

หนังสือเล่มนี้เรียบเรียงตามจุดประสงค์รายวิชา สมรรถนะรายวิชา และคำอธิบายรายวิชา หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ (ปวช.) พุทธศักราช 2562 ของสำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ



รหัสวิชา 20110-2011

(ประเภทวิชาอุตสาหกรรม)

ได้ผ่านการตรวจการประเมินคุณภาพจากสำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2562 ครั้งที่ 2
ประเภทวิชาอุตสาหกรรม กลุ่มสมรรถนะวิชาชีพเฉพาะ ประกาศลำดับที่ 348

คณิตศาสตร์เครื่องกล

Mechanical Mathematics

ผศ. น.อ. รามจิตติ ฤทธิศร

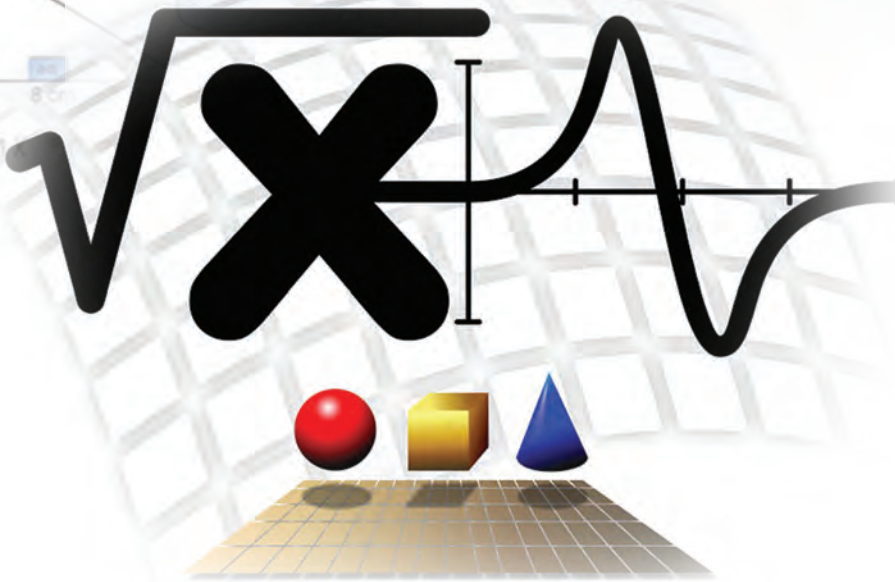
94.-

คณิตศาสตร์เครื่องกล

(Mechanical Mathematics)

รหัสวิชา 20110-2011

หมวดวิชาสมรรถนะวิชาชีพ กลุ่มสมรรถนะวิชาชีพเฉพาะ
ประเภทวิชาอุตสาหกรรม สาขาวิชาช่างเขียนแบบเครื่องกล
หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2562
สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา (สอศ.) กระทรวงศึกษาธิการ



เรียบเรียงโดย

ผศ. น.อ. รามจิตติ ฤทธิศร

วท.บ. (ทอ. วิศวกรรมเครื่องกล)

M.SC. (Mechanical Engineering)

คณิตศาสตร์เครื่องกล

(Mechanical Mathematics)

ISBN 978-616-495-054-2

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย...

บริษัทวังอักษร จำกัด

69/3 ถนนอรุณอมรินทร์ แขวงวัดอรุณ เขตบางกอกใหญ่ กรุงเทพฯ 10600

Tel. 0-2472-3293-5 Fax 0-2891-0742 Mobile 08-8585-1521

e-Mail : wangaksorn9@gmail.com Facebook : สำนักพิมพ์ วังอักษร

http://www.wangaksorn.com ID Line : @wangaksorn



พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2562 จำนวนที่พิมพ์ 3,000 เล่ม

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2537

โดยบริษัทวังอักษร จำกัด ห้ามนำส่วนใดส่วนหนึ่งของหนังสือเล่มนี้ไปทำซ้ำ
ดัดแปลง หรือเผยแพร่ต่อสาธารณชน ไม่ว่ารูปแบบใด ๆ นอกจากได้รับอนุญาต

เป็นลายลักษณ์อักษรล่วงหน้าจากทางบริษัทฯ เท่านั้น
ชื่อและเครื่องหมายการค้าอื่น ๆ ที่อ้างอิงในหนังสือฉบับนี้
เป็นสิทธิโดยชอบด้วยกฎหมายของเจ้าของแต่ละราย

โดยบริษัทวังอักษร จำกัด มิได้อ้างอิงความเป็นเจ้าของแต่อย่างใด

คณิตศาสตร์เครื่องกล

(Mechanical Mathematics)

รหัสวิชา 20110-2011



จุดประสงค์รายวิชา เพื่อให้

1. เข้าใจหลักการคำนวณเกี่ยวกับงานเครื่องกล
2. มีทักษะในการคำนวณความยาว พื้นที่ น้ำหนักการกำหนดพิกัดความเผื่อของชิ้นงาน ความเร็วรอบความเร็วรอบและความเร็วตัด อัตราทดและระบบส่งกำลังด้วยสายพานและเฟือง
3. มีเจตคติและกิจนิสัยในการทำงานด้วยความประณีต รอบคอบ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์



สมรรถนะรายวิชา

1. แสดงความรู้เกี่ยวกับหลักการคำนวณเกี่ยวกับงานเครื่องกล
2. คำนวณความยาว พื้นที่ น้ำหนักการกำหนดพิกัดความเผื่อของชิ้นงาน ความเร็วรอบความเร็วรอบและความเร็วตัด อัตราทดและระบบส่งกำลังด้วยสายพานและเฟือง ตามหลักการ



คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาและฝึกทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับมุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ จำนวนเชิงซ้อน เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสาม และประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นไม่เกินสามตัวแปร และการประยุกต์ใช้ในงานไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์





ตารางวิเคราะห์สมรรถนะรายวิชา
วิชาคณิตศาสตร์เครื่องกล รหัสวิชา 20110-2011
ท-ป-น 2-0-2 จำนวน 2 คาบ/สัปดาห์ รวม 36 คาบ

	แสดงความรู้เกี่ยวกับหลักการคำนวณเกี่ยวกับงานเครื่องกล	คำนวณความยาว พื้นที่ นำหลักการกำหนดพิกัดความเร็วตัดของชิ้นงาน ความเร็วรอบความเร็วขอบและความเร็วตัดอัตราทดและระบบส่งกำลังด้วยสายพานและเฟืองตามหลักการ
1. เรขาคณิตแนวราบ	✓	✓
2. รูปทรงเรขาคณิต	✓	✓
3. งาน พลังงาน และเครื่องกลเบื้องต้น	✓	✓
4. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	✓	✓
5. พิกัดความเผื่อและงานสวม	✓	✓
6. ความเร็วตัด ความเร็วรอบ และความเร็วขอบ	✓	✓
7. ความเร็วและอัตราทดของเครื่องจักรกล	✓	✓
8. เรียวและการกลึงเรียว	✓	✓
9. เกลียว	✓	✓





คำนำ

วิชาคณิตศาสตร์เครื่องกล รหัสวิชา 20110-2011 จัดอยู่ในหมวดวิชาสมรรถนะวิชาชีพ กลุ่มสมรรถนะวิชาชีพเฉพาะ สาขาวิชาช่างเขียนแบบเครื่องกล ประเภทวิชาอุตสาหกรรม ตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2562 สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา (สอศ.) กระทรวงศึกษาธิการ ผู้เขียนได้บริหารสาระการเรียนรู้แบ่งเป็น 9 บทเรียน ได้จัดแผนการจัดการเรียนรู้/แผนการสอนที่เน้นฐานสมรรถนะ (Competency Based) และการบูรณาการ (Integrated) ตรงตามจุดประสงค์รายวิชา สมรรถนะรายวิชา คำอธิบายรายวิชา ในแต่ละบทเรียน มุ่งให้ความสำคัญส่วนที่เป็นความรู้ทฤษฎี หลักการ กระบวนการ ตัวอย่าง แบบฝึกปฏิบัติ และคำถามเพื่อการทบทวน เพื่อฝึกทักษะประสบการณ์ เร่งพัฒนาบทบาทของผู้เรียนเป็นผู้จัดการแสวงหาความรู้ (Explorer) เป็นผู้สอนตนเองได้ สร้างองค์ความรู้ใหม่ และบทบาทของผู้สอนเปลี่ยนจากผู้ให้ความรู้เป็นผู้ชี้แนะ (Teacher Role) จัดสิ่งแวดล้อมเอื้ออำนวยต่อความสนใจเรียนรู้และเป็นผู้ร่วมเรียนรู้ (Co-investigator) จัดห้องเรียนเป็นสถานที่ทำงานร่วมกัน (Learning Context) จัดกลุ่มเรียนรู้ให้รู้จักทำงานร่วมกัน (Grouping) ฝึกความใจกว้าง มุ่งสร้างสรรค์คนรุ่นใหม่ สอนความสามารถที่นำไป ใช้งานได้ (Competency) สอนความรัก ความเมตตา (Compassion) ความเชื่อมั่น ความซื่อสัตย์ (Trust) เป้าหมายอาชีพอันยังประโยชน์ (Productive Career) และชีวิตที่มีศักดิ์ศรี (Noble Life) เหนือสิ่งอื่นใด เป็นคนดีทั้งกาย วาจา ใจ มีคุณธรรม จรรยาบรรณทางธุรกิจและวิชาชีพ

ส่งเสริมสนับสนุนยุทธศาสตร์การพัฒนาระบบคุณวุฒิวิชาชีพ (Vocational Qualification System) สอดคล้องตามมาตรฐานอาชีพ (Occupational Standard) สร้างภูมิคุ้มกัน เพิ่มขีดความสามารถในการแข่งขันของประเทศ กำลังแรงงาน การพัฒนามาตรฐานการปฏิบัติงานระดับชาติ (National Benchmarking) และการวิเคราะห์หน้าที่การงาน (Functional Analysis) เพื่อให้เกิดผลสำเร็จในภาคธุรกิจ อุตสาหกรรม ทุกสาขาอาชีพ เพื่อเตรียมความพร้อมของผู้เรียนเข้าสู่สนามการแข่งขันในประชาคมอาเซียน



ผศ. น.อ. รามจิตติ ฤทธิศร



สารบัญ



บทที่ 1 เรขาคณิตแนวราบ

1

ส่วนของเส้นตรงและรัศมี (Line Segments and Rays)

2

มุม (Angles)

3

สามเหลี่ยม (Triangles)

9

รูปหลายเหลี่ยม (Other Polygons)

14

แบบทดสอบและกิจกรรมการฝึกทักษะ

19



บทที่ 2 รูปทรงเรขาคณิต

27

คำนิยามของวงกลม

28

เส้นรอบวง ส่วนของเส้นโค้ง และพื้นที่ของวงกลม

(Circumference, Arc, Area and Sector)

30

เรขาคณิตทรงตัน (Geometric Solids)

33

ทรงกระบอกและปริซึม

33

กรวยและพีระมิด

37

พริสตัน

40

ทรงกลม

42

การคำนวณน้ำหนักของวัตถุ

43

แบบทดสอบและกิจกรรมการฝึกทักษะ

44



บทที่ 3 งาน พลังงาน และเครื่องกลเบื้องต้น

51

งาน (Work)

52

กำลัง (Power)

53

พลังงาน (Energy)

54

การเปลี่ยนแปลงของพลังงานกลกับการเคลื่อนที่ของวัตถุ

56

เครื่องกลเบื้องต้น

58

โมเมนต์ (Moment)

59

คาน (Level)

60

ล้อและเพลา (Wheel and Axle)

63

รอก (Pulley)

65

พื้นเอียง (Inclined Plane)

68





สกรู (Screw)	69
ลิ้ม (Wedge)	71
แบบทดสอบและกิจกรรมการฝึกทักษะ	73



บทที่ 4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

77

มุมและการวัดมุม	78
ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	80
ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	80
การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติจากวงกลมหนึ่งหน่วย	83
การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่อยู่บนแกน x และแกน y	84
ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° จากวงกลมหนึ่งหน่วย	85
ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ	89
ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม	91
ฟังก์ชันตรีโกณมิติกับสามเหลี่ยมในระนาบ	92
แบบทดสอบและกิจกรรมการฝึกทักษะ	95



บทที่ 5 พิกัดความเผื่อและงานสวม

98

ค่าพิกัดความเผื่อและขนาดจำกัด (Tolerance and Limit)	99
งานสวมและงานระยะคลอน (Fit and Allowance)	100
ลักษณะของงานสวม	101
ระบบพิกัด (Limit Systems)	103
ระบบการกำหนดพิกัดความเผื่อ	104
ชนิดของงานสวมที่นิยมใช้	106
ค่าความเบี่ยงเบนพื้นฐานของพิกัดความเผื่อ (Fundamental Deviation of Tolerance)	106
ความแน่นในการประกอบ	108
แบบทดสอบและกิจกรรมการฝึกทักษะ	114



บทที่ 6 ความเร็วตัด ความเร็วรอบ และความเร็วขอบ

116

ความหมายของความเร็วตัด ความเร็วรอบ และความเร็วขอบ	117
การคำนวณหาเวลาในงานกลึง	118
การคำนวณหาเวลาในงานไส	125
การคำนวณหาเวลาในงานเจาะ	130
การคำนวณหาเวลาในงานเจียรระไน	139
แบบทดสอบและกิจกรรมการฝึกทักษะ	146





บทที่ 7 ความเร็วและอัตราทดของเครื่องจักรกล

150

ความเร็ว

151

อัตราทดและระบบส่งกำลังด้วยฟันเฟือง

153

แบบทดสอบและกิจกรรมการฝึกทักษะ

166



บทที่ 8 เรียวและการกลึงเรียว

172

ความหมายของเรียว

173

ประเภทของเรียว

175

มาตรฐานของเรียว

175

การคำนวณเรียว

179

การคำนวณมุม

186

การกลึงเรียว

188

การตรวจสอบเรียว

193

แบบทดสอบและกิจกรรมการฝึกทักษะ

195



บทที่ 9 เกลียว

198

นิยามของเกลียว

199

ส่วนต่าง ๆ ของเกลียว

200

เกลียวสามเหลี่ยม

201

มาตรฐานของเกลียว

202

แบบทดสอบและกิจกรรมการฝึกทักษะ

217



คำถามเพื่อการทบทวน

219



คำศัพท์

225



บรรณานุกรม

230



บทที่

1

เรขาคณิต

แนวราบ

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม (Behavioral Objective)

หลังจากศึกษาจบบทเรียนนี้แล้ว นักศึกษามีความสามารถดังนี้

1. อธิบายความสำคัญของเรขาคณิต
2. บอกนิยามส่วนของเส้นตรงและเส้นรัศมี
3. อธิบายลักษณะของมุม
4. ยกตัวอย่างมุมชนิดต่าง ๆ
5. คำนวณค่าเรเดียนให้เป็นองศาและองศาเป็นเรเดียน
6. บอกนิยามและชนิดของสามเหลี่ยม
7. คำนวณหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม
8. ระบุชื่อของรูปหลายเหลี่ยม
9. จำแนกประเภทของรูปสี่เหลี่ยม
10. คำนวณหาความยาวและพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม
11. หาความยาวเส้นรอบรูปและพื้นที่ของรูปเหลี่ยม

บทที่

1

เรขาคณิต แนวราบ

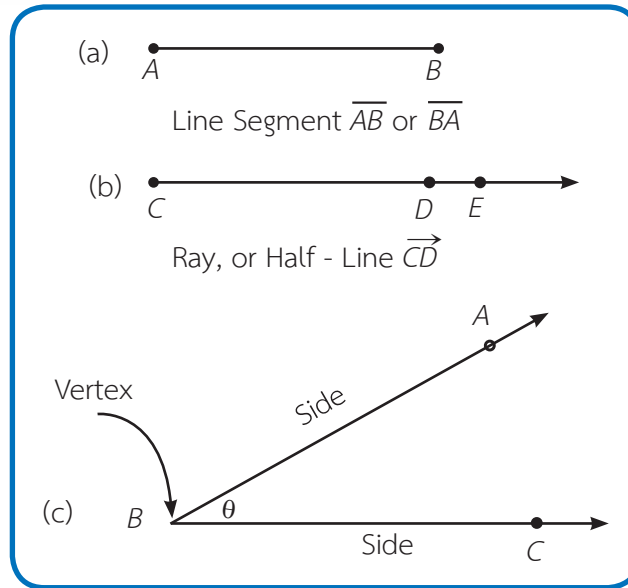
เรขาคณิต คือ การศึกษาในเรื่องราวที่เกี่ยวข้องกับการวัดปริมาณของความยาว พื้นที่ ปริมาตร และคุณสมบัติต่าง ๆ ของเส้นตรง มุม รูปทรงแบน รูปทรงตัน และรูปทรงทางเรขาคณิตอื่น ๆ ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญมากในการศึกษาต่อทางด้านวิศวกรรมต่อไป



ส่วนของเส้นตรงและรัศมี (Line Segments and Rays)

ส่วนของเส้นตรง คือ เส้นที่ลากตรงระหว่างจุด 2 จุด ซึ่งเรียกว่า **จุดปลาย (Endpoint)** ของเส้น การเขียนสัญลักษณ์ของเส้นตรงจะใช้วิธีเขียนขีดเล็ก ๆ บนตัวอักษรที่กำกับจุดปลายของเส้น ยกตัวอย่างเช่น ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด A และ B จะเขียนเป็น $\overline{AB}$ เป็นต้น ดังแสดงในรูปที่ 1.1 (a) ซึ่งอาจจะเขียน $\overline{BA}$ ก็ได้

รัศมีของเส้น คือ ส่วนของเส้นตรงที่เริ่มต้นลากจากจุดปลายเริ่มต้นไปเรื่อย ๆ โดยไม่กำหนดตำแหน่งตายตัวของปลายอีกข้างหนึ่ง นิยมเขียนปลายดังกล่าวด้วยหัวลูกศร เมื่อไม่มีจุดปลายที่แน่นอน จึงไม่สามารถกำหนดความยาวที่แน่นอนได้ รัศมีจึงเป็นเพียงเส้นที่ใช้ชี้ทิศทางเท่านั้น ดังนั้น จากรูปที่ 1.1 (b) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE}$ เมื่อไม่มีจุดปลายที่แน่นอนจึงไม่สามารถกำหนดความยาวที่แน่นอนได้ Ray มีความยาวไม่สิ้นสุด เริ่มต้นจากจุดหนึ่งตัดผ่านอีกจุดหนึ่ง แต่ระยะจากจุด (c) ถึงจุด D และ E สามารถกำหนดได้ดังนี้



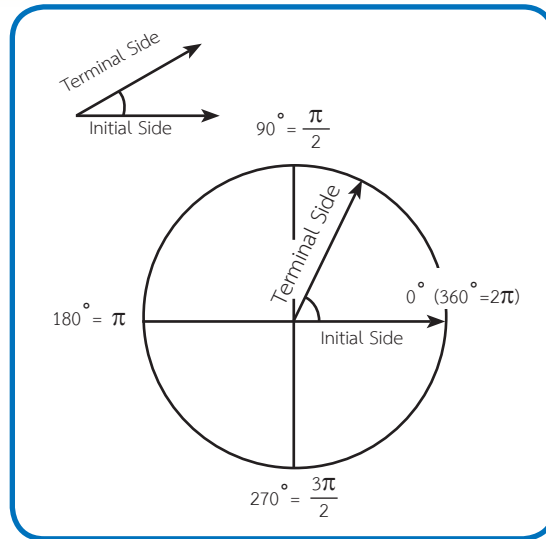
รูปที่ 1.1 ส่วนของเส้นตรงและรัศมี



มุม (Angles)

มุมเกิดจากการที่เส้นรัศมี 2 เส้น ใช้จุดปลายร่วมกัน เรียกจุดปลายร่วมกันนี้ว่า **จุดยอดของมุม (Vertex)** และเรียกเส้นรัศมีว่า **แขน (Side) ของมุม** จากรูปที่ 1.1 (c) จุดยอดของมุมคือ จุด B และเส้นรัศมีที่ประกอบเป็นมุม คือ BA และ BC ซึ่งการเรียกชื่อมุมอาจจะกระทำได้หลายวิธี เช่น $\angle B$, $\angle ABC$, $\angle CBA$ หรือ $\angle \theta$ ก็ได้

ขนาดของมุมเกิดขึ้นจากการหมุนเส้นรัศมีเส้นหนึ่งเป็นวงกลม เส้นรัศมีที่อยู่กับที่เรียกว่า **แขนตั้งต้น (Initial Side)** ส่วนเส้นรัศมีที่หมุนเรียกว่า **แขนกวาด (Terminal Side)** การหมุนแขนกวาด



รูปที่ 1.2 การเกิดมุมอันเนื่องจากการหมุนแทนกวาด

ครบ 1 รอบจะได้วงกลมขึ้น 1 วง ซึ่งจะมีจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุดยอดของมุมนั่นเอง ดังรูปที่ 1.2 ระบบในการวัดมุมที่นิยมใช้มี 2 แบบ คือ ระบบองศา (Degrees) และระบบเรเดียน (Radians) จากนั้นเมื่อหมุนแทนกวาดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาไปจนครบ 1 รอบ แล้วกลับมาที่ตำแหน่งทับกับแกนตั้งต้นอีกครั้ง มุมที่กวาดไปได้จะนับเป็น 360 องศา หรือ 2π เรเดียน ($360^\circ = 2\pi$ rad) ดังนั้นมุมที่แทนกวาดหมุนไปได้เพียงครึ่งหนึ่งจึงเป็น 180 องศา หรือ π เรเดียน ในทำนองเดียวกันการหมุนแทนไป 1 ใน 4 ของวงกลมจึงได้ 90 องศา หรือ $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน และ 3 ใน 4 ของวงกลมจึงได้ 270 องศา หรือ $\frac{3\pi}{2}$ เรเดียน ตามลำดับ ถ้าไม่มีเครื่องหมาย $^\circ$ กำกับไว้หลังตัวเลขบอกขนาดของมุม ให้ทราบในทันทีว่าเป็นการวัดมุมในระบบเรเดียน และเนื่องจาก $180^\circ = \pi$ rad ดังนั้น

$$1\text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3.1416} \approx 57.296^\circ \quad \text{และในทำนองกลับกัน}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \approx \frac{3.1416}{180^\circ} \approx 0.01745\text{ rad} \quad \text{จึงสามารถสรุปเป็นสูตรในการเปลี่ยนหน่วยการ}$$

วัดมุมได้ดังนี้

ในการเปลี่ยนเรเดียนให้เป็นองศา ให้คูณจำนวนเรเดียนด้วย $\frac{180^\circ}{\pi}$ หรือ 57.296 $^\circ$ (1.1ก)

ในการเปลี่ยนองศาให้เป็นเรเดียน ให้คูณจำนวนองศาด้วย $\frac{\pi}{180^\circ}$ หรือ 0.01745 (1.1ข)



ตัวอย่างที่ 1.1 จงเปลี่ยน ก) 1.89 และ ข) $\frac{5\pi}{6}$ ให้เป็นองศา

วิธีทำ ก) 1.89 เรเดียน $\approx 1.89 \times 57.296^\circ \approx 108.29$

$$\text{ข) } \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$$

ตัวอย่างที่ 1.2 จงเปลี่ยน ก) 120° และ ข) 82.5° ให้เป็นเรเดียน

$$\text{วิธีทำ ก) } 120^\circ = 120^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\text{ข) } 82.5^\circ \approx 82.5^\circ \times 0.01745 \approx 1.44 \text{ rad}$$

ในการเปลี่ยนหน่วยระหว่างเรเดียนกับองศา อาจจะใช้สัดส่วนของความสัมพันธ์นี้ได้

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \quad (1.2)$$

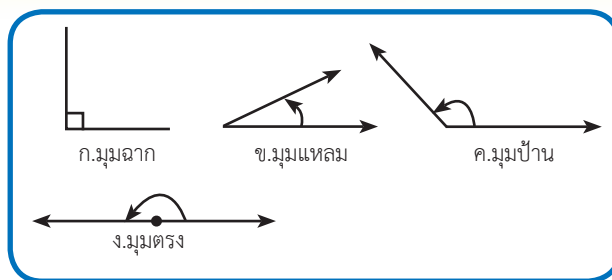
โดยที่ D คือ องศา และ R คือ เรเดียน

ตัวอย่างที่ 1.3 จงเปลี่ยน ก) 120° เป็นเรเดียน และ ข) $\frac{5\pi}{6}$ เป็นองศา

$$\text{วิธีทำ ก) } \frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \quad \therefore R = \frac{2\pi}{3}$$

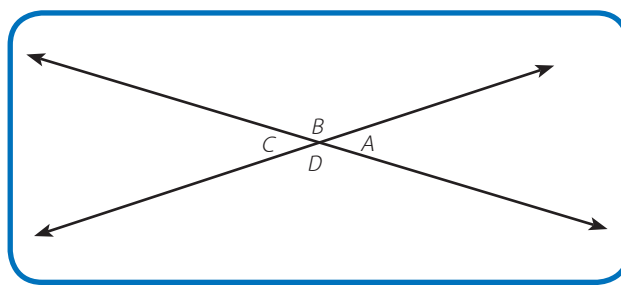
$$\text{ข) } \frac{D}{180^\circ} = \frac{5\pi / 6}{\pi} \quad \therefore D = 150^\circ$$

ชนิดของมุมแบ่งได้เป็น 4 ชนิด ดังรูปที่ 1.3 คือ ก) มุมฉาก (Right Angle) คือมุมที่วัดได้ 90° หรือ $\frac{\pi}{2}$ ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์เป็นรูปสี่เหลี่ยมเล็ก ๆ เขียนไว้ที่จุดยอดของมุม ข) มุมแหลม (Acute Angle) มุมที่วัดได้ระหว่าง 0° ถึง 90° (0 ถึง $\frac{\pi}{2}$) หรือ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ค) มุมป้าน (Obtuse Angle) มุมที่วัดได้ระหว่าง 90° ถึง 180° ($\frac{\pi}{2}$ ถึง π) หรือ $90^\circ < \theta < 180^\circ$ และ ง) มุมตรง (Straight Angle) มุมที่วัดได้ 180° หรือ π พอดี



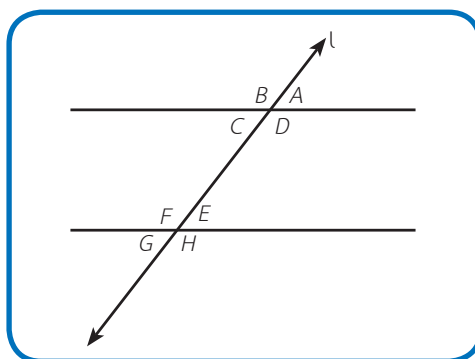
รูปที่ 1.3 มุมทั้ง 4 ชนิด

รูปที่ 1.4 แสดงเส้นตรงสองเส้นตัดกันเกิดเป็นมุม A, B, C และ D มุม A และ C เป็นมุมที่อยู่ตรงกันข้าม เช่นเดียวกันกับมุม B และ D ในทางเรขาคณิตถือว่ามุมตรงกันข้ามที่เกิดขึ้นจากการตัดกันของเส้นตรงมีขนาดเท่ากัน



รูปที่ 1.4 การเกิดมุมจากเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน

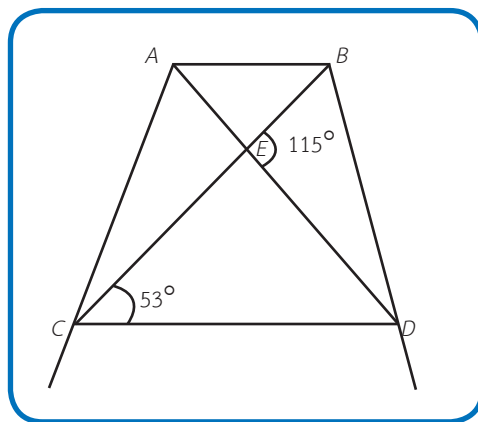
เส้นตัดขวาง (Transversal Line) คือ เส้นที่ลากตัดผ่านเส้นตรงตั้งแต่สองเส้นขึ้นไป พิจารณารูปที่ 1.5 ้ คือ เส้นตัดขวาง ก่อให้เกิดมุมขึ้น 8 มุม คือ A จนถึง H เรียกมุม C, D, E, F ว่า **มุมภายใน** (Interior Angle) และเรียกมุม A, B, G, H ว่า **มุมภายนอก** (Exterior Angle) จากความสัมพันธ์ที่ได้กล่าวไปแล้วจึงทำให้มุม A, C, E, G มีขนาดของมุมเท่ากันเช่นเดียวกับมุม B, D, F, H



รูปที่ 1.5 เส้นตัดขวาง



ตัวอย่างที่ 1.4 โครงสร้างบางส่วนของหอไอเฟลในประเทศฝรั่งเศส มีการออกแบบโดยใช้โครงถักโลหะ ลักษณะดังรูป ซึ่ง $\overline{AB}$ ขนานกับ $\overline{CD}$ ถ้า $\angle DCB = 53^\circ$ และ $\angle DEB = 115^\circ$ จงหาขนาดของ มุม ก) $\angle ABC$ ข) $\angle CED$ และ ค) $\angle AEC$



วิธีทำ ก) $\angle ABC$ เป็นมุมไขว้ของ $\angle BCD$ ดังนั้น $\angle ABC = \angle BCD = 53^\circ$

ข) $\angle CED$ เป็นมุมเสริมของ $\angle DEB$ ดังนั้น

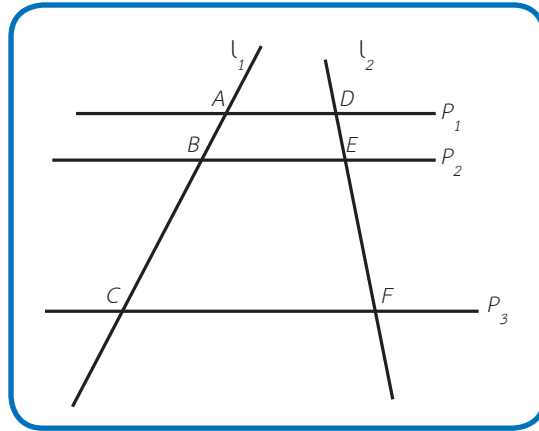
$$\angle CED = 180^\circ - \angle DEB = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

ค) $\angle AEC$ และ $\angle DEB$ เป็นมุมตรงกันข้ามของเส้นตัด ดังนั้น

$$\angle AEC = \angle DEB = 115^\circ$$

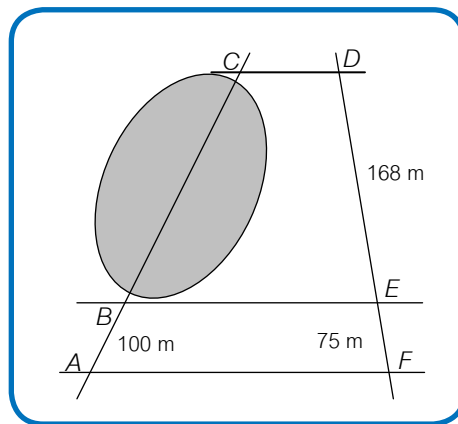
มีทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเส้นตรงและมุมอีกหนึ่งทฤษฎีได้กล่าวไว้ว่า ถ้าเส้นขนานถูกลากตัดด้วยเส้นตัดขวาง 2 เส้น สัดส่วนของด้านที่อยู่ตรงข้ามระหว่างเส้นขนานจะเท่ากัน พิจารณารูปที่ 1.6 กำหนดให้ P_1 , P_2 และ P_3 เป็นเส้นตรง 3 เส้นที่ขนานกัน และถูกตัดด้วยเส้นตัดขวาง 2 เส้น คือ l_1 และ l_2 โดยจุดตัดถูกกำหนดไว้ด้วยตัวอักษรดังรูป ส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ และ $\overline{DE}$ เป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามระหว่างเส้นขนาน เช่นเดียวกันกับ $\overline{BC}$ และ $\overline{EF}$ รวมทั้ง $\overline{AC}$ และ $\overline{DF}$ ดังนั้น

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \quad (1.3)$$



รูปที่ 1.6 เส้นตัดขวางสองเส้นลากผ่านเส้นขนาน

ตัวอย่างที่ 1.5 จงหาระยะทางที่ใช้ในการข้ามทะเลสาบดังรูป



วิธีทำ เส้นตรง AF, BE และ CD ขนานกัน โดยมีเส้นตัดขวาง AC และ DE ลากผ่าน จากความสัมพันธ์จะได้

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{DE} \quad \text{แทนค่าได้} \quad \frac{100}{75} = \frac{BC}{168}$$

$$\therefore BC = 100(168)/75 = 224 \text{ เมตร}$$





สามเหลี่ยม (Triangles)

สามเหลี่ยมเป็นรูปเหลี่ยมที่เกิดจากการประกอบเข้าด้วยกันของด้านที่มีความยาวแน่นอนจำนวน 3 ด้าน และมุมภายในสามเหลี่ยมทั้งสามมุมรวมกันจะได้ 180° หรือ π เรเดียนพอดี สามเหลี่ยมจำแนกได้หลายลักษณะดังรูปที่ 1.7

1. การแบ่งลักษณะของรูปสามเหลี่ยมโดยการใช้ด้านของรูปสามเหลี่ยม จะแบ่งได้เป็น 3 ชนิด ได้แก่

1.1 สามเหลี่ยมด้านไม่เท่า (Scalene Triangle) คือ สามเหลี่ยมซึ่งไม่มีด้านใดด้านหนึ่งยาวเท่ากัน

1.2 สามเหลี่ยมหน้าจั่ว (Isosceles Triangle) คือ สามเหลี่ยมที่มีด้าน 2 ด้านยาวเท่ากัน แต่ไม่เท่ากับด้านที่สาม

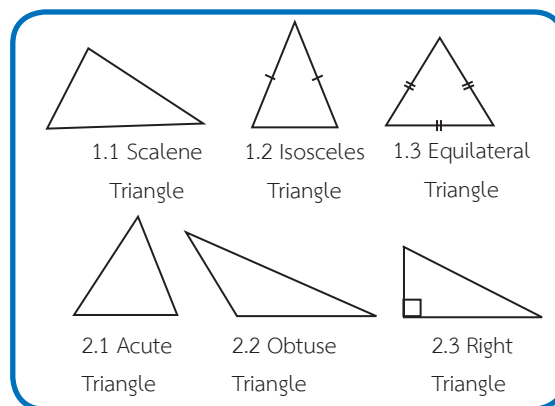
1.3 สามเหลี่ยมด้านเท่า (Equilateral Triangle) คือ สามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันทุกด้าน (มุมภายในจะเท่ากับ 60° เท่ากันทุกมุมด้วย)

2. การแบ่งลักษณะของรูปสามเหลี่ยมโดยการใช้มุมของรูปสามเหลี่ยม จะแบ่งได้เป็น 3 ชนิด ได้แก่

2.1 สามเหลี่ยมมุมแหลม (Acute Triangle) คือ สามเหลี่ยมที่มีมุมทั้ง 3 มุมเป็นมุมแหลม อาจจะมีขนาดของมุมเท่ากันหรือไม่ก็ได้

2.2 สามเหลี่ยมมุมป้าน (Obtuse Triangle) คือ สามเหลี่ยมที่มีมุม 1 มุมเป็นมุมป้าน (มุมมากกว่า 90°) อีก 2 มุมเป็นมุมแหลม

2.3 สามเหลี่ยมมุมฉาก (Right Triangle) คือ สามเหลี่ยมที่มีมุม 90° พอดีอยู่หนึ่งมุม อีกมุมเป็นมุมแหลม



รูปที่ 1.7 แสดงลักษณะของรูปสามเหลี่ยมแบบต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 1.6 จงหาขนาดของมุมที่สามของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งซึ่งมีขนาดของมุมที่ 1 และ 2 เป็น 37° และ 96° ตามลำดับ

วิธีทำ ทราบว่าผลรวมของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมเป็น 180° สมมติให้มุมที่ 3 เป็นมุม $\angle A$ ดังนั้น $\angle A = 180^\circ - 37^\circ - 96^\circ = 47^\circ$

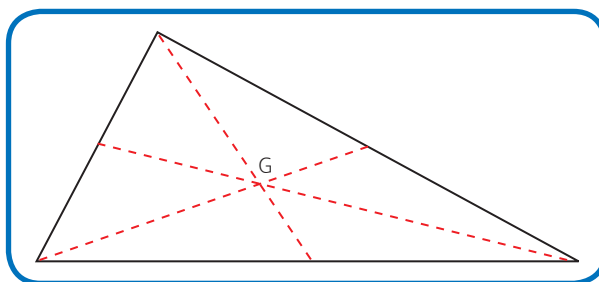
เส้นรอบรูป (Perimeter, P) ของสามเหลี่ยม หมายถึง ผลรวมของความยาวของด้านทั้งสามที่ประกอบขึ้นเป็นรูปสามเหลี่ยม ถ้ากำหนดให้สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีความยาวของด้านทั้งสามเป็น a, b และ c ดังนั้น เส้นรอบรูป P จึงเท่ากับ $a + b + c$ นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 1.7 ที่ดินรูปสามเหลี่ยมแปลงหนึ่งมีความยาวของด้านทั้งสามวัดได้เป็น 42 เมตร, 36.2 เมตร และ 58.7 เมตร เมื่อปักหลักบอกตำแหน่งไว้ที่มุมของที่ดินทั้งสามไว้แล้ว ต้องใช้เชือกความยาวเท่าไรพันที่หลักทั้งสามเพื่อบอกขนาดของเส้นรอบรูปของที่ดินแปลงนี้ได้พอดี

วิธีทำ

$$P = a + b + c$$
$$P = 42 + 36.2 + 58.7 = 136.9 \text{ เมตร}$$

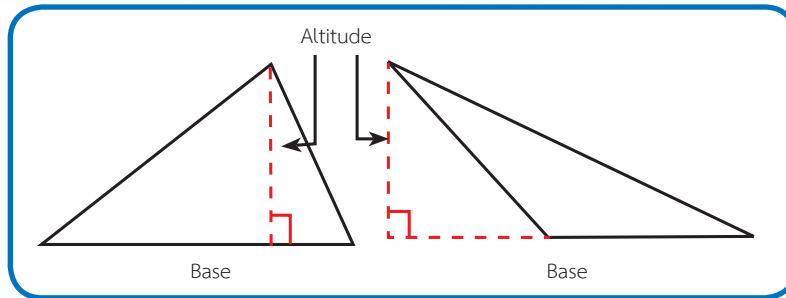
เส้นตรงซึ่งลากมาจากมุมของสามเหลี่ยมมายังจุดกึ่งกลางของด้านที่อยู่ตรงกันข้ามกับมุมนั้น เรียกว่า **เส้นมีเดีย (Median)** ดังนั้น สามเหลี่ยมรูปหนึ่งใด ๆ จะมีเส้นมีเดีย 3 เส้น ซึ่งจะพบว่าถ้าลากเส้นมีเดียทั้งสามแล้ว เส้นจะมาตัดกันที่จุดเซนทรอยด์ (Centroid, G) ของรูปสามเหลี่ยม ดังรูปที่ 1.8 ซึ่งจุดเซนทรอยด์นี้จะเป็นจุดศูนย์ถ่วง (Center of Gravity) ของรูปสามเหลี่ยมด้วย



รูปที่ 1.8 เส้นมีเดียและจุดเซนทรอยด์

เส้นตรงซึ่งลากมาจากมุมยอดของสามเหลี่ยมลงมาตั้งฉากกับด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมนั้นเรียกว่า **เส้นความสูง (Altitude) ของรูปสามเหลี่ยม** และเรียกด้านที่อยู่ตรงข้ามว่า **ฐาน (Base)** ในการแก้ปัญหาบางอย่างอาจจำเป็นต้องต่อเส้นฐานออกมาเพื่อให้ตัดกับเส้นความสูง ดังรูปที่ 1.9





รูปที่ 1.9 เส้นความสูงและฐานของรูปสามเหลี่ยม

พื้นที่ (Area) ของรูปสามเหลี่ยมหาได้จากผลคูณของ $1/2$ กับความยาวของฐานและความสูง ถ้ากำหนดให้ b คือ ความยาวจริงของฐาน (ไม่รวมเส้นต่อ) และ h คือความสูง ดังนั้น เขียนสูตรในการหาพื้นที่ (A) ของรูปสามเหลี่ยมได้เป็น

$$A = \frac{1}{2} bn \quad (1.4)$$

หน่วยของพื้นที่จะเป็นตารางหน่วย

ตัวอย่างที่ 1.8 จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวฐาน 1.2 เมตร และความสูง 4.5 เมตร

วิธีทำ จากสูตร $A = \frac{1}{2} bn$ โดยที่ $b = 1.2$ และ $h = 4.5$ แทนค่าได้

$$A = \frac{1}{2} (1.2)(4.5)$$

$$\therefore A = 2.7 \text{ m}^2$$

ในกรณีที่ไม่ทราบความสูงของรูปสามเหลี่ยม ในการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมอาจจะทำได้โดยใช้สูตรของฮีโร่ (Hero's Formula) ซึ่งต้องทราบความยาวของด้านทั้งสามแล้วหาขนาดครึ่งหนึ่งของเส้นรอบรูป (Semiperimeter)

กำหนดให้ a , b และ c เป็นความยาวของด้านทั้งสาม ดังนั้น ครึ่งหนึ่งของเส้นรอบรูป s จะเป็น $s = \frac{a + b + c}{2}$ แทนค่าเพื่อหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมตามสูตรของฮีโร่ ดังนี้

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (1.5)$$