



กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ตามหลักสูตรแกนกลาง พุทธศักราช 2551
(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

กษิณพ พ.ศ.พฒน

คณิตศาสตร์

ม.1-2-3 เข้า ม.4



★ เตรียมสอบเข้า ม.4

(• เจริญมอฺดมฯ • มหิดลวิทยานุสรณ์
• เจริญมทหฺร 4 เหล่าทัพ • ฯลฯ)



→ เตรียมสอบ O-NET



เตรียมสอบสนามต่างๆ

เรียบเรียงโดย

ดร.จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง

ວຽ.ບ. (ໄຟຟ້າ ຈຸ່ມໆ)

ค.ม. (การจัดการคุณภาพ มรภ.สวนสุนันทา)

ศษ.ด. (เทคโนโลยีการศึกษา ม.เกษตรศาสตร์)

นักวิชาการอิสระด้านคณิต วิทยา และเทคโนโลยีการศึกษา

หนังสือเล่มนี้พิมพ์จากกระดาษดิบเบิ้ล เอ
กระดาษจากคันทนา ช่วยแก้ปัญหาโลกร้อน



 02 279 6222

 www.porsor.com

f @pspattana



 @porsor



 @porsor_th



 @porsor_th

เรื่องที่ 1	จำนวนเต็ม	5
เรื่องที่ 2	การสร้างทางเรขาคณิต	23
เรื่องที่ 3	เลขยกกำลัง	40
เรื่องที่ 4	ทศนิยมและเศษส่วน	46
เรื่องที่ 5	รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ	86
เรื่องที่ 6	สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	101
เรื่องที่ 7	อัตราส่วน สัดส่วน และร้อยละ	108
เรื่องที่ 8	กราฟและความสัมพันธ์เชิงเส้น	113
เรื่องที่ 9	สถิติ (1)	124
เรื่องที่ 10	ทฤษฎีบทพีทาโกรัส	139
เรื่องที่ 11	ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง	147
เรื่องที่ 12	ปริซึมและทรงกระบอก	161
เรื่องที่ 13	การแปลงทางเรขาคณิต	167
เรื่องที่ 14	สมบัติของเลขยกกำลัง	173
เรื่องที่ 15	พหุนาม	185
เรื่องที่ 16	สถิติ (2)	194
เรื่องที่ 17	ความเท่ากันทุกประการ	209
เรื่องที่ 18	เส้นขนาน	218
เรื่องที่ 19	การให้เหตุผลทางเรขาคณิต	226
เรื่องที่ 20	การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง	245
เรื่องที่ 21	อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	259
เรื่องที่ 22	การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสอง	268
เรื่องที่ 23	สมการกำลังสองตัวแปรเดียว	273
เรื่องที่ 24	ความคล้าย	287
เรื่องที่ 25	กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง	293
เรื่องที่ 26	สถิติ (3)	306
เรื่องที่ 27	ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร	314
เรื่องที่ 28	วงกลม	318
เรื่องที่ 29	พีระมิด กรวย และทรงกลม	331
เรื่องที่ 30	ความน่าจะเป็น	335
เรื่องที่ 31	อัตราส่วนตรีโกณมิติ	345
แนวข้อสอบ ม.3 เข้า ม.4		357

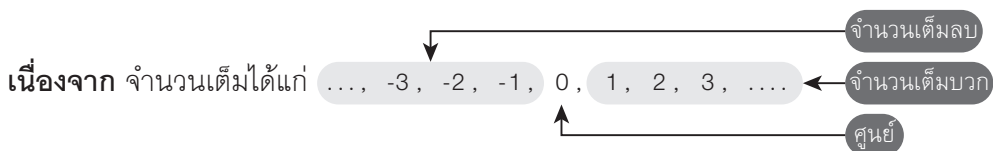


เทคนิคชุดที่ 1 : จำนวนเต็ม

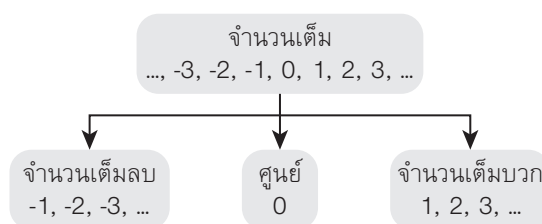
หลักการ จำนวนเต็ม (Integer) ได้แก่..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

- ◆ **ข้อสังเกต**
- จำนวนเต็มประกอบไปด้วย
 - จำนวนเต็มบวก ได้แก่ 1, 2, 3, ...
 - ศูนย์ ได้แก่ 0
 - จำนวนเต็มลบ ได้แก่ -1, -2, -3, ...
 - จำนวนเต็มบวก ก็คือ **จำนวนนับ** นั่นเอง
 - 0 เป็นจำนวนเต็ม แต่ 0 ไม่ใช่จำนวนนับ เช่น เราไม่นิยมพูดว่า มีเงินอยู่ 0 บาท แต่เราจะพูดว่าไม่มีเงิน
 - 0 อาจแทนความไม่มี หรือไม่ได้แทนความไม่มีก็ได้ดังนี้
 - แทนความไม่มี เช่น ไม่มีปากกา ไม่มีงาน เป็นต้น
 - ไม่ได้แทนความไม่มี เช่น ถ้าเราพูดว่าอุณหภูมิของน้ำเป็น 0 องศาเซลเซียส เราไม่ได้หมายความว่าน้ำไม่มีอุณหภูมิ แต่หมายความว่า น้ำมีความเย็นระดับหนึ่ง ซึ่งถูกกำหนดว่าเป็น 0 องศาเซลเซียส

● สิ่งที่ควรทราบ

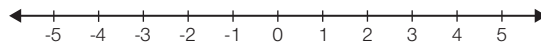


ดังนั้น เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเต็มกับจำนวนเต็มลบ, ศูนย์ และจำนวนเต็มบวก ได้ดังนี้



เทคนิคชุดที่ 2 : เส้นจำนวน

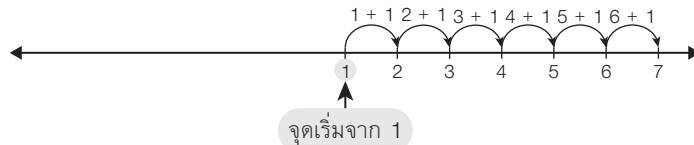
หลักการ เส้นจำนวน (Number Line) หมายถึง ชื่อของเส้นตรงที่ถูกลากขึ้นมาเส้นหนึ่งที่มีจุดหนึ่งบนเส้นแทนศูนย์ (0) และให้จุดทางซ้ายมือของศูนย์ (0) ที่ห่างออกไปเป็นช่องยาวหนึ่งหน่วยเท่า ๆ กัน เป็นตัวแทนของจำนวนเต็มลบ (-1, -2, -3, ...) ส่วนจุดทางขวามือของศูนย์ (0) ที่ห่างออกไปเป็นช่องยาวหนึ่งหน่วยเท่า ๆ กันเป็นตัวแทนของจำนวนเต็มบวก (1, 2, 3, ...) ดังรูป



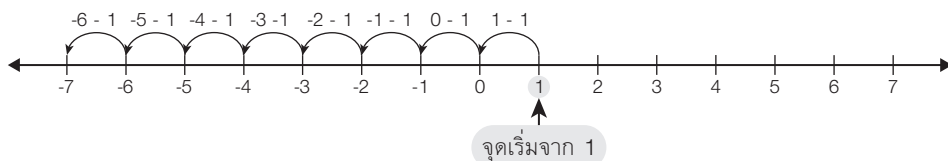
● สิ่งที่ต้องทราบ

1. จำนวนนับจะต้องเริ่มจาก 1 และ 1 เป็นจำนวนนับที่น้อยที่สุด ทำให้จำนวนเต็มอื่นๆ เกิดจาก 1 ดังนี้

1.1 ถ้าเรานับเพิ่มจาก 1 ขึ้นไปที่ละ 1 ก็จะได้ 2, 3, 4, ... ไปเรื่อยๆ อย่างไม่มีที่สิ้นสุด ซึ่งสามารถแสดงได้ด้วยแผนภาพที่นับเพิ่มจาก 1 ไปทางขวาทีละ 1 หน่วย ดังนี้

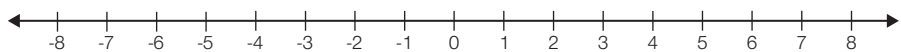


1.2 ถ้าเรานับลดจาก 1 ลงไปที่ละ 1 ก็จะได้ 0, -1, -2, -3, ... ไปเรื่อยๆ อย่างไม่มีที่สิ้นสุด ซึ่งสามารถแสดงได้ด้วยแผนภาพที่นับลดจาก 1 ไปทางซ้ายทีละ 1 หน่วย ดังนี้



เทคนิคชุดที่ 3 : การเปรียบเทียบจำนวนเต็ม

หลักการ การเปรียบเทียบจำนวนเต็มสองจำนวนที่ไม่เท่ากัน เพื่อจะตัดสินว่า จำนวนใดน้อยกว่า หรือจำนวนใดมากกว่า สามารถพิจารณาโดยใช้เส้นจำนวนดังนี้



จากเส้นจำนวนพบว่า จำนวนเต็มที่อยู่ทางขวาจะมากกว่าจำนวนเต็มที่อยู่ทางซ้ายเสมอ

เช่น 1. ลองเปรียบเทียบ 6 กับ 1 ดังนี้

พบว่า 6 มากกว่า 1 ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $6 > 1$

หรือ 1 น้อยกว่า 6 ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $1 < 6$

2. ลองเปรียบเทียบ 2 กับ 0 ดังนี้

พบว่า 2 มากกว่า 0 ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $2 > 0$

หรือ 0 น้อยกว่า 2 ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $0 < 2$

3. ลองเปรียบเทียบ 0 กับ -3 ดังนี้

พบว่า 0 มากกว่า -3 ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $0 > -3$

หรือ -3 น้อยกว่า 0 ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $-3 < 0$

4. ลองเปรียบเทียบ 1 กับ -2 ดังนี้

พบว่า 1 มากกว่า -2 ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $1 > -2$

หรือ -2 น้อยกว่า 1 ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $-2 < 1$

5. ลองเปรียบเทียบ -2 กับ -6 ดังนี้

พบว่า -2 มากกว่า -6 ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $-2 > -6$

หรือ -6 น้อยกว่า -2 ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $-6 < -2$

เทคนิคชุดที่ 4 : การบวกจำนวนเต็ม

หลักการ ในการศึกษาถึงการบวกจำนวนเต็ม นั้น ผู้เขียนจะอธิบายโดยแยกเป็นหัวข้อย่อยๆ ดังนี้

1. ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็ม

2. หลักเกณฑ์การบวกจำนวนเต็ม

2.1 การบวกจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก

2.2 การบวกจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบ

2.3 การบวกระหว่างจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบที่มีค่าสัมบูรณ์ไม่เท่ากัน

2.4 การบวกระหว่างจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากัน

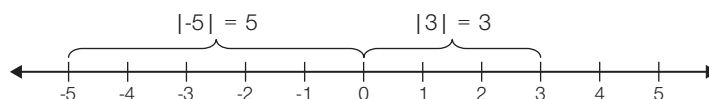
2.5 การบวกจำนวนเต็มใดๆ ด้วยศูนย์หรือการบวกศูนย์ด้วยจำนวนเต็มใดๆ

3. สรุปเรื่องการบวกจำนวนเต็ม

เทคนิคย่อย 4.1 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็ม

หลักการ 1. ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ของจำนวนเต็มใดๆ หมายถึง ระยะที่จำนวนเต็มนั้น อยู่ห่างจาก 0 บนเส้นจำนวน

2. ถ้ามีจำนวนเต็ม a ใดๆ เป็นจุดบนเส้นจำนวน แล้วให้เรียกระยะห่างระหว่าง 0 กับจำนวนเต็ม a นั้น ว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็ม a และค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็ม a นั้นถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|a|$ เช่น



ข้อสังเกต จะเห็นได้ว่าระยะห่างนั้นจะเป็นไปได้แค่ศูนย์กับบวกเท่านั้น เป็นลบไม่ได้ เช่น

1. ค่าสัมบูรณ์ของ 0 เท่ากับ 0 เนื่องจาก 0 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 0 หน่วย

2. ค่าสัมบูรณ์ของ 3 เท่ากับ 3 เนื่องจาก 3 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 3 หน่วย

3. ค่าสัมบูรณ์ของ -5 เท่ากับ 5 เนื่องจาก -5 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 5 หน่วย

โจทย์แนวข้อสอบ ม.3 เข้า ม.4

คำชี้แจง : เลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. ถ้า $n + 4$ เป็นจำนวนคู่ จะได้ n เป็นจำนวนชนิดใด

- 1) จำนวนคู่
- 2) จำนวนคี่
- 3) จำนวนคู่ หรือจำนวนคี่ก็ได้
- 4) ยังสรุปไม่ได้ว่า n เป็นจำนวนคู่ หรือจำนวนคี่

2. กำหนด a, b, c เป็นจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้เป็นสมบัติการแจกแจง

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $(a + b)c = ac + bc$ | 2) $(a - b) + c = (a + c) - (b + c)$ |
| 3) $(a + b) - c = (a - c) + (b - c)$ | 4) $(a - b)c = (a - c)(b - c)$ |

3. $2^{-1} \times 3 \times 8 \times 27 \times 2^3 \times 3^0$ มีค่าเท่ากับข้อใด

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1. $2^5 \times 3^4$ | 2. $2^6 \times 3^5$ |
| 3. $2^2 \times 3^4$ | 4. 0 |

4. ดวงอาทิตย์มีเส้นผ่านศูนย์กลางประมาณ 1,390,000 กิโลเมตร เขียนในรูป $A \times 10^n$ เมื่อ $1 \leq A < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็มได้ตามข้อใด

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1. 1.39×10^3 | 2. 1.39×10^4 |
| 3. 1.39×10^5 | 4. 1.39×10^6 |

5. จงหาค่าของ $\left[-2\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right] \div \left[1\frac{3}{16} - 2\frac{2}{3}\right]$

- | | |
|----------------------|---------------------|
| 1) $-1\frac{30}{71}$ | 2) $1\frac{21}{71}$ |
| 3) $-2\frac{15}{71}$ | 4) $2\frac{30}{71}$ |

6. $\frac{215}{999}$ ตรงกับทศนิยมข้อใด

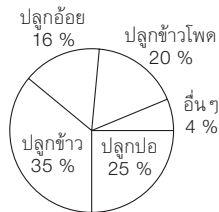
- | | |
|----------|----------|
| 1) 0.215 | 2) 0.215 |
| 3) 0.215 | 4) 2.15 |

7. เมื่อ 5 ปีที่แล้ว บุตรมีอายุเป็นหนึ่งในห้าของอายุมารดา ถ้าปัจจุบันบุตรมีอายุ 12 ปี แล้วจงหาอายุปัจจุบันของมารดา

8. อำนาจมีปากกาทิ้งอยู่ 5 โหล อำนาจซื้อปากกามาอีกจำนวนหนึ่ง เมื่อนำไปแจกนักเรียน 56 คน ปรากฏว่านักเรียนได้รับแจกปากกาคนละ 2 ด้ามพอดี จงหาว่าอำนาจซื้อปากกามาจำนวนเท่าใด

9. ขายโทรศัพท์มือถือเครื่องหนึ่งราคา 15,000 บาท จะได้กำไร 20% หากลดราคาเหลือ 12,000 บาท **จะได้กำไร หรือขาดทุนกี่บาท**
- 1) ขาดทุน 500 บาท
 - 2) กำไร 500 บาท
 - 3) กำไร 1000 บาท
 - 4) ขาดทุน 1000 บาท
10. ก ขายรถจักรยานให้ ข ได้กำไร 20% ข ขายต่อให้ ค ได้กำไร 10% ถ้า ค ซื้อจาก ข เป็นเงิน 2,772 บาท **อยากทราบว่าต้นทุนจักรยานที่ ก ซื้อมาราคากี่บาท**
- 1) 1,940 บาท
 - 2) 1,995 บาท
 - 3) 2,000 บาท
 - 4) 2,100 บาท
11. ถ้า $3x = 2k$ และ $5y = 8k$ แล้วอัตราส่วนของ $x : y$ **เท่ากับข้อใด**
- 1) 5 : 12
 - 2) 5 : 8
 - 3) 13 : 5
 - 4) 3 : 4

ใช้รูปการนำเสนอข้อมูลด้วยแผนภูมิ ดังข้างล่างนี้ตอบคำถามตัวอย่าง ข้อ 12 - ข้อ 13



พื้นที่ที่ใช้เพาะปลูกมีจำนวนทั้งหมด 360,000 ไร่

12. พื้นที่ที่ใช้ปลูกปอมีจำนวน

1. น้อยกว่าพื้นที่ที่ใช้ปลูกข้าว 26,000 ไร่
2. มากกว่าพื้นที่ที่ใช้ปลูกอ้อย 42,400 ไร่
3. น้อยกว่าพื้นที่ที่ใช้ปลูกอ้อยและข้าวรวมกัน 39,600 ไร่
4. น้อยกว่าพื้นที่ที่ใช้ปลูกอ้อยและปลูกข้าวโพดรวมกัน 39,600 ไร่

13. ถ้าปลูกข้าวโพดมีรายได้ไร่ละ 7,500 บาทต่อปี ปลูกอ้อยมีรายได้ไร่ละ 8,700 บาทต่อปี จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. รายได้ปลูกข้าวโพดมากกว่าปลูกอ้อย 40 ล้านบาท
2. รายได้ปลูกอ้อยน้อยกว่าปลูกข้าวโพด 38.8 ล้านบาท
3. รายได้ปลูกอ้อยรวมกันกับปลูกข้าวโพด $< 1,000$ ล้านบาท
4. รายได้ปลูกอ้อยรวมกันกับปลูกข้าวโพด $> 1,000$ ล้านบาท

14. จากข้อมูลที่กำหนดให้

ข้อมูลชุด A 1, 3, 2, 2, 5, 3, 4, 4, 3

ข้อมูลชุด B 1, 2, 4, 1, 2, 5, 2, 5, 1, 5, 5, 3

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลทั้งสองชุดเท่ากันและมีฐานของข้อมูลทั้งสองชุดเท่ากัน
2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลทั้งสองชุดเท่ากัน แต่มีฐานของข้อมูลสองชุดนี้ไม่เท่ากัน
3. มีฐานของข้อมูลทั้งสองชุดเท่ากัน แต่ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลสองชุดนี้ไม่เท่ากัน
4. มีฐานของข้อมูลสองชุดนี้ไม่เท่ากันและค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลสองชุดนี้ไม่เท่ากัน

: เฉลย : โจทย์แนวข้อสอบ ม.3 เข้า ม.4

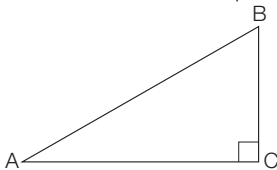
1. วิธีทำ n เป็นจำนวนคู่ ตอบ ตัวเลือก 1
2. วิธีทำ $(a + b)c = ac + bc$ ตอบ ตัวเลือก 1
3. วิธีทำ พบว่า $2^{-1} \times 3 \times 8 \times 27 \times 2^3 \times 3^0 = 2^{-1} \times 3^1 \times 2^3 \times 3^3 \times 2^3 \times 3^0$
 $= 2^{(-1+3+3)} \times 3^{(1+3+0)}$
ดังนั้น $2^{-1} \times 3 \times 8 \times 27 \times 2^3 \times 3^0 = 2^5 \times 3^4$ ตอบ ตัวเลือก 1
4. วิธีทำ $1,390,000 = 1.39 \times 10^6$ ตอบ ตัวเลือก 4
5. วิธีทำ $\left[-2\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right] \div \left[1\frac{3}{16} - 2\frac{2}{3}\right] = \left[-\frac{11}{4} + \frac{5}{6}\right] \div \left[\frac{19}{16} - \frac{8}{3}\right] = \frac{92}{71}$
ดังนั้น $\left[-2\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right] \div \left[1\frac{3}{16} - 2\frac{2}{3}\right] = 1\frac{21}{71}$ ตอบ ตัวเลือก 2
6. วิธีทำ $0.\dot{2}1\dot{5} = \frac{215 - 0}{999} = \frac{215}{999}$ ตอบ ตัวเลือก 1
7. วิธีทำ สมมติให้ อายุปัจจุบันของมารดาเป็น x ปี
เขียนสมการได้ดังนี้ $\frac{1}{5}(x - 5) = 12 - 5$ จะได้ $\frac{1}{5}(x - 5) = 7$
นำ 5 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ จะได้ $5 \times \frac{1}{5}(x - 5) = 5 \times 7$
 $x - 5 = 35$
นำ 5 มาบวกทั้งสองข้างของสมการ จะได้ $x - 5 + 5 = 35 + 5$
แสดงว่า $x = 40$
ตรวจสอบ เมื่อ 5 ปีที่แล้วบุตรมีอายุเป็นหนึ่งในห้าของอายุมารดา
คิดเป็น $\frac{1}{5}(40 - 5) = \frac{1}{5} \times 35 = 7$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขในโจทย์
ดังนั้น อายุปัจจุบันของมารดาเท่ากับ 40 ปี ตอบ 40 ปี
8. วิธีทำ สมมติให้ อำนาจซื้อปากกามาอีกจำนวน x ด้าม
เขียนสมการได้ดังนี้ $\frac{[(5 \times 12) + x]}{56} = 2$ จะได้ $\frac{(60 + x)}{56} = 2$
นำ 56 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ จะได้ $\frac{(60 + x)}{56} \times 56 = 2 \times 56$
 $60 + x = 112$
นำ 60 มาลบทั้งสองข้างของสมการ จะได้ $60 + x - 60 = 112 - 60$
แสดงว่า $x = 52$
ตรวจสอบ อำนาจมีปากกาอยู่ 5 โหล อำนาจซื้อปากกาอีกจำนวนหนึ่ง เมื่อนำไปแจกนักเรียน
56 คน ปรากฏว่านักเรียนได้รับแจกปากกาคคนละ $\frac{[(5 \times 12) + 52]}{56} = \frac{112}{56} = 2$ ซึ่งเป็นไปตาม
เงื่อนไขในโจทย์
ดังนั้น อำนาจซื้อปากกามาจำนวน 52 ด้าม ตอบ 52 ด้าม

เรื่องที่ 10 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จักรินทร์

■ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ลองพิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยที่ $\angle C$ เป็นมุมฉากดังนี้



จากรูป $\overline{AB}$ ถูกเรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก
และ $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ ถูกเรียกว่า ด้านประกอบมุมฉาก

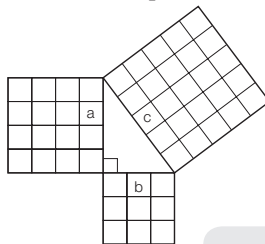
- ข้อสังเกต ด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุดเสมอ

■ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส กล่าวไว้ว่า

“สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ พบว่า พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับ ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก”

ลองพิจารณาสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านต่างๆ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนี้



จากรูป
จะได้

$$c^2 \text{ คือพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน } c \rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

a^2 คือพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน a
 b^2 คือพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน b

MATHMATIC 8
ม.3
เข้า
ม.4

: 139 :

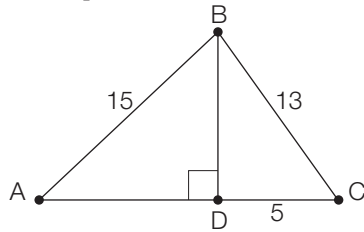
■ บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส กล่าวไว้ว่า

“สำหรับรูปสามเหลี่ยมใดๆ พบว่า ถ้ากำลังสองของความยาวของด้านด้านหนึ่ง เท่ากับ ผลบวกของกำลังสองของความยาวด้านอีกสองด้านที่เหลือ แล้วรูปสามเหลี่ยมดังกล่าวนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก”

หมายความว่า “สำหรับรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีด้านยาวเป็น a , b และ c
ถ้า $c^2 = a^2 + b^2$ แล้ว รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก”

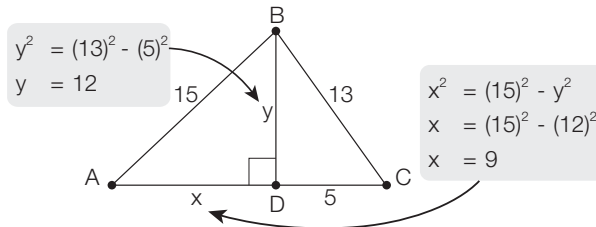
- ตัวอย่าง 1 จากรูป $\triangle ABC$ ถ้า $AB = 15$ นิ้ว, $BC = 13$ นิ้ว, $DC = 5$ นิ้ว และ $\angle BDC = 90^\circ$



จงหาพื้นที่สามเหลี่ยม ABC

1. 84 ตารางนิ้ว
2. 80 ตารางนิ้ว
3. 78 ตารางนิ้ว
4. 54 ตารางนิ้ว

วิธีทำ เขียนรูปเพิ่มเติมจากโจทย์ ดังนี้



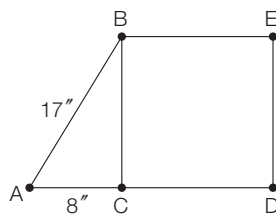
จากสูตร พื้นที่สามเหลี่ยม = $\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$

จะได้ พื้นที่สามเหลี่ยม ABC = $\frac{1}{2} (9 + 5)(12)$

ดังนั้น พื้นที่สามเหลี่ยม ABC = 84 ตารางนิ้ว

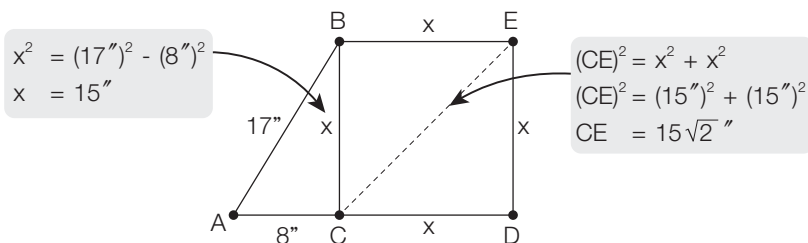
ตอบ ตัวเลือก 1

- ตัวอย่าง 2 จงหาเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมจัตุรัส BCDE



1. 15 นิ้ว
2. $15\sqrt{3}$ นิ้ว
3. $15\sqrt{2}$ นิ้ว
4. $15\sqrt{5}$ นิ้ว

วิธีทำ เขียนรูปเพิ่มเติมจากโจทย์ ดังนี้



จากรูป เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมจัตุรัส BCDE = $15\sqrt{2}$ นิ้ว

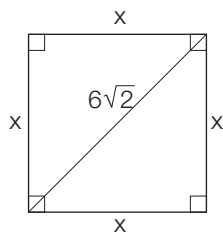
ดังนั้น เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมจัตุรัส BCDE เท่ากับ $15\sqrt{2}$ นิ้ว

ตอบ ตัวเลือก 3

- ตัวอย่าง 3 สี่เหลี่ยมจัตุรัส มีเส้นทแยงมุมยาว $6\sqrt{2}$ จะมีเส้นรอบรูปยาวเท่าใด

1. 44
2. 36
3. 32
4. 24

วิธีทำ เขียนรูปเพิ่มเติมตามโจทย์ ดังนี้



$$\begin{aligned} \text{จากรูป} \quad (6\sqrt{2})^2 &= x^2 + x^2 \\ 72 &= 2x^2 \end{aligned}$$

$$\text{จะได้} \quad x = 6$$

$$\begin{aligned} \text{พบว่า เส้นรอบรูป} &= 4x \\ &= 4(6) \end{aligned}$$

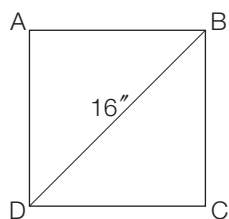
$$\text{จะได้ เส้นรอบรูป} = 24$$

ดังนั้น เส้นรอบรูปยาวเท่ากับ 24

ตอบ ตัวเลือก 4

ตัวอย่าง 4 ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส อยากทราบว่าด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวเท่าใด

(ตอบเป็นจำนวนเต็ม และเศษปัดทิ้ง)



1. 10 นิ้ว

2. 11 นิ้ว

3. 12 นิ้ว

4. 13 นิ้ว

วิธีทำ สมมติให้ x แทนความยาวแต่ละด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัส

$$\text{จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้} \quad (BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$$

$$(16)^2 = x^2 + x^2$$

$$256 = 2x^2$$

$$128 = x^2$$

$$x = \pm \sqrt{128}$$

$$\text{แสดงว่า} \quad x \approx 11$$

ดังนั้น ด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวเท่ากับ 11 นิ้ว

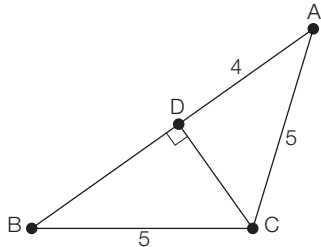
ตอบ ตัวเลือก 2



แบบทดสอบ : เรื่องที่ 10 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

คำชี้แจง : เลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. จากรูป $\triangle ABC$ มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย



1. 8 หน่วย
2. 10 หน่วย
3. 12 หน่วย
4. 14 หน่วย

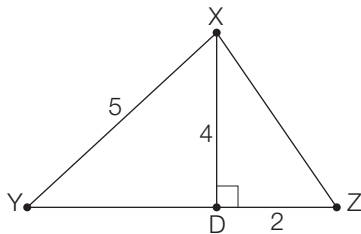
2. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 20 เซนติเมตร ถ้า $\triangle ABC$ มีพื้นที่ 150 ตารางเซนติเมตร แล้ว $\triangle ABC$ มีความยาวรอบรูปเท่าใด

1. 95 เซนติเมตร
2. 80 เซนติเมตร
3. 75 เซนติเมตร
4. 60 เซนติเมตร

3. สามเหลี่ยม ABC มี $\hat{C} = 90^\circ$ ถ้า $AB = 3x + 1$ หน่วย $AC = 3x$ หน่วย และ $BC = 11$ หน่วย แล้ว x เท่ากับเท่าใด

1. 12
2. 20
3. 24
4. 44

4.



จากรูป $YD : XZ$ เท่ากับเท่าไร

1. $3 : \sqrt{5}$
2. $3 : 10\sqrt{5}$
3. $3\sqrt{5} : 2$
4. $3\sqrt{5} : 10$

: 142 :

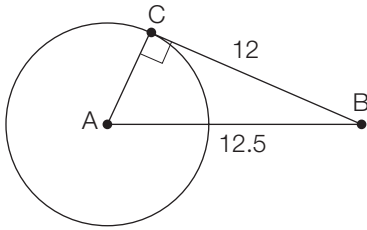
5. วงกลมวงหนึ่งมีพื้นที่ 18π ตารางหน่วย ถ้านำรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีขนาดใหญ่ที่สุดมาบรรจุอยู่ในวงกลมนี้ได้พอดี ผลรวมของเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้จะมีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 3 หน่วย
2. 6 หน่วย
3. 12 หน่วย
4. 24 หน่วย

6. วงกลมวงหนึ่งรัศมี 3 หน่วย จุด A อยู่นอกวงกลม ห่างจากจุดศูนย์กลางวงกลมเป็นระยะ 5 หน่วย ความยาวของเส้นตรงที่ลากจากจุด A มาสัมผัสกับวงกลม ตรงกับข้อใด

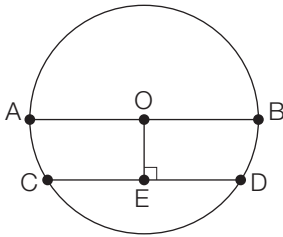
1. 8 หน่วย
2. 6 หน่วย
3. 4 หน่วย
4. 3 หน่วย

7. เส้นสัมผัสวงกลมยาว 12 หน่วย และเส้นตรง AB ยาว 12.5 หน่วย แล้วรัศมีวงกลมยาวเท่าไร



1. 3 หน่วย
2. 3.5 หน่วย
3. 4 หน่วย
4. 4.5 หน่วย

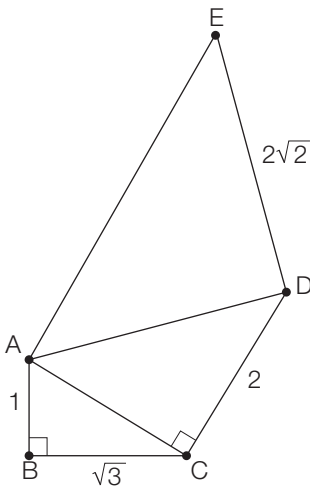
8.



จากรูป ถ้า $OE = 3$ เซนติเมตร และ $CE = 4$ เซนติเมตร เมื่อ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม แล้ว AB ยาวกี่เซนติเมตร

1. 10 เซนติเมตร
2. 8 เซนติเมตร
3. 7 เซนติเมตร
4. 5 เซนติเมตร

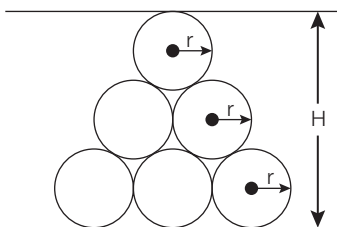
9.



จากรูป $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ และ $\triangle ADE$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มี $\hat{A}BC$, $\hat{A}CD$ และ $\hat{A}DE$ มีขนาด 90° องศา ซึ่ง $AB = 1$ หน่วย, $BC = \sqrt{3}$ หน่วย, $CD = 2$ หน่วย และ $DE = 2\sqrt{2}$ หน่วย จงหาพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสด้าน AE

1. 4 ตารางหน่วย
2. 8 ตารางหน่วย
3. 16 ตารางหน่วย
4. 32 ตารางหน่วย

10. ท่อต่อรีโอดีจำนวน 6 ท่อ วางซ้อนกันดังรูป ถ้ารัศมีของท่อต่อรีโอดีแต่ละท่อเท่ากับ 100 มม.

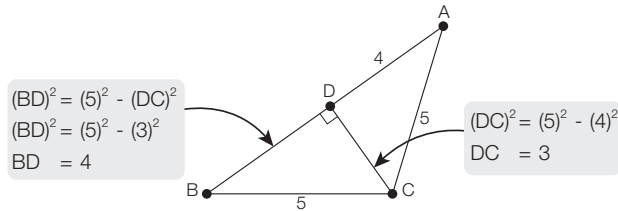


จงหาความสูง H

1. 200 มม.
2. $200(1 + \sqrt{3})$ มม.
3. $400\sqrt{3}$ มม.
4. $400(1 + \sqrt{3})$ มม.



1. วิธีทำ



จากสูตร พื้นที่สามเหลี่ยม = $\frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

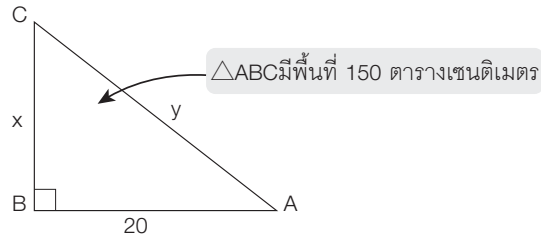
จะได้ พื้นที่สามเหลี่ยม ABC = $\frac{1}{2} \times AB \times DC = \frac{1}{2} (4 + 4)(3)$

แสดงว่า พื้นที่สามเหลี่ยม ABC = 12 ตารางหน่วย

ดังนั้น $\triangle ABC$ มีพื้นที่ 12 ตารางหน่วย

ตอบ ตัวเลือก 3

2. วิธีทำ เขียนรูปเพิ่มเติมจากโจทย์ ดังนี้



จากสูตร พื้นที่สามเหลี่ยม = $\frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

จะได้ พื้นที่สามเหลี่ยม ABC = $\frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

$$150 = \frac{1}{2} \times 20 \times x$$

แสดงว่า $x = 15$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $y^2 = x^2 + (20)^2$

$$y^2 = (15)^2 + (20)^2$$

แสดงว่า $y = 25$

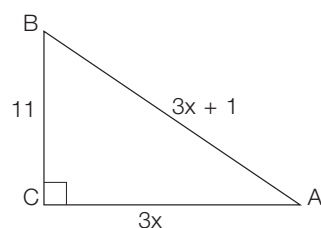
จากรูป $\triangle ABC$ มีความยาวรอบรูป = $x + y + 20$

$$= 15 + 25 + 20$$

ดังนั้น $\triangle ABC$ มีความยาวรอบรูป = 60 เซนติเมตร

ตอบ ตัวเลือก 4

3. วิธีทำ เขียนรูปเพิ่มเติมตามโจทย์ ดังนี้



$$\text{จากรูป } (3x + 1)^2 = (3x)^2 + (11)^2$$

$$9x^2 + 6x + 1 = 9x^2 + 121$$

$$6x + 1 = 121$$

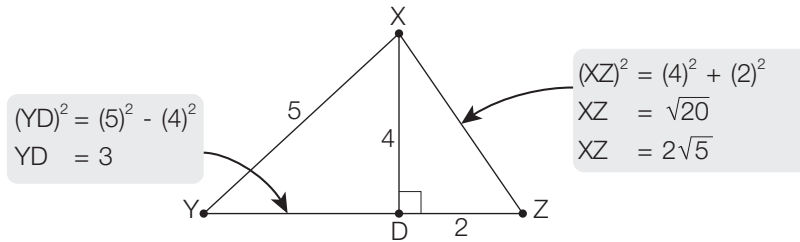
$$6x = 120$$

$$\text{จะได้ } x = 20$$

ดังนั้น x เท่ากับ 20

ตอบ ตัวเลือก 2

4. วิธีทำ เขียนรูปเพิ่มเติมจากโจทย์ ดังนี้



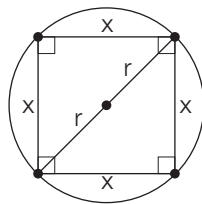
จากรูป $YD : XZ = 3 : 2\sqrt{5}$

$YD : XZ = [3 \times \sqrt{5}] : [2\sqrt{5} \times \sqrt{5}]$

ดังนั้น $YD : XZ = 3\sqrt{5} : 10$

ตอบ ตัวเลือก 4

5. วิธีทำ เขียนรูปเพิ่มเติมตามโจทย์ ดังนี้



จากสูตร พื้นที่วงกลม $= \pi r^2$

จากโจทย์ $18\pi = \pi r^2$

จะได้ $r = \sqrt{18}$

จากรูป $(2r)^2 = x^2 + x^2$

$(2\sqrt{18})^2 = 2x^2$

จะได้ $x = 6$

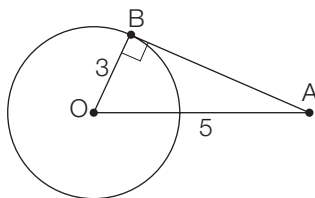
พบว่า $x + x + x + x = 6 + 6 + 6 + 6$

จะได้ $x + x + x + x = 24$

ดังนั้น ผลรวมของเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้จะมีค่าเท่ากับ 24 หน่วย

ตอบ ตัวเลือก 4

6. วิธีทำ เขียนรูปเพิ่มเติมตามโจทย์ ดังนี้



จากรูป $(AB)^2 = (5)^2 - (3)^2$

$(AB)^2 = 16$

จะได้ $AB = 4$

ดังนั้น ความยาวของเส้นตรงที่ลากจากจุด A มาสัมผัสกับวงกลมเท่ากับ 4 หน่วย

ตอบ ตัวเลือก 3

7. วิธีทำ จากโจทย์ $(AC)^2 = (12.5)^2 - (12)^2$

$(AC)^2 = 156.25 - 144$

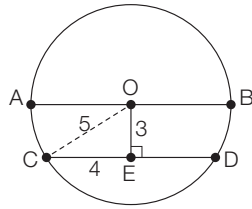
$(AC)^2 = 12.25$

จะได้ $AC = 3.5$

ดังนั้น รัศมีวงกลมยาวเท่ากับ 3.5 หน่วย

ตอบ ตัวเลือก 2

8. วิธีทำ เขียนรูปเพิ่มเติมจากโจทย์ได้ดังนี้



จาก ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } (OC)^2 &= (CE)^2 + (OE)^2 \\ (OC)^2 &= (4)^2 + (3)^2 \\ (OC)^2 &= 25 \\ OC &= 5 \end{aligned}$$

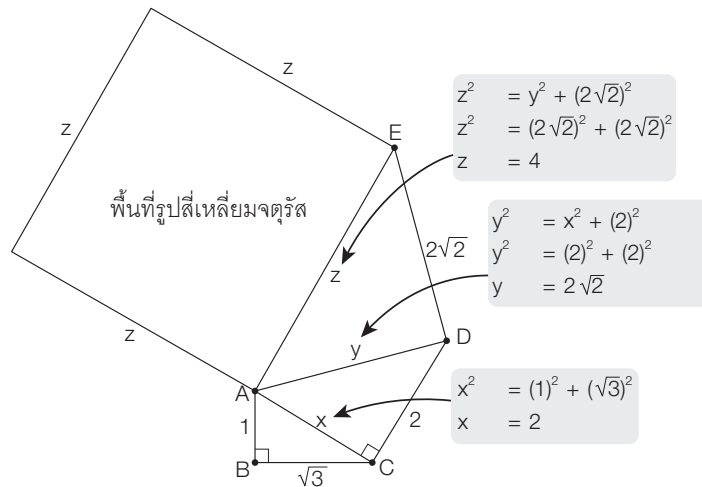
จากรูป $OA = OC$

$$AB = 2(OA) = 2(OC) = 2(5)$$

ดังนั้น $AB = 10$

ตอบ ตัวเลือก 1

9. วิธีทำ เขียนรูปเพิ่มเติมจากโจทย์ ดังนี้



$$\begin{aligned} z^2 &= y^2 + (2\sqrt{2})^2 \\ z^2 &= (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 + (2)^2 \\ y^2 &= (2)^2 + (2)^2 \\ y &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

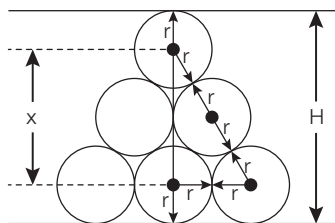
$$\begin{aligned} x^2 &= (1)^2 + (\sqrt{3})^2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

จากรูป พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสด้าน AE = ด้าน × ด้าน
= $z \times z = 4 \times 4$

ดังนั้น พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสด้าน AE = 16 ตารางหน่วย

ตอบ ตัวเลือก 3

10. วิธีทำ เขียนรูปเพิ่มเติมจากโจทย์ ดังนี้



จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } x^2 &= (4r)^2 - (2r)^2 \\ x^2 &= 16r^2 - 4r^2 \\ x^2 &= 12r^2 \\ x^2 &= 12(100)^2 \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ } x = 200\sqrt{3}$$

จากรูป $H = x + 2r = 200\sqrt{3} + 2(100)$

จะได้ $H = 200(1 + \sqrt{3})$

ดังนั้น ความสูง H เท่ากับ $200(1 + \sqrt{3})$ มม.

ตอบ ตัวเลือก 2

เรื่องที่ 11

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง

■ จำนวนจริง

1. จำนวนจริง (Real Number)

คือ จำนวนที่เป็นจำนวนตรรกยะ (Rational Number) หรือ จำนวนอตรรกยะ (Irrational Number)

2. จำนวนตรรกยะ

คือ จำนวนที่เขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วน $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ $b \neq 0$

นั่นหมายความว่า จำนวนตรรกยะเป็นจำนวนที่สามารถเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำได้

แสดงว่า จำนวนตรรกยะประกอบไปด้วยจำนวนต่างๆ ดังนี้

1) จำนวนนับ ได้แก่ 1, 2, 3, ...

2) จำนวนเต็มบวก ได้แก่ 1, 2, 3, ...

3) ศูนย์ ได้แก่ 0

4) จำนวนเต็มลบ ได้แก่ -1, -2, -3, ...

5) จำนวนเต็ม ได้แก่ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

6) จำนวนที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำของจำนวนเต็มที่ตัวส่วนไม่เป็นศูนย์ ซึ่งมีอยู่มากมาย เช่น $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{13}$ เป็นต้น

7) จำนวนที่เขียนอยู่ในรูปทศนิยมซ้ำ ซึ่งจำนวนที่อยู่ในรูปทศนิยมซ้ำมีมากมาย เช่น

$$2 = 2.0 = \frac{2}{1}$$

$$0.\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0.\dot{2}\dot{3} = \frac{23 - 0}{99} = \frac{23}{99}$$

$$0.\dot{2}1\dot{5} = \frac{215 - 0}{999} = \frac{215}{999}$$

$$3.2\dot{6}\dot{7} = 3 + \frac{267 - 2}{990} = 3 + \frac{265}{990} = 3\frac{53}{198}$$

3. จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ

ทำให้ทราบว่า จำนวนอตรรกยะเป็นจำนวนจริงที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วน $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ $b \neq 0$

นั่นหมายความว่า จำนวนอตรรกยะเป็นจำนวนที่ไม่สามารถเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำได้

ลองพิสูจน์ดูว่า $\sqrt{2}$ ไม่สามารถเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำได้ ดังนี้

สมมติว่า $\sqrt{2}$ สามารถทำเป็นเศษส่วนอย่างต่ำได้

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \text{ โดยที่ } a, b \in \mathbb{I} \text{ และ } \frac{a}{b} > 0 \text{ และ } b \neq 0$$

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

$$a^2 = 2b^2$$

จะเห็นได้ว่า a^2 กับ a จะต้องถูกหารด้วย 2 ลงตัว

สมมติให้ a อยู่ในรูป $2m$ โดย $m \in \mathbb{I}$ จะได้ $(2m)(2m) = 2b^2$

$$2m^2 = b^2$$

จะเห็นได้ว่า b^2 กับ b จะต้องถูกหารด้วย 2 ลงตัว

สมมติให้ b อยู่ในรูป $2n$ โดย $n \in \mathbb{I}$ จะได้ $2m^2 = 2n \cdot 2n$

$$m^2 = 2n^2$$

จะทำอย่างนี้ไปเรื่อย ๆ แสดงว่า $\frac{a}{b}$ ไม่ใช่เศษส่วนอย่างต่ำ **ขัดแย้งกับทฤษฎีบท**

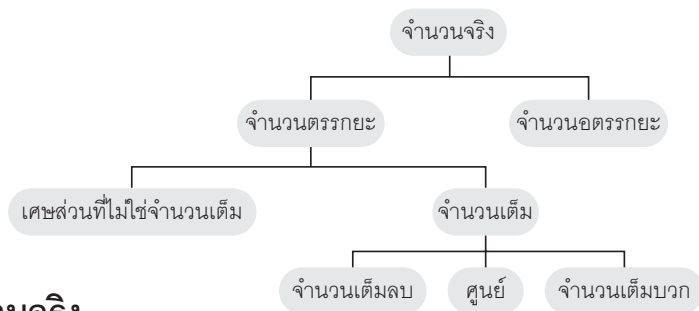
- **สรุปว่า** เราไม่สามารถหาเศษส่วนอย่างต่ำที่เท่ากับ $\sqrt{2}$ ได้

ดังนั้น $\sqrt{2}$ จึงเป็นจำนวนอตรรกยะ

และให้เชื่อเลยนะว่า $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \dots$ ก็เป็นจำนวนอตรรกยะด้วย ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับ $\sqrt{2}$

- **สำหรับ** π ก็เป็นจำนวนอตรรกยะด้วย โดยที่ π ถูกกำหนดให้เป็นสัญลักษณ์ของอัตราส่วนของความยาวเส้นรอบรูปของวงกลมกับความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลาง

4. แผนผังแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนจริงชนิดต่างๆ เป็นดังนี้



5. ระบบจำนวนจริง

- 1) **ระบบจำนวนจริง (Real Number System)** ประกอบด้วย 2 ส่วนคือ
 - ส่วนที่ 1 จำนวนจริง
 - ส่วนที่ 2 ตัวกระทำของมัน คือ บวก, ลบ, คูณ และหาร
- 2) **ระบบจำนวนตรรกยะ (Rational Number System)** ประกอบด้วย 2 ส่วนคือ
 - ส่วนที่ 1 จำนวนตรรกยะ
 - ส่วนที่ 2 ตัวกระทำของมัน คือ บวก, ลบ, คูณ และหาร
- 3) **ระบบจำนวนเต็ม (Integer System)** ประกอบด้วย 2 ส่วนคือ
 - ส่วนที่ 1 จำนวนเต็ม
 - ส่วนที่ 2 ตัวกระทำของมัน คือ บวก, ลบ, คูณ และหาร

4) ระบบจำนวนอตรรกยะ (Irrational Number System) ประกอบด้วย 2 ส่วน คือ

ส่วนที่ 1 จำนวนอตรรกยะ

ส่วนที่ 2 ตัวกระทำของมัน คือ บวก, ลบ, คูณ และหาร

5) ระบบจำนวน (Number System) ประกอบด้วย 2 ส่วน คือ

ส่วนที่ 1 จำนวน

ส่วนที่ 2 ตัวกระทำของมันคือ บวก, ลบ, คูณ และหาร

6. เส้นจำนวน

เส้นจำนวน (Number Line) หมายถึง ชื่อของเส้นตรงที่ถูกลากขึ้นมาเส้นหนึ่ง ที่มีจุดหนึ่งบนเส้น แทนศูนย์ (0) และให้จุดทางซ้ายมือของศูนย์ (0) ที่ห่างออกไปเป็นช่วงยาวหนึ่งหน่วยเท่า ๆ กัน เป็นตัวแทนของจำนวนเต็มลบ (-1, -2, -3, ...) ส่วนจุดทางขวามือของศูนย์ (0) ที่ห่างออกไปเป็นช่วงยาวหนึ่งหน่วยเท่า ๆ กัน เป็นตัวแทนของจำนวนเต็มบวก (1, 2, 3, ...) ดังรูป



7. สิ่งที่เราควรทราบ

จำนวนจริงทุกจำนวนสามารถใช้จุดบนเส้นจำนวนแทนได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น แสดงว่าเราสามารถค้นหาจำนวนอตรรกยะบนเส้นจำนวนได้ เช่น

1) จงหาตำแหน่งของ $\sqrt{2}$

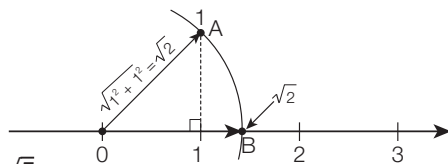
เราสามารถหาตำแหน่งของ $\sqrt{2}$ โดยมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ลากเส้นตรงขนาด 1 หน่วย ให้ตั้งฉากกับตำแหน่งของ 1 บนเส้นจำนวน

ขั้นตอนที่ 2 ลากเส้นโค้งของวงกลม ซึ่งมีรัศมีเท่ากับความยาวระหว่างจุด 0 ถึง A ให้ตัด

กับเส้นจำนวนที่จุด B

ขั้นตอนที่ 3 จุด B จะเป็นตำแหน่งของ $\sqrt{2}$ นั่นเอง ดังรูป



2) จงหาตำแหน่งของ $\sqrt{5}$

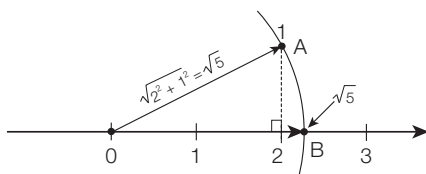
เราสามารถหาตำแหน่งของ $\sqrt{5}$ โดยมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ลากเส้นตรงขนาด 1 หน่วย ให้ตั้งฉากกับตำแหน่งของ 2 บนเส้นจำนวน

ขั้นตอนที่ 2 ลากเส้นโค้งของวงกลม ซึ่งมีรัศมีเท่ากับความยาวระหว่างจุด 0 ถึง A ให้ตัดกับ

เส้นจำนวนที่จุด B

ขั้นตอนที่ 3 จุด B จะเป็นตำแหน่งของ $\sqrt{5}$ นั่นเอง ดังรูป

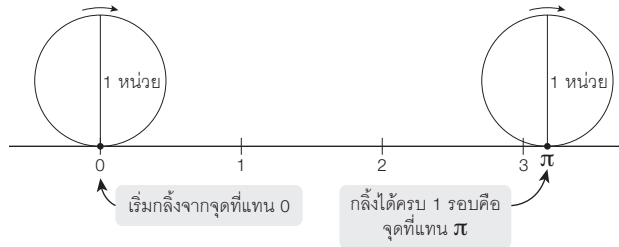


3) จงหาตำแหน่งของ π

เนื่องจาก $\pi = \frac{\text{ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม}}{\text{ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม}}$

แสดงว่า ถ้าเราสร้างวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 1 หน่วย แล้วความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมนั้นเท่ากับ π หน่วย

ดังนั้น เราสามารถหาตำแหน่งของ π บนเส้นจำนวนได้โดยการรกลิ้งวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 1 หน่วย จากจุดที่แทน 0 ไปทางขวาบนเส้นจำนวนให้ได้ครบ 1 รอบ ซึ่งจุดที่วงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 1 หน่วย กลิ้งไปได้ครบ 1 รอบ ก็คือจุดที่แทน π บนเส้นจำนวน ดังรูป



- 4) ถ้า a เป็นเลขจำนวนจริง แล้ว a กับ $-a$ จะอยู่ตรงข้ามกันเมื่อเทียบกับ 0 โดยห่างออกไปเท่า ๆ กัน
- 5) ถ้า a, b มีจุดบนเส้นจำนวนเป็นจุดเดียวกัน แล้ว a เท่ากับ b เขียนได้เป็น $a = b$
- 6) ถ้าจุดที่แทน a อยู่ทางซ้ายของจุดที่แทน b แล้ว a น้อยกว่า b เขียนได้เป็น $a < b$
- 7) ถ้าจุดที่แทน a อยู่ทางขวาของจุดที่แทน b แล้ว a มากกว่า b เขียนได้เป็น $a > b$

8. รากที่สอง

- 1) **บทนิยาม** กำหนดให้ a แทนจำนวนจริงบวกใด ๆ หรือศูนย์

รากที่สอง (Square Root) ของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วได้ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{a}$

- 2) **คำแปลจากบทนิยามที่ให้มาเป็นดังนี้**

2.1) รากที่สองของจำนวนจริงบวกใด ๆ จะมีอยู่ 2 ค่า คือ จำนวนจริงบวก กับ จำนวนจริงลบ

เช่น $7^2 = 49 \leftarrow 7 \text{ จะถูกเรียกว่ารากที่สองของ } 49$

$(-7)^2 = 49 \leftarrow -7 \text{ ก็ยังจะถูกเรียกว่ารากที่สองของ } 49$

เห็นไหมว่า รากที่สองของ 49 จะมีอยู่ 2 ค่า คือ 7 กับ -7 นั่นเอง

สามารถเขียนให้ดูง่าย ๆ ได้ว่า

$(\text{จำนวนจริงบวก หรือจำนวนจริงลบก็ได้})^2 = \text{จำนวนจริงบวก}$

2.2) รากที่สองของจำนวนจริงลบ **จะไม่มี** เนื่องจาก

$(\text{ไม่มีจำนวนจริงใด ๆ})^2 = \text{จำนวนจริงลบ}$

ถ้าไม่เชื่อก็คลองหาจำนวนจริง a ที่ทำให้ $a^2 = -16$ ดูซิ แล้วจะเห็นได้ว่าหาค่า a ไม่ได้

แน่นอน

2.3) รากที่สองของศูนย์ **มีค่าเท่ากับศูนย์**

$0^2 = 0 \leftarrow 0 \text{ จะถูกเรียกว่า รากที่สองของ } 0$

2.4) $(\text{รากที่สองของ } a)^2 = a$

3) ข้อตกลง

3.1) ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว รากที่สองของ a มีสองราก คือ

- 1) รากที่สองที่เป็นบวก ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{a}$
และ 2) รากที่สองที่เป็นลบ ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $-\sqrt{a}$

3.2) ถ้า $a = 0$ แล้ว รากที่สองของ a คือ 0

3.3) $(\sqrt{a})^2 = a$ และ $(-\sqrt{a})^2 = a$

3.4) $\sqrt{a}$ ที่เป็นรากที่สองที่เป็นบวกของ a จะถูกเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่า **กรณฑ์ที่สองของ a**

4) การพิจารณาว่า รากที่สองของจำนวนตรรกยะบวกเป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ

4.1) สำหรับจำนวนเต็ม พิจารณาดังนี้

4.1.1) ถ้าสามารถหาจำนวนเต็มจำนวนหนึ่งที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับจำนวนเต็มบวกที่กำหนดให้ แล้วรากที่สองของจำนวนนั้นจะเป็นจำนวนตรรกยะที่เป็นจำนวนเต็ม

แต่ 4.1.2) ถ้าไม่สามารถหาจำนวนเต็มที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับจำนวนเต็มบวกที่กำหนดให้ แล้วรากที่สองของจำนวนนั้นจะเป็นจำนวนอตรรกยะ

4.2) สำหรับจำนวนตรรกยะบวกอื่นๆ ที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม พิจารณาดังนี้

4.2.1) ถ้าสามารถหาจำนวนตรรกยะที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับจำนวนตรรกยะบวกที่กำหนดให้ แล้วรากที่สองของจำนวนนั้นจะเป็นจำนวนตรรกยะ

แต่ 4.2.2) ถ้าไม่สามารถหาจำนวนตรรกยะที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับจำนวนตรรกยะบวกที่กำหนดให้ แล้วรากที่สองของจำนวนนั้นจะเป็นจำนวนอตรรกยะ

5) การหารากที่สอง

การหารากที่สองของจำนวนเต็มบวกที่สามารถแยกตัวประกอบได้ อาจใช้การแยกตัวประกอบเพื่อช่วยเขียนให้อยู่ในรูปของจำนวนที่ยกกำลังสอง แล้วจึงหารากที่สอง เช่น

5.1 จงหารากที่สองของ 11,025

วิธีทำ พบว่า $11,025 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 = (3 \times 5 \times 7)^2$

จะได้ $11,025 = (105)^2$

และพบว่า $11,025 = (-105)^2$ ด้วย

ดังนั้น รากที่สองของ 11,025 = 105 และ -105

5.2 จงหา $\sqrt{900}$

วิธีทำ $\sqrt{900} = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = \sqrt{(2 \times 3 \times 5)^2} = 2 \times 3 \times 5$

ดังนั้น $\sqrt{900} = 30$

6) การเปรียบเทียบจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์ที่สอง

กำหนดให้ $a > 0$ และ $b > 0$ ถ้า $a < b$ แล้ว $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

7) ความจริงของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์ที่สองที่ต้องทราบ

กำหนดให้ $a > 0$ และ $b > 0$

7.1) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

7.2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

9. รากที่สาม

1) บทนิยาม กำหนดให้ a แทนจำนวนจริงบวกใด ๆ

รากที่สาม (Cube Root) ของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสามแล้วได้ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt[3]{a}$

2) คำแปลจากบทนิยามที่ให้มาเป็นดังนี้

2.1 รากที่สามของจำนวนจริงใด ๆ จะมีได้เสมอ และมีได้เพียงค่าเดียวที่มีเครื่องหมายเหมือนกับจำนวนนั้น

เช่น $5^3 = 125$ ← 5 จะถูกเรียกว่า รากที่สามของ 125

$(-5)^3 = -125$ ← -5 จะถูกเรียกว่า รากที่สามของ -125

2.2 รากที่สามของศูนย์ มีค่าเท่ากับศูนย์

$0^3 = 0$ ← 0 จะถูกเรียกว่า รากที่สามของ 0

2.3 (รากที่สามของ a)³ = a

3) ข้อตกลง

3.1 รากที่สามของ a ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt[3]{a}$

3.2 ถ้า $a = 0$ แล้ว รากที่สามของ a คือ 0

3.3 $(\sqrt[3]{a})^3 = a$

3.4 $\sqrt[3]{a}$ ที่เป็นรากที่สามของ a จะถูกเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่า กรณฑ์ที่สามของ a

4) การพิจารณาว่ารากที่สามของจำนวนตรรกยะบวกเป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ

4.1) สำหรับจำนวนเต็ม พิจารณาดังนี้

4.1.1) ถ้าสามารถหาจำนวนเต็มจำนวนหนึ่งที่ยกกำลังสามแล้วเท่ากับจำนวนเต็มที่กำหนดให้ แล้วรากที่สามของจำนวนนั้นจะเป็นจำนวนตรรกยะ

แต่ 4.1.2) ถ้าไม่สามารถหาจำนวนเต็มที่ยกกำลังสามแล้วเท่ากับจำนวนเต็มที่กำหนดให้ แล้วรากที่สามของจำนวนนั้นจะเป็นจำนวนอตรรกยะ

4.2) สำหรับจำนวนตรรกยะอื่นๆ

4.2.1) ถ้าสามารถหาจำนวนตรรกยะที่ยกกำลังสามแล้วเท่ากับจำนวนตรรกยะที่กำหนดให้ แล้วรากที่สามของจำนวนนั้นจะเป็นจำนวนตรรกยะ

แต่ 4.2.2) ถ้าไม่สามารถหาจำนวนตรรกยะที่ยกกำลังสามแล้วเท่ากับจำนวนตรรกยะที่กำหนดให้ แล้วรากที่สามของจำนวนนั้นจะเป็นจำนวนอตรรกยะ

5) การหารากที่สาม

การหารากที่สามของจำนวนจริงใด ๆ อาจใช้การแยกตัวประกอบเพื่อช่วยเขียนให้อยู่ในรูปของจำนวนที่ยกกำลังสาม แล้วจึงหารากที่สาม เช่น

5.1) จงหา $\sqrt[3]{21}$

วิธีทำ $\sqrt[3]{21} = \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3}$
 $= \sqrt[3]{3^3}$

ดังนั้น $\sqrt[3]{21} = 3$

5.2) จงหา $\sqrt[3]{-2,744}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \sqrt[3]{-2,744} &= \sqrt[3]{(-7) \times (-7) \times (-7) \times 2 \times 2 \times 2} \\ &= \sqrt[3]{(-7 \times 2)^3} \\ &= -7 \times 2\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \sqrt[3]{-2,744} = -14$$

6) การเปรียบเทียบจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์ที่สาม

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$\text{ถ้า } a < b \text{ แล้ว } \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$$

7) ความจริงของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์ที่สาม

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$7.1) \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \times b}$$

$$7.2) \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad \text{เมื่อ } b \neq 0$$

10. รากที่ n ของจำนวนจริง

1) บทนิยาม

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ

b เป็นรากที่ n และ a ก็ต่อเมื่อ $b^n = a$

2) คำแปลจากบทนิยามที่ให้มาเป็น ดังนี้

2.1) รากที่ 1 หรือรากที่ 0 หรือรากที่ จำนวนเต็มลบของจำนวนจริงใดๆ ไม่ถูกกำหนด ให้เกิดขึ้น (มีไม่ได้นั่นเอง)

2.2) แสดงว่ามีเฉพาะรากที่ 2, 3, 4, ... ของจำนวนจริงใดๆ

2.3) รากที่คู่ของจำนวนจริงบวก จะมีอยู่ 2 ค่า คือ จำนวนจริงบวก กับ จำนวนจริงลบ

$$\text{เช่น} \quad 2^4 = 16 \leftarrow 2 \text{ จะถูกเรียกว่า รากที่ 4 ของ } 16$$

$$(-2)^4 = 16 \leftarrow -2 \text{ ก็ยังถูกเรียกว่า รากที่ 4 ของ } 16$$

◎ **เห็นไหมว่า** รากที่ 4 ของ 16 จะมีอยู่ 2 ค่า คือ 2 กับ -2 นั่นเอง

สามารถเขียนให้ดูง่าย ๆ ได้ว่า

$$(\text{จำนวนจริงบวกก็ได้ จำนวนจริงลบก็ได้})^n = \text{จำนวนจริงบวก}$$

2.4) รากที่คู่ของจำนวนจริงลบ จะไม่มี เนื่องจาก (ไม่มีจำนวนจริงใด ๆ) n = จำนวนจริงลบ

ถ้าไม่เชื่อก็ลองหาจำนวนจริง a ที่ทำให้ $a^2 = -4$ ดูซิ แล้วจะเห็นได้ว่าหาค่า a ไม่ได้

แน่นอน

2.5) รากที่คี่ของจำนวนจริงใด ๆ จะมีได้เสมอ และมีได้เพียงค่าเดียว ที่มีเครื่องหมายเหมือนกับจำนวนจริงนั้น (หรือเป็น 0 เหมือนจำนวนจริงนั้น)

$$\text{เช่น} \quad 3^5 = 243 \leftarrow 3 \text{ จะถูกเรียกว่า รากที่ 5 ของ } 243$$

$$(-3)^5 = -243 \leftarrow -3 \text{ จะถูกเรียกว่า รากที่ 5 ของ } -243$$

$$0^7 = 0 \leftarrow 0 \text{ จะถูกเรียกว่า รากที่ 7 ของ } 0$$

2.6) รากที่สี่ของศูนย์มีค่าเท่ากับศูนย์ เช่น $0^4 = 0$ $\leftarrow$ 0 ถูกเรียกว่า รากที่ 4 ของ 0

รากที่ห้าของศูนย์มีค่าเท่ากับศูนย์ด้วยนะ เช่น $0^5 = 0$ $\leftarrow$ 0 ถูกเรียกว่า รากที่ 5 ของ 0

*** สรุปได้ว่า** $(0)^n = 0$ และ $(0)^n = 0$

2.7) จากข้อกำหนด $b^n = a$ เราอาจมองให้อยู่ในรูปแบบใหม่ได้ดังนี้

$$[\text{รากที่ } n \text{ ของ } a]^n = a$$

3) ค่าหลักของรากที่ n ของ a หรือ กรณฑ์ที่ n ของ a

3.1) ค่าหลักของรากที่ n ของ a หรือกรณฑ์ที่ n ของ a ถูกเขียนแทนด้วย $\sqrt[n]{a}$

3.2) เครื่องหมาย $\sqrt[n]{}$ ถูกเรียกว่า “เครื่องหมายกรณฑ์” และเรียก “n” ว่า “อันดับที่หรือดัชนีของกรณฑ์”

3.3) $\sqrt[n]{a}$ ถูกอ่านออกเสียงว่า “กรณฑ์ที่ n ของ x”

3.4) กำหนดให้ $\sqrt[n]{a}$ ถูกเขียนแทนด้วย $\sqrt[n]{a}$

3.5) $\sqrt[n]{1} = 1$

3.6) $(\sqrt[n]{a})^n = a$

4) ข้อสรุปเกี่ยวกับค่าหลักของรากที่ n ของ a หรือ กรณฑ์ที่ n ของ a หรือ $\sqrt[n]{a}$ ดังนี้

4.1) ถ้า $a = 0$ แล้ว $\sqrt[n]{a} = 0$

4.2) ถ้า $a > 0$ แล้ว $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริงบวก

4.3) ถ้า $a < 0$ และ n เป็นจำนวนคี่ แล้ว $\sqrt[n]{a}$ จะเป็นจำนวนจริงลบ

4.4) ถ้า $a < 0$ และ n เป็นจำนวนคู่ แล้ว $\sqrt[n]{a}$ จะไม่มีในระบบจำนวนจริง

4.5) ถ้ารากที่ n ของ a มีเพียงค่าเดียว แล้ว $\sqrt[n]{a}$ จะเป็นจำนวนบวก, ศูนย์ หรือลบก็ได้

เช่น ค่าหลักของรากที่ 3 ของ 125 คือ 5 $\leftarrow \sqrt[3]{125} = 5$

ค่าหลักของรากที่ 5 ของ -32 คือ -2 $\leftarrow \sqrt[5]{-32} = -2$

ค่าหลักของรากที่ 8 ของ 0 คือ 0 $\leftarrow \sqrt[8]{0} = 0$

ค่าหลักของรากที่ 7 ของ 0 คือ 0 $\leftarrow \sqrt[7]{0} = 0$

4.6) ถ้ารากที่ n ของ a มี 2 ค่า แล้วให้ทราบเลยว่า $\sqrt[n]{a}$ มันคือ ค่าที่เป็นจำนวนจริงบวกเท่านั้น

เช่น รากที่ 2 ของ 4 จะมีอยู่ 2 ค่า คือ 2 กับ -2

จะได้ ค่าหลักของรากที่ 2 ของ 4 คือ 2 นั่นคือ $\sqrt{4} = 2$ $\leftarrow$ ค่าบวก

แสดงว่า รากที่เป็นบวก คือ $\sqrt{4} = 2$ และรู้เองเลยนะว่า รากที่เป็นลบ คือ

$$-\sqrt{4} = -2 \text{ นั่นเอง}$$

และ ถ้ารากที่ n ของ a ไม่มี (คือกรณีรากที่คู่ของจำนวนจริงลบ) จะถือว่าไม่มีค่าหลักของรากที่ n ของ a

เช่น $\sqrt[4]{-625}$ ไม่มีในระบบจำนวนจริงเนื่องจากไม่มีค่าหลักของรากที่ 4 ของ -625 ในระบบจำนวนจริง

4.7) เห็นไหมว่า ค่าหลักของรากที่ n ของ a มันคือ กรณฑ์ที่ n ของ a นั่นเอง