื้อหาได้จากหนังสือ

เกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้น (linear algebra) พื้นฐาน เช่น Anton [3] ดังนั้นจะไม่กล่าวถึงรายละเอียดในหนังสือเล่มนี้แต่จะกล่าวถึงเฉพาะปริภูมินอร์ม ปริภูมิผลคูณภายใน และ ปริภูมิฮิลเบิร์ต เท่านั้น

ปริภูมินอร์ม (norm space)

คือ ปริภูมิเวกเตอร์ที่มีการนิยามนอร์ม (norm) ซึ่งสามารถนิยามได้ดังนี้: ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟิลด์เชิงซ้อน $\mathbb{C}$ (ฟิลด์ F คือ เซตชนิดหนึ่งซึ่งในหนังสือเล่มนี้จะใช้เฉพาะเซตของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนเท่านั้น) แล้วค่าประจำหรือนอร์ม คือ ฟังก์ชันค่าจริง $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งมีสมบัติดังนี้

เมื่อ $x, y \in X$ และ $a \in F$

$$1) \|x\| \geq 0 \text{ และ } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2) \|ax\| = |a| \|x\|$$

$$3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

ปริภูมิผลคูณภายใน (inner product space)

คือ ปริภูมิเวกเตอร์บนฟิลด์เชิงซ้อนที่มีการนิยาม ผลคูณภายใน (inner product) ซึ่งสามารถนิยามได้ดังนี้: ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟิลด์ $\mathbb{C}$ แล้ว ผลคูณภายใน คือ ฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ ซึ่งมีสมบัติ ดังนี้

เมื่อ $x, y \in X$ และ $a \in \mathbb{C}$

$$1) \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ และ } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2) \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$3) \langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$$

$$4) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

นอกจากนี้ จากนิยามของผลคูณภายในที่กำหนดขึ้นนั้นเราจะสามารถนิยามนอร์มของเวกเตอร์ $x \in X$ ที่มีผลคูณภายในได้เสมอว่า $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ หรือ กล่าวได้ว่า ปริภูมิผลคูณภายในจะเป็นปริภูมินอร์มเสมอนั่นเอง