

DRIVING RANGE OF ANALYTIC GEOMETRY

ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์

THEORY AND PROBLEMS

คณิตศาสตร์

วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์

MATHEMATICS OF ENGINEERS AND SCIENTISTS

FREE!
CALCULUS CONCEPT
MAPS



เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ : 2 มิติ, 3 มิติ

ANALYTIC GEOMETRY & SKETCHING CURVES : 2D, 3D

- ✓ สรุปสูตรนิยาม ทฤษฎี และตัวอย่างประกอบ
- ✓ 342 ตัวอย่างโจทย์พร้อมเฉลยโดยละเอียด
- ✓ 1098 โจทย์ปัญหาพร้อมคำตอบทุกข้อ
- ✓ 505 กราฟโดยโปรแกรม Mathcad & Mathematica & Maple

รองศาสตราจารย์ ศรีบุตร แวเวเจริญ
รองศาสตราจารย์ ดร. ชนศักดิ์ บำยเที่ยง

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ประวัติผู้แต่ง



รองศาสตราจารย์ ศรีบุต แววเจริญ



รองศาสตราจารย์ ดร.ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง

การศึกษา

- กศ.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยม มศว.บางเขน
- วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (นักเรียนทุน U.D.C.)

- กศ.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยม มศว.พิษณุโลก
- วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (นักเรียนทุน U.D.C.)
- ค.ด. (อุดมศึกษา), Cognate : สถิติ-วิจัย, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประสบการณ์

- หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
- รองคณบดีฝ่ายวิชาการ

- หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
- รองคณบดีฝ่ายวิชาการ, ฝ่ายพัฒนา, ฝ่ายกิจการนักศึกษา
- รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ

ปัจจุบัน

- ดำรงตำแหน่งรองศาสตราจารย์ ระดับ 9 ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ (มจพ.)

ผลงานตำราวิชาการร่วมกัน

- SERIES 1 อนุพันธ์และการประยุกต์
- SERIES 2 อินทิกรัลและการประยุกต์
- SERIES 3 แคลคูลัสหลายตัวแปร
- SERIES 4 การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์

- SERIES 5 สมการเชิงอนุพันธ์ 1
- SERIES 6 สมการเชิงอนุพันธ์ 2 และการแปลงลาปลาซ
- SERIES 7 เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ 2 มิติ, 3 มิติ
- SERIES 8 เมตริกซ์และพีชคณิตเชิงเส้น

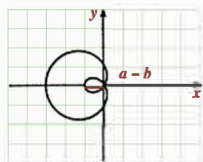
ผลงานวิจัย

- สื่อการเรียนการสอนสำหรับวิชาแคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ใน 3 มิติ
- Computer-assisted instruction (CAI) in Calculus
- สื่อการเรียนการสอนสำหรับ ปริพันธ์ของฟังก์ชัน 1: ความหมายของปริพันธ์จำกัดเขต ปริยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต
- Adomian Decomposition Method for Solving a Non-Linear Shallow Water Tsunami Model of Coupled Partial Differential Equations
- Development of a Mathematical Model of the Inshore Tsunami Wave Equations by Lax-Wendroff Numerical Method

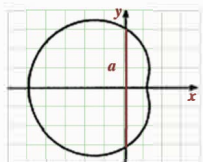
- Elliptic Number และเส้นรอบวงของวงรี
- Elliptic Number and Approximation Function
- การทดสอบการรู้เข้าของอนุกรมโดยใช้คอมพิวเตอร์
- The Development of The Prerequisite Model in Basic Mathematics Course for Science and Technology Undergraduate Curricular by Using Concept Maps
- การใช้คอมพิวเตอร์สร้างฟังก์ชันไมโครสโคป

รูปแบบของกราฟในระบบเชิงขั้ว (Polar Form)

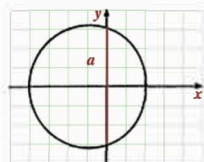
LIMACONS $r = b \pm a \cos \theta$ หรือ $r = b \pm a \sin \theta$



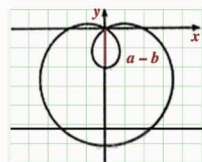
$r = b - a \cos \theta, \frac{b}{a} < 1$
(inner loop)



$r = b - a \cos \theta, 1 < \frac{b}{a} < 2$
(dimple)

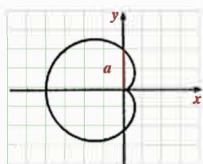


$r = b - a \cos \theta, \frac{b}{a} \geq 2$
(convex)

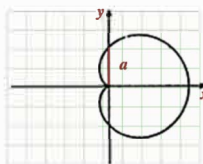


$r = b - a \sin \theta, \frac{b}{a} < 1$
(หมุน 90°)

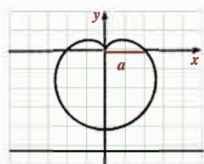
CARDIOIDS $r = a(1 \pm \cos \theta)$ และ $r = a(1 \pm \sin \theta)$ หรือ Limacons ซึ่ง $a = b$



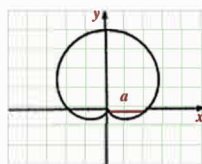
$r = a - a \cos \theta$



$r = a + a \cos \theta$
(หมุน 180°)



$r = a - a \sin \theta$
(หมุน 90°)



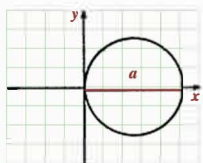
$r = a + a \sin \theta$
(หมุน 270°)

ROSE CURVES

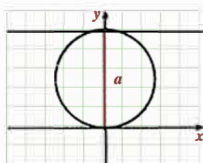
$r = a \cos n\theta$ หรือ $r = a \sin n\theta$

ถ้า n เป็นเลขคี่จะมี n กลีบ

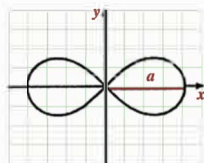
ถ้า n เป็นเลขคู่จะมี $2n$ กลีบ



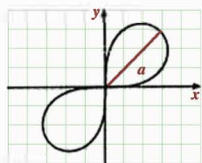
$r = a \cos \theta$
(วงกลม, หนึ่งกลีบ)



$r = a \sin \theta$
(หมุน 90°)



$r^2 = a^2 \cos 2\theta$

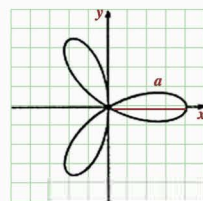


$r^2 = a^2 \sin 2\theta$
(หมุน 45°)

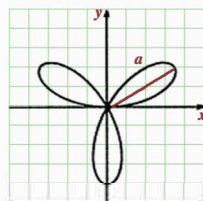
LEMNISCATES

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$ หรือ $r^2 = a^2 \sin 2\theta$

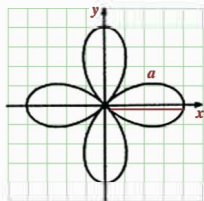
(2 loops)



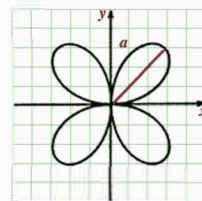
$r = a \cos 3\theta$
(3 กลีบ)



$r = a \sin 3\theta$
(หมุน 30°)

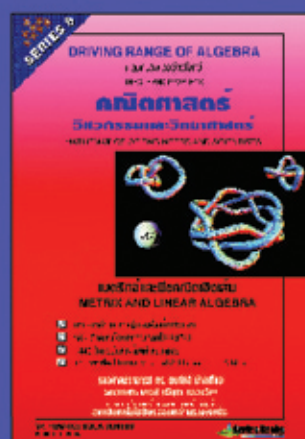
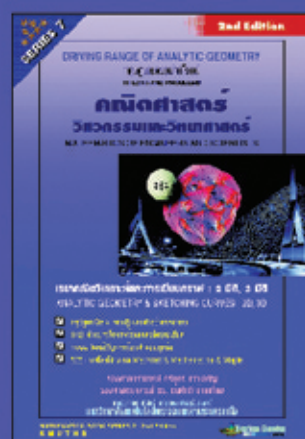
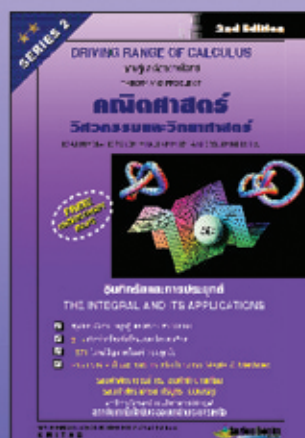
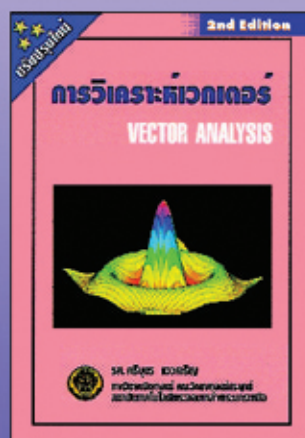


$r = a \cos 2\theta$
(4 กลีบ)



$r = a \sin 2\theta$
(หมุน 45°)

ผลงานของอาจารย์ผู้เขียนทั้งสองท่าน



SERIES 1, 2, 3 และ 7 เหมาะสำหรับผู้นิสิต นักศึกษา ปีที่ 1
SERIES 4, 5, 6 และ 8 เหมาะสำหรับผู้นิสิต นักศึกษา ปีที่ 2

ISBN: 978-616-590-539-8

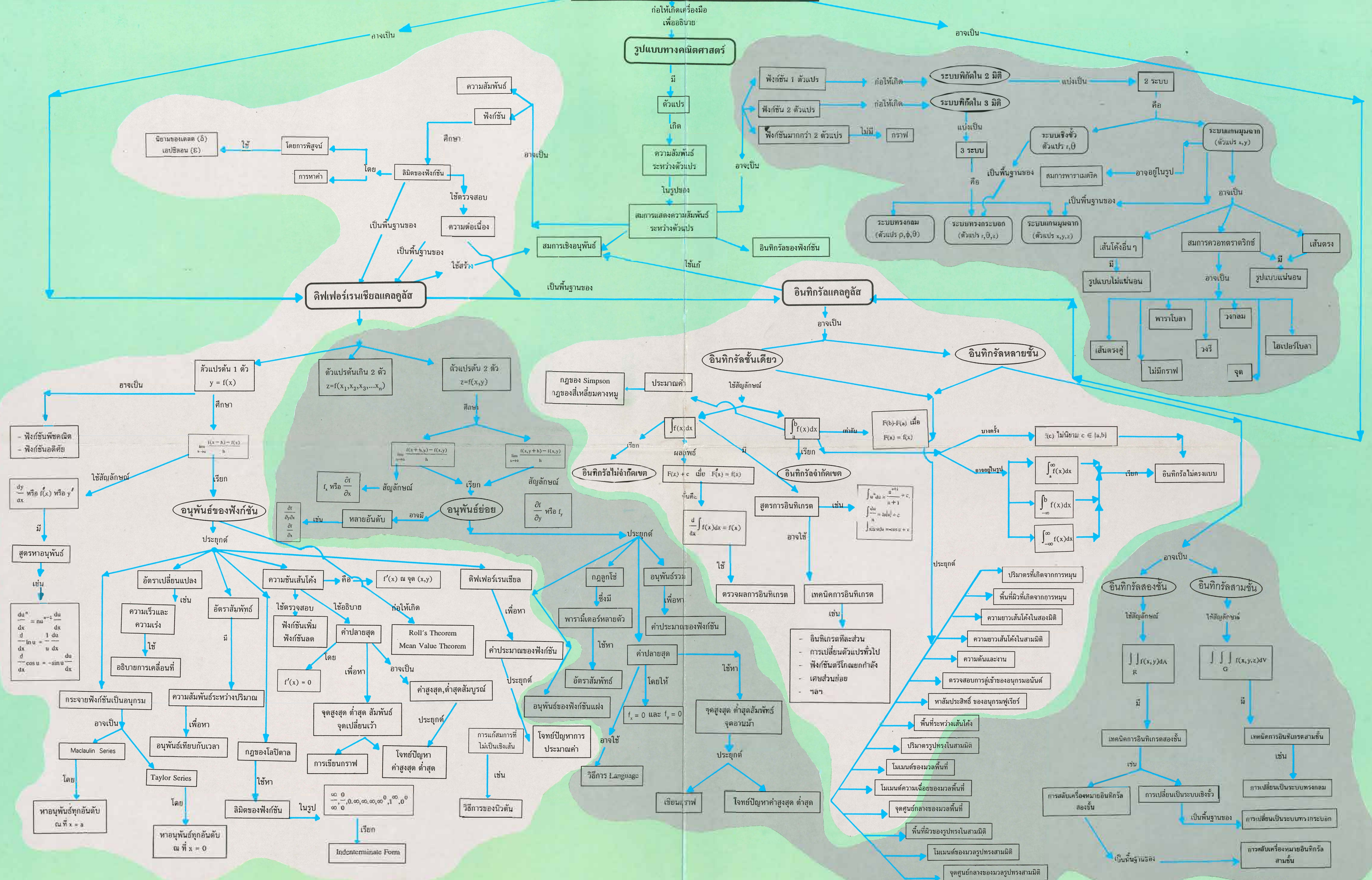
สงวนลิขสิทธิ์ในประเทศไทย ตาม พ.ร.บ. ลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2521
ห้ามลอกเลียนไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ นอกจากได้รับอนุญาต
<http://www.kmutnb.ac.th>

ISBN 978-616-590-539-8



ราคาปกิฤา: 249.- (6.99 \$)

249.- (6.99 \$)



สูตรอนุพันธ์
(TABLE OF DERIVATIVES)

1. $\frac{d}{dx} c = 0$, c เป็นค่าคงที่
2. $\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$, $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$
3. $\frac{d}{dx} (u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d}{dx} (uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$, $y = f(u)$, $u = g(x)$
7. $\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$
8. $\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$
9. $\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
10. $\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$
11. $\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
12. $\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$
13. $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
14. $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$
15. $\frac{d}{dx} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
16. $\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
17. $\frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
18. $\frac{d}{dx} \cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
19. $\frac{d}{dx} \cot^{-1} u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
20. $\frac{d}{dx} \csc^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
21. $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$
22. $\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u} \log_a e \frac{du}{dx}$
23. $\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$
24. $\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$
25. $\frac{d}{dx} \tanh u = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$
26. $\frac{d}{dx} \coth u = -\operatorname{csc}^2 u \frac{du}{dx}$
27. $\frac{d}{dx} \operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$
28. $\frac{d}{dx} \operatorname{csc} h u = -\operatorname{csc} h u \coth u \frac{du}{dx}$
29. $\frac{d}{dx} \sinh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}$
30. $\frac{d}{dx} \cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
31. $\frac{d}{dx} \tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}$

สูตรทั่วไป
(GENERAL FORMULAS)

1. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
2. $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$, c เป็นค่าคงที่
3. $\int u dv = uv - \int v du$ (IBP)

สูตรที่จำเป็น
(ESSENTIAL FORMULAS)

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C$
3. $\int e^u du = e^u + C$
4. $\int \sin u du = -\cos u + C$
5. $\int \cos u du = \sin u + C$
6. $\int \tan u du = \ln |\sec u| + C$
7. $\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C$
8. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$
9. $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$
10. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + C$
11. $\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + C$
12. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1} u + C$

สูตรที่มีประโยชน์
(USEFUL FORMULAS)

13. $\int \cot u du = \ln |\sin u| + C$
14. $\int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + C$
15. $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$
16. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$
17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$, $a > 0$
18. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$, $a > 0$
19. $\int \sinh u du = \cosh u + C$
20. $\int \cosh u du = \sinh u + C$
21. $\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$
22. $\int \csc h^2 u du = -\coth u + C$
23. $\int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C$
24. $\int \operatorname{csc} h u \coth u du = -\operatorname{csc} h u + C$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{a+bu}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{a+bu}$)

40. $\int \sqrt{a+bu} du = \frac{2}{15b^3} (3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + C$
41. $\int u^a \sqrt{a+bu} du = \frac{2}{b(2n+3)} \left[u^a (a+bu)^{3/2} - na \int u^{a-1} \sqrt{a+bu} du \right]$
42. $\int \frac{u du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2} (bu-2a)\sqrt{a+bu} + C$
43. $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3} (8a^2+3b^2u^2-4abu)\sqrt{a+bu} + C$
44. $\int \frac{u^3 du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^2\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)} \int \frac{u^{n-1} du}{\sqrt{a+bu}}$
45. $\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bu} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+bu} - \sqrt{a}} \right| + C, a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-a}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, a < 0 \end{cases}$
46. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)} \int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$
47. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u} du = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$
48. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2} \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{u^2 \pm a^2}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{u^2 \pm a^2}$)

49. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
50. $\int u \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{1}{3} (u^2 \pm a^2)^{3/2} + C$
51. $\int u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 \pm a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
52. $\int \frac{u^3 du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{u^2 \pm a^2}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} - a^2 \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
53. $\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 \pm a^2} - a \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{u^2 \pm a^2}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{u^2 \pm a^2}$)

54. $\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
55. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
56. $\int \frac{u^3 du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
57. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 \pm a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{u + \sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} \right| + C$
58. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C$
59. $\int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} = \mp \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2 u} + C$
60. $\int (u^2 \pm a^2)^{3/2} du = \frac{u}{8} (2u^2 \pm 5a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
61. $\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \pm \frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{a^2 - u^2}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{a^2 - u^2}$)

62. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
63. $\int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
64. $\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$
65. $\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
66. $\int \frac{u^3 du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
67. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$
68. $\int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$

69. $\int (a^2 - u^2)^{3/2} du = \frac{u}{4} (a^2 - u^2)^{3/2} + \frac{3a^2}{8} u \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
70. $\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + C$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{2au - u^2}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{2au - u^2}$)

71. $\int \sqrt{2au - u^2} du = \frac{u-a}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
72. $\int u \sqrt{2au - u^2} du = \frac{2u^2 - au - 3a^2}{6} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
73. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u} du = \sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
74. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2} du = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
75. $\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
76. $\int \frac{u du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
77. $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u+3a)\sqrt{2au - u^2}}{2} + \frac{3a^2}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
78. $\int \frac{du}{u\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C$
79. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^n} du = \frac{(2au - u^2)^{3/2}}{(3-2n)u^{n-1}} + \frac{n-3}{(2n-3)a} \int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^{n-1}} du$, $n \neq \frac{3}{2}$
80. $\int \frac{u^n du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{u^{n-1}\sqrt{2au - u^2}}{n} + \frac{a(2n-1)}{n} \int \frac{u^{n-1} du}{\sqrt{2au - u^2}}$
81. $\int \frac{du}{u^3 \sqrt{2au - u^2}} = \frac{\sqrt{2au - u^2}}{a(1-2n)u^2} + \frac{n-1}{(2n-1)a} \int \frac{du}{u \sqrt{2au - u^2}}$
82. $\int \frac{u-a}{(2au - u^2)^{3/2}} du = \frac{u-a}{a^2 \sqrt{2au - u^2}} + C$
83. $\int \frac{u du}{(2au - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a\sqrt{2au - u^2}} + C$

อินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
(FORMS CONTAINING TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

84. $\int \sin^2 u du = \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} + C$
85. $\int \cos^2 u du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} + C$
86. $\int \tan^2 u du = \tan u - u + C$
87. $\int \cot^2 u du = -\cot u - u + C$
88. $\int \sec^3 u du = \frac{1}{2} \sec u \tan u + \frac{1}{2} \ln |\sec u + \tan u| + C$
89. $\int \csc^3 u du = -\frac{1}{2} \csc u \cot u + \frac{1}{2} \ln |\csc u - \cot u| + C$
90. $\int \sin^n u du = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u du$
91. $\int \cos^n u du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u du$
92. $\int \tan^n u du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u du$
93. $\int \cot^n u du = \frac{1}{n-1} \cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u du$
94. $\int \sec^n u du = \frac{1}{n-1} \tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u du$
95. $\int \csc^n u du = -\frac{1}{n-1} \cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u du$
96. $\int \sin mu \sin nu du = \frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} + C$, $m^2 \neq n^2$
97. $\int \cos mu \cos nu du = \frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} + C$, $m^2 \neq n^2$
98. $\int \sin mu \cos nu du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C$, $m^2 \neq n^2$
99. $\int \sin u du = -\cos u + C$
100. $\int \cos u du = \sin u + C$

อินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
(FORMS CONTAINING INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

101. $\int u^2 \sin u du = 2u \sin u + (2-u^2) \cos u + C$
102. $\int u^2 \cos u du = 2u \cos u + (u^2-2) \sin u + C$
103. $\int u^a \sin u du = -u^a \cos u + a \int u^{a-1} \cos u du$
104. $\int u^a \cos u du = u^a \sin u - a \int u^{a-1} \sin u du$
105. $\int \sin^m u \cos^n u du = -\frac{\sin^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} u \cos^n u du$
= $\frac{\sin^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m u \cos^{n-2} u du$
ถ้า $m = -n$ ใช้สูตร 92 หรือ 93
106. $\int \sin^{-1} u du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$
107. $\int \cos^{-1} u du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$
108. $\int \tan^{-1} u du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C$
109. $\int u \sin^{-1} u du = \frac{2u^2-1}{4} \sin^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$
110. $\int u \cos^{-1} u du = \frac{2u^2-1}{4} \cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$
111. $\int u \tan^{-1} u du = \frac{u^2+1}{2} \tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$
112. $\int u^a \sin^{-1} u du = \frac{1}{n+1} \left(u^{n+1} \sin^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right)$, $n \neq -1$
113. $\int u^a \cos^{-1} u du = \frac{1}{n+1} \left(u^{n+1} \cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right)$, $n \neq -1$
114. $\int u^a \tan^{-1} u du = \frac{1}{n+1} \left(u^{n+1} \tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{1+u^2} \right)$, $n \neq -1$

อินทิกรัลของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม
(EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FORMS)

115. $\int u^a e^u du = \frac{1}{a+1} (u^{a+1} e^u - (a+1) \int u^a e^u du)$
116. $\int u^a e^{au} du = \frac{1}{a} u^a e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{a-1} e^{au} du$
117. $\int \frac{e^u}{u^n} du = -\frac{e^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^u}{u^{n-1}} du$
118. $\int \ln u du = u \ln u - u + C$
119. $\int (\ln u)^n du = u (\ln u)^n - n \int (\ln u)^{n-1} du$
120. $\int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \left(\ln u - \frac{1}{n+1} \right) + C$
121. $\int \frac{(\ln u)^n}{u} du = \frac{(\ln u)^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
122. $\int \frac{du}{u \ln u} = \ln |\ln u| + C$
123. $\int u^m (\ln u)^n du = \frac{u^{m+1} (\ln u)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int u^m (\ln u)^{n-1} du$
124. $\int \frac{u^m}{(\ln u)^n} du = -\frac{u^{m+1}}{(n-1)(\ln u)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{u^m}{(\ln u)^{n-1}} du$
125. $\int e^{au} \sin bu du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2} (a \sin bu - b \cos bu) + C$
126. $\int e^{au} \cos bu du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2} (a \cos bu + b \sin bu) + C$

อินทิกรัลของไฮเพอร์โบลิกฟังก์ชัน
(FORMS CONTAINING HYPERBOLIC FUNCTIONS)

127. $\int \sinh u du = \cosh u + C$
128. $\int \cosh u du = \sinh u + C$
129. $\int \tanh u du = \ln \cosh u + C$

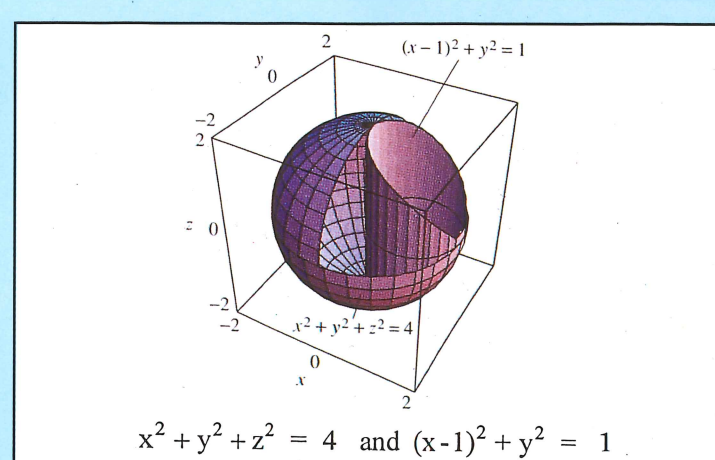
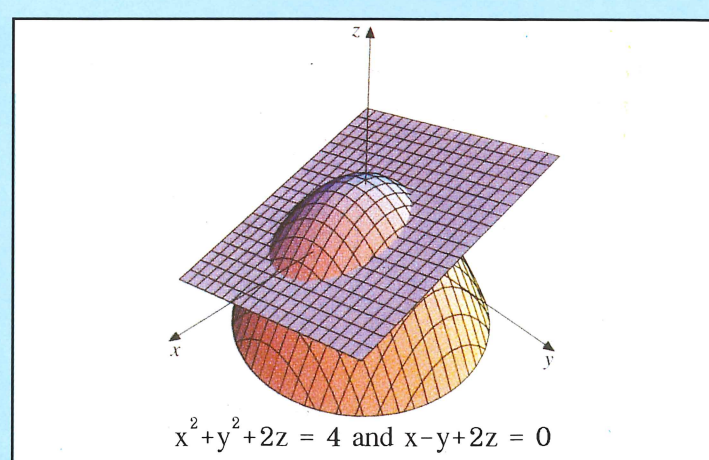
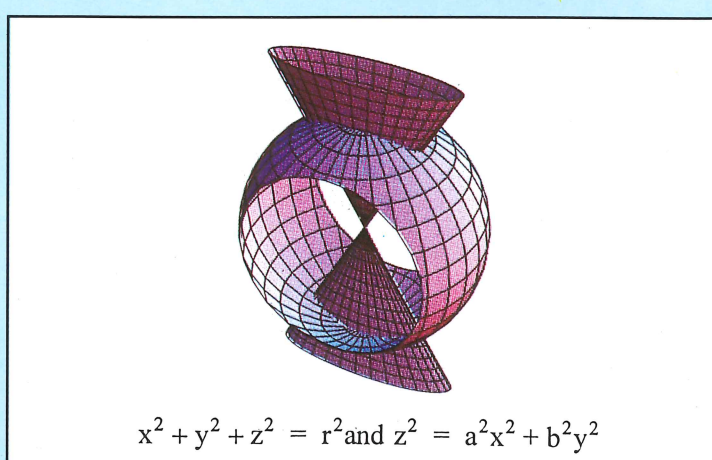
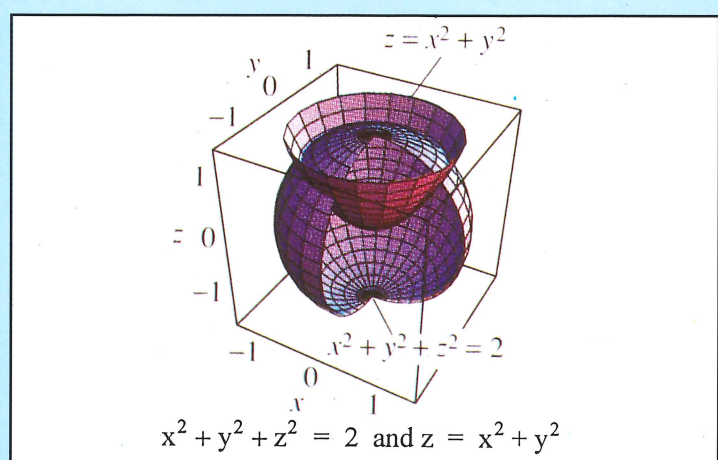
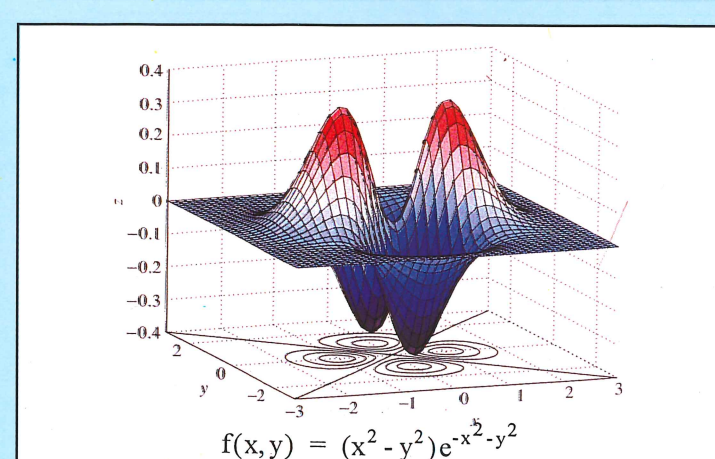
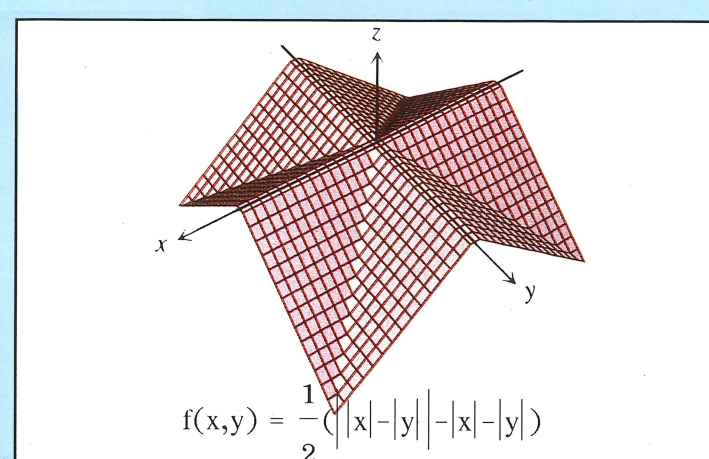
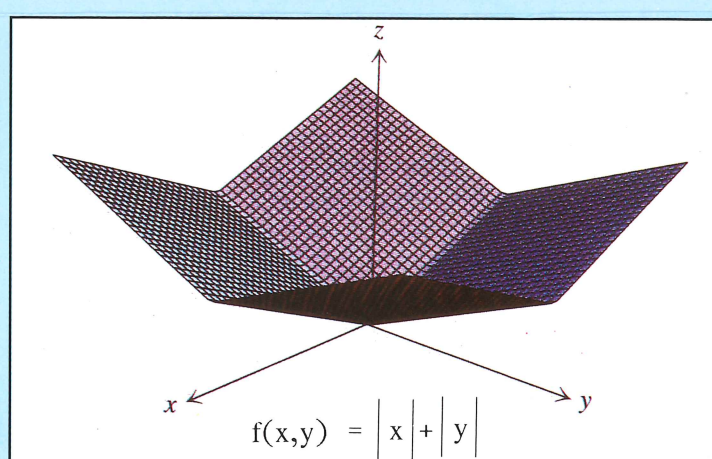
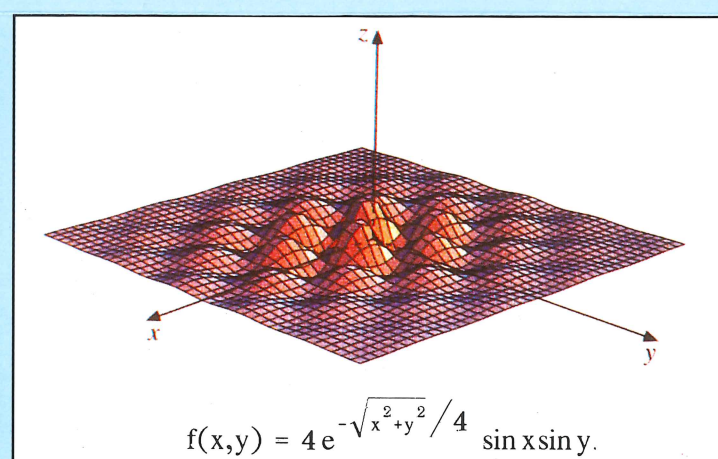
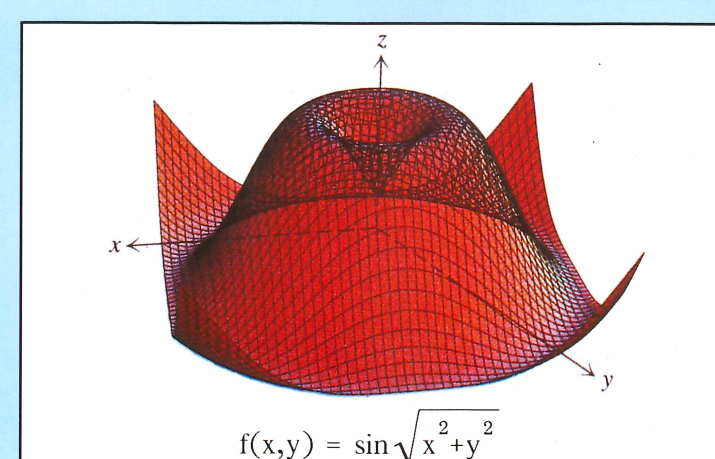
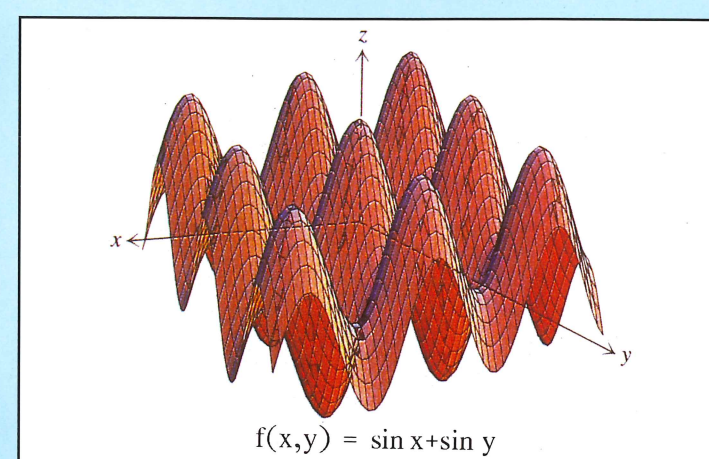
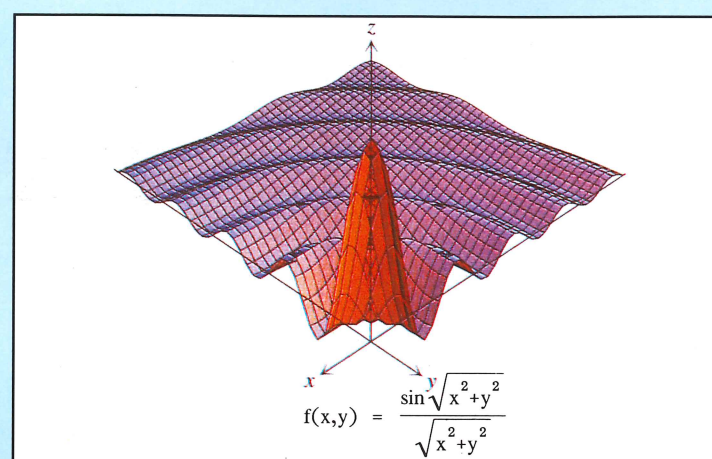
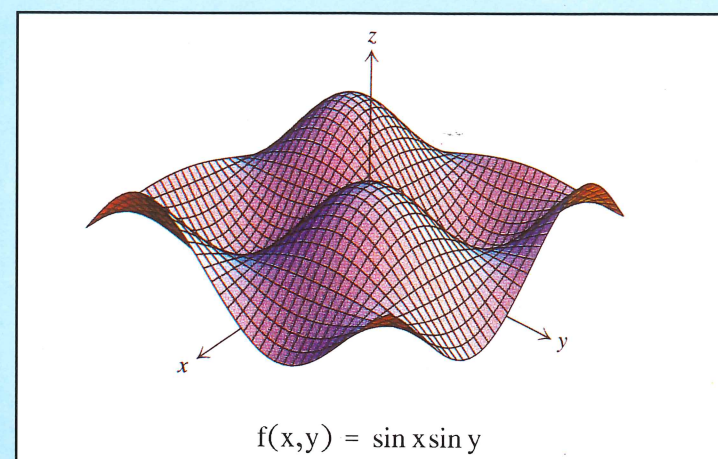
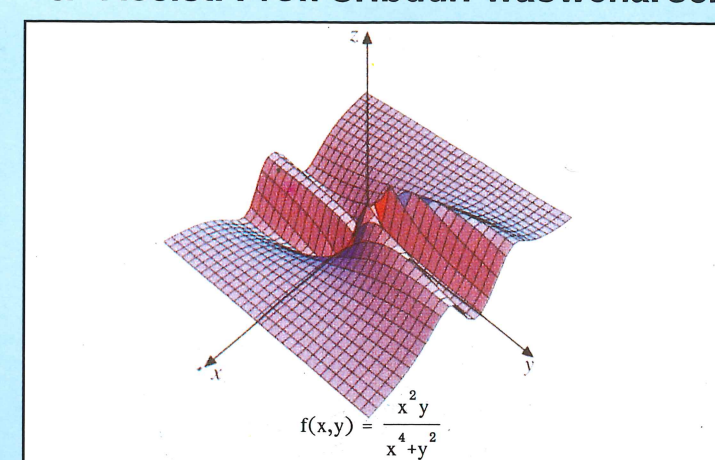
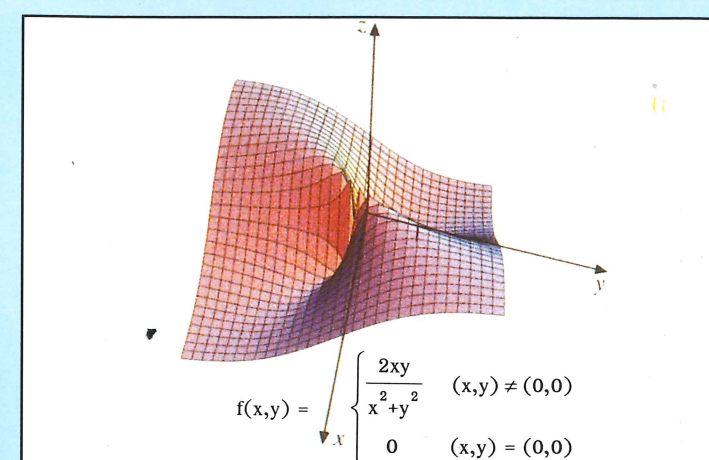
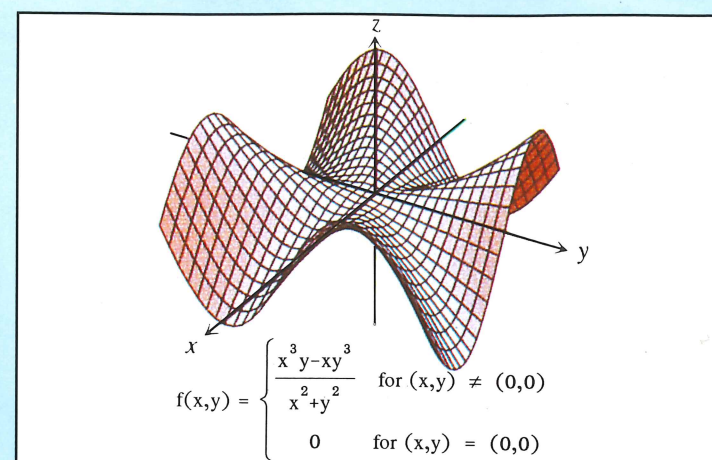
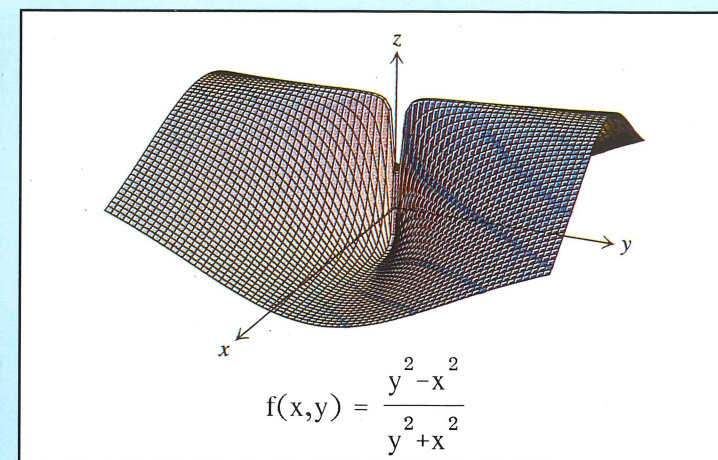
อินทิกรัลของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม
(EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FORMS)

130. $\int \coth u du = \ln |\sinh u| + C$
131. $\int \operatorname{sech} u du = \tan^{-1}(\sinh u) + C$
132. $\int \operatorname{csc} h u du = \ln \left| \frac{u}{\tanh \frac{u}{2}} \right| + C$
133. $\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$
134. $\int \operatorname{csc} h^2 u du = -\coth u + C$
135. $\int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C$
136. $\int \operatorname{csc} h u \coth u du = -\operatorname{csc} h u + C$
137. $\int \sinh^2 u du = \frac{\sinh 2u}{4} - \frac{u}{2} + C$
138. $\int \cosh^2 u du = \frac{\sinh 2u}{4} + \frac{u}{2} + C$
139. $\int \tanh^2 u du = u - \tanh u + C$
140. $\int \coth^2 u du = u - \coth u + C$
141. $\int \sinh u du = \cosh u - \sinh u + C$
142. $\int u \cosh u du = u \sinh u - \cosh u + C$
143. $\int u^a \sinh u du = u^a \cosh u - a \int u^{a-1} \cosh u du$
144. $\int u^a \cosh u du = u^a \sinh u - a \int u^{a-1} \sinh u du$

อินทิกรัลที่มีเทอม $(a+be^{mu})^{-1}$
(FORMS CONTAINING $(a+be^{mu})^{-1}$)

145. $\int \frac{dx}{1+e^x} = \ln \left(\frac{e^x}{1+e^x} \right) = x - \ln(1+e^x) + C$
146. $\int \frac{dx}{a+be^{mx}} = \frac{1}{am} \left[m - \ln(a+be^{mx}) \right] + C$
147. $\int \frac{e^{mx}}{a+be^{mx}} dx = \frac{1}{mb} \ln(a+be^{mx}) + C$





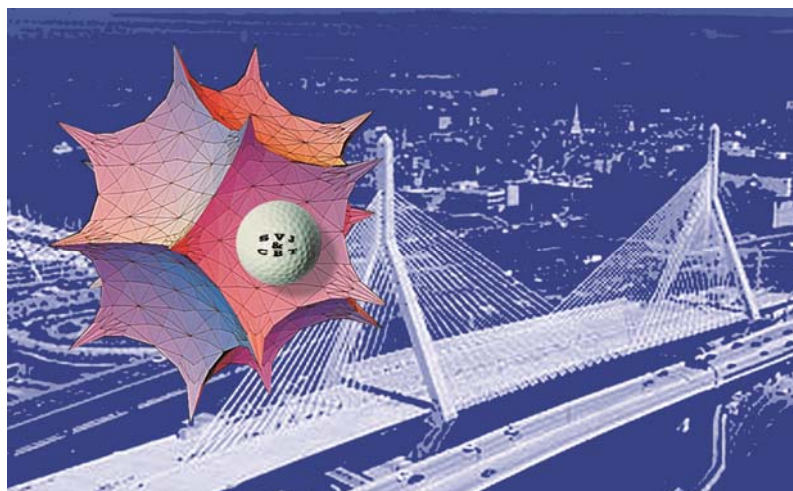
คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรและวิทยาศาสตร์

MATHEMATICS OF ENGINEER AND SCIENTIST

ANALYTIC GEOMETRY : e-book:Series 7

เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ 2มิติ, 3มิติ

ANALYTIC GEOMETRY & SKETCHING CURVES :2D, 3D



รวบรวมและเรียบเรียงโดย

รศ. ศรีบุตร แววจริญ

รศ.ดร. ชนศักดิ์ บำยเที่ยง

ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ราคา 249 บาท (6.99 USD)

คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์
MATHEMATICS OF ENGINEERS AND SCIENCES

เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ 2มิติ, 3มิติ
ANALYTIC GEOMETRY & SKETCHING CURVES :2D, 3D

ISBN 974-623-9119-7

สำหรับหนังสือ Series 7

ISBN (e-book) 978-616-590-539-8

สำหรับ e-books

เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ 2 มิติ, 3 มิติ

สงวนลิขสิทธิ์ในประเทศไทย พ.ร.บ.ลิขสิทธิ์ พศ. 2521

ห้ามลอกเลียนไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ นอกจากได้รับอนุญาต

วันวางจำหน่าย : 10-05-2022

ขนาดไฟล์ : 49.2 MB

จำนวนหน้า : 500 หน้า

ประเทศ : THAILAND

ประเภทไฟล์ : PDF

ภาษา : Thai

ออกแบบปกและ Artwork ทินพัฒน์ แวเจริญ ภาควิชาสถิติประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

จัดทำโดย

รศ.ศรีบุตร แวเจริญ และ รศ.ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง

ซื้อหนังสือ e-book:Series 7 เล่มนี้

ราคา 249 บาท (6.99 USD)

การสั่งซื้อ ebook series 7 สามารถติดต่อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาฯทุกสาขา

รศ. ศรีบุตร แวเจริญ

Tel. 081-904-1608

ID Line sribudh

E-mail : swr@kmitnb.ac.th

รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง

Tel. 081-908-5090

ID Line mala0928

E-mail : chanasak.b@op.kmitnb.ac.th

คำนำ

การเรียนรู้แคลคูลัสกับการเล่นกีฬา มีลักษณะคล้ายกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งกีฬากอล์ฟ “ไทเกอร์ วูดส์” นักกอล์ฟสายเลือดลูกครึ่ง ไทย-อเมริกัน ดังระเบิดไปทั่วโลก ด้วยประวัติการเรียนและกีฬากอล์ฟอันเยี่ยมยอด เป็นแชมป์กอล์ฟเยาวชนของสหรัฐหลายสมัย หลังการก้าวเข้าสู่กอล์ฟอาชีพเพียงเวลาไม่กี่เดือน ก็สามารถคว้าแชมป์กอล์ฟรายการใหญ่ได้หลายรายการ ด้วยวัยเพียง 21 ปี ด้านการเรียน มีผลการเรียนดีเยี่ยมสามารถเข้าเรียนในมหาวิทยาลัย ซึ่งเป็นมหาวิทยาลัยท็อปเทนของสหรัฐ ผู้เขียนอยากนำทั้งสองสิ่งมาหล่อหลอมเข้าด้วยกัน เพื่อให้ นิสิต นักศึกษา และผู้สนใจในวิชาแคลคูลัสได้มองภาพในอนาคตได้เห็นชัดเจนยิ่งขึ้น โดยนำกีฬากอล์ฟมาอธิบายเปรียบเทียบ หนังสือเล่มนี้ได้ตั้งชื่อว่า “สนามฝึกซ้อมวิชาแคลคูลัส” (Driving Range of Calculus) เช่นเดียวกับกีฬากอล์ฟซึ่งมี สนามฝึกซ้อมกอล์ฟ (Driving Range of Golf) ก่อนที่จะเข้าสนามฝึกซ้อมก็ต้องศึกษานิยามทฤษฎี และคุณสมบัติต่างๆ จากห้องเรียนจนเข้าใจดีพอ แล้วจึงนำหนังสือเล่มนี้มาฝึกฝนให้เกิดความเข้าใจให้ดียิ่งขึ้น

หนังสือเล่มนี้ได้ใช้เทคโนโลยีสมัยใหม่ มาช่วยทำให้รูปแบบของหนังสือมีคุณค่ายิ่งขึ้น โดยใช้โปรแกรม **Mathcad** **Maple** และ **Mathematica** ซึ่งทำให้ผู้อ่านหนังสือเล่มนี้ สามารถมองเห็นโจทย์ปัญหานั้นๆ ได้เป็นรูปธรรมมากขึ้น

แคลคูลัสเป็นวิชาที่สำคัญวิชาหนึ่งของสาขาคณิตศาสตร์ และเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพัฒนา นำไปใช้ประยุกต์ในสาขาวิชาต่างๆ ของนักวิทยาศาสตร์และวิศวกร ก่อนที่จะนำไปประยุกต์ ใช้ได้ดี นิสิต นักศึกษา จำเป็นต้องศึกษาวิชาพื้นฐานให้เข้าใจถ่องแท้ก่อน จากประสบการณ์ด้านการสอนวิชาคณิตศาสตร์ วิศวกรรมมากกว่า 40 ปี ในมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือแห่งนี้ และเป็นอาจารย์พิเศษสอนวิชาคณิตศาสตร์ในมหาวิทยาลัยของรัฐอีกหลายแห่ง จึงได้รวบรวมเขียนออกมาเป็น **แผนที่วิชาแคลคูลัสพื้นฐาน (Calculus Concept Maps)** ตามที่ผู้เขียนได้แนบไว้ในด้านหลังของปกหลังของหนังสือเล่มนี้และยังมอบตารางรวมสูตรอนุพันธ์และอินทิกรัลจำนวน 147 สูตรอีกหนึ่งแผ่นภาพสี่สี ขนาด A3 ให้ผู้อ่าน ผู้เขียนได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น **e-Book:Series 1-8** โดยแต่ละ **Series** จะมีเนื้อหาความสัมพันธ์กัน เกี่ยวข้องกันอยู่ตลอดเวลา ดังนั้นการศึกษาวิชาแคลคูลัสจำเป็นต้องมีพื้นฐานของคณิตศาสตร์ **e-Book:Series** ตื่นๆ อยู่ตลอดเวลา

ทางด้านกีฬากอล์ฟนั้นผู้เขียนได้มีโอกาสรับการฝึกอบรมจากคุณครูกอล์ฟ **Bell Penny** (Head Professional-Class A C.P.G.A.) จากโรงเรียนการศึกษากอล์ฟไทย ซึ่งเป็นโรงเรียนกอล์ฟแห่งแรกของประเทศไทย เมื่อปี 1994 ทำให้ผู้เขียนได้เกิดแนวคิดที่จะนำทั้งสองเรื่องนี้ คือ แคลคูลัสและกอล์ฟมา

ผนวกเข้าด้วยกัน ซึ่งมีหลายๆ สิ่งสามารถนำมาเปรียบเทียบให้นิสิต นักศึกษา ได้มองเห็นภาพการศึกษา แคลคูลัสได้ดียิ่งขึ้นในกีฬากอล์ฟนั้นเราแบ่งฟัท์ออกเป็น 3 ฟัท์ เรียงลำดับตามความสามารถได้ดังนี้ คือ ฟัท์ C มือใหม่ (Beginner) , ฟัท์ B มือสมัครเล่น (Amateur) , ฟัท์ A มืออาชีพ (Professional)

การเล่นกอล์ฟนั้น ในการออกรอบ 1 รอบ หรือตีจนครบ 18 หลุมนั้น ต้องใช้ความอดทน ความพยายาม มีจิตใจที่มุ่งมั่น การเล่นกอล์ฟจะต้องแก้ปัญหาเฉพาะหน้าตลอดเวลาและรูปแบบของปัญหานั้นเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอผู้เล่นต้องคิดแก้ปัญหาด้วยตัวเองบนพื้นฐานของประสบการณ์ที่มีอยู่ เมื่อถึงจุดหนึ่งผู้เล่นที่มีพื้นฐานและการฝึกซ้อมดีพอ ผู้เล่นจะสามารถแก้ปัญหาเฉพาะหน้าได้เสมอ โดยที่ผู้เล่นจะต้องนำปัจจัยหลายๆ อย่างมาช่วยในการคิดแก้ปัญหา

ในวิชาแคลคูลัสก็เช่นเดียวกัน เป็นวิชาที่ต้องใช้คณิตศาสตร์หลายๆ ด้านมาประกอบกัน เพื่อช่วยในการคิดแก้ปัญหา ผู้เขียนจึงได้เขียนปูพื้นตั้งแต่เริ่มต้น ตั้งแต่ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแต่เจาะลึกลงไปในแต่ละเรื่องมากกว่าเดิม นักศึกษาที่พื้นฐานยังไม่ดีพอจึงเปรียบเสมือนนักกอล์ฟมือใหม่ ต้องฝึกทำโจทย์ตั้งแต่ต้นในเรื่องพื้นฐานจนเกิดความเข้าใจก่อน จึงจะเริ่มศึกษาในเนื้อหาของวิชาแคลคูลัสได้ เมื่อผู้เรียนฝึกซ้อมจนเข้าใจแล้วก็จะถือว่าอยู่ในระดับมือสมัครเล่น และนักศึกษาจะต้องทำการฝึกฝนต่อไปอีกจนเกิดความเข้าใจ ก็จะถือว่านักศึกษาค่อยอยู่ในขั้นระดับมืออาชีพ จึงจะสามารถศึกษาในขั้นประยุกต์ได้ ในตำราชุดนี้เปรียบเสมือนสนามฝึกซ้อม มีโจทย์ตัวอย่างมากมายเพียงพอที่จะทำให้ นักศึกษาพัฒนาตนเองอยู่ในขั้นมืออาชีพได้อย่างสบาย

หนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรม Series 7 ก่อนที่จัดทำเป็น **e-book:Series 7** ได้ปรับปรุงมาแล้ว 2 ครั้ง โดยทำการปรับปรุงจากหนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรม Series 7 จะเน้นในเรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ และการเขียนกราฟ 2 มิติ , 3 มิติ โดยปรับปรุง จากการจัดพิมพ์ครั้งแรกในปี 2544 มีการเพิ่มเนื้อหาและรูปภาพของฟังก์ชันอีกมากมายรวมทั้งรูปเล่ม เพื่อให้ดูชัดเจน และสวยงาม นอกจากนี้ผู้เขียนได้เพิ่มตัวอย่างพร้อมแสดงวิธีทำโดยละเอียดที่น่าสนใจจากเดิม รวมตัวอย่างโจทย์เป็น 342 ตัวอย่าง และเพิ่มโจทย์ปัญหาพร้อมคำเฉลย เป็น 1,098 ข้อ วาดกราฟของฟังก์ชันโดยใช้โปรแกรม Maple และ Mathcad ทั้งหมด 505 รูป เพื่อให้ นักศึกษาและผู้อ่านได้เห็นเป็นรูปธรรมดียิ่งขึ้น และเกิดความเข้าใจลึกซึ้ง โดยดูจากกราฟของฟังก์ชันจริง โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ผู้เขียนยังได้เพิ่มโจทย์ปัญหาและแบบฝึกหัดทำให้จำนวนหน้าเพิ่มขึ้นอีกมากกว่าเดิมเป็น 500 หน้า นักศึกษาและผู้อ่านจะได้ฝึกทบทวนเนื้อหาและทดลองทำแบบฝึกหัดในลักษณะต่างๆ ทำให้เกิดความรู้ความเข้าใจในทฤษฎีให้ถ่องแท้ อันจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญต่อการเรียนการสอน และการทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพในอนาคต ถ้าจะให้หนังสือ **e-book:Series 7** เล่มนี้เปรียบเทียบกับกีฬากอล์ฟผู้เขียนตั้งใจจะเป็นเช่นเดียวกับ สนามฝึกซ้อมกอล์ฟ (Driving Range) ถ้าใครเข้าสนามฝึกซ้อมมากก็จะทำให้พัฒนาศักยภาพได้ดียิ่งขึ้น แล้วจะส่งผลให้นิสิต-นักศึกษา ข้อสอบกลางภาค (Midterm) และสอบปลายภาค

(Final) ด้วยความมั่นใจ เช่นเดียวกับนักกอล์ฟที่มีความพร้อม และมีความเชื่อมั่นที่ลงสนามแข่งขัน

ผู้เขียนขอกราบขอบคุณ คุณครู-อาจารย์ทุกท่าน ตั้งแต่ประถมจนถึงมหาวิทยาลัยที่ได้ประสิทธิประสาทวิชาให้ ขอกราบขอบคุณทุกท่านที่ได้ให้การสนับสนุนหนังสือตั้งแต่ **e-book:Series 1 ถึง e-book :Series 8** ขอขอบคุณเพื่อนร่วมงานทุกคนที่ได้คอยให้กำลังใจและให้คำแนะนำด้วยดีมาตลอด ขอขอบคุณ คุณ อนุวิภา เนตรสว่าง และ คุณฉัตรสุมาลย์ ลากเวธิ ที่ทุ่มเทช่วยพิมพ์ต้นฉบับ **Series 7** ครั้งแรกให้เป็นอย่างดีและขอบคุณนักศึกษาของภาควิชาคณิตศาสตร์หลายรุ่นที่ได้ช่วยตรวจต้นฉบับให้เป็นอย่างดี และที่สำคัญที่สุดขอขอบคุณและขอบใจ ภรรยาและลูกๆ ของผู้เขียนทั้งสอง : คุณยุพิน แวเวจริญ ลูกแพรวและลูกเพชร คุณวงษ์เดือน บ่ายเที่ยง ลูกต๋มและลูกดี ที่ได้ให้กำลังใจในการเขียนมาตลอดและเป็นผู้อยู่เบื้องหลังของความสำเร็จในการจัดทำ นี้

หนังสือ **e-book:Series 7 เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ 2มิติ , 3มิติ** เล่มนี้จะไม่สามารถเกิดขึ้นได้ ถ้าไม่มี ผู้บริหารของ มจพ. หลายท่าน โดยเฉพาะ **รศ.ดร.ฐิตนนท์ จารุโรจน์กิริติ** คณบดีคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ **รศ.ดร.เสนอ คุณประเสริฐ** หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์ และเพื่อนร่วมงานในภาควิชาคณิตศาสตร์และนักศึกษาของภาควิชาคณิตศาสตร์ทั้งในอดีตและปัจจุบัน ดังเช่น คุณ นพพล สวนดอน (MA17) และ **คุณ นุปผา จิตรโสม (MA20)** ที่ทุ่มเทเวลาช่วยพิมพ์ต้นฉบับให้เป็นอย่างดียิ่ง ท้ายสุดนี้ขอขอบใจ **นาย ทินพัฒน์ แวเวจริญ (AS 23)** ของ มจพ. (KMUTNB) ที่ช่วยพิมพ์ต้นฉบับให้มากกว่าครั้งเล่มพร้อมทั้งออกแบบปกหนังสือ และ Artwork ของ **e-book:Series 7** เล่มนี้ทั้งหมด

ผู้เขียนหวังว่าหนังสือประกอบการเรียนเล่มนี้ คงจะเป็นประโยชน์ต่อนิสิต นักศึกษา ในสถาบันอุดมศึกษาต่างๆ บ้างตามสมควร หากพบข้อบกพร่องที่ควรแก้ไขในหนังสือเล่มนี้ กรุณาเสนอแนะให้ผู้เขียนทราบด้วย จักเป็นพระคุณยิ่ง ขอให้แฟนพันธ์แท้และผู้สนใจคอยติดตาม **e-book:Series 7** ต่อไป

คุณความดีและคุณประโยชน์ทั้งหลายทั้งปวง ขอมอบให้บิดา – มารดา ครู-อาจารย์ ของผู้เขียนทั้งสอง

รศ. ศรีบุตร แวเวจริญ

รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง

คำนิยม

ท่านผู้อ่านหนังสือเล่มนี้ทุกท่าน ผมได้ติดตามวิถีคิดและการทำหนังสือ Series 1-8 ของอาจารย์ทั้งสองท่าน คือ รศ. ศรีบุตร แวเวจริญ และ รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง มาโดยตลอด ซึ่งได้จัดทำหนังสือคณิตศาสตร์ SERIES ออกมาแล้ว 8 เล่มรวมทั้งปรับปรุงหนังสือคณิตศาสตร์ Series 1-8 มาโดยตลอด หนังสือคณิตศาสตร์ เล่มนี้เป็นการปรับปรุงหนังสือ Series 7 ให้อยู่ในรูปแบบ e-book Series 7 เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ 2 มิติ , 3 มิติ มีการนำเอาโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ Maple มาช่วยวาดกราฟและคำนวณคำตอบของปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ให้นักศึกษาได้ตรวจคำตอบอีกด้วย ทำให้การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์สามารถทำความเข้าใจได้ง่ายขึ้น ผมเองตอนที่เป็นักเรียน/นักศึกษาเวลาทำการบ้านคณิตศาสตร์ต้องหาให้ได้คำตอบและต้องถูกต้องแต่มั่นใจว่าคำตอบที่ถูกต้องนั้นในสมัยก่อนต้องตรวจสอบที่ท้ายเล่มเท่านั้น

ในปัจจุบันวิวัฒนาการทางคอมพิวเตอร์มีมากขึ้น ท่านอาจารย์ทั้งสองท่านก็มิยอมให้การเรียนรู้ด้านคณิตศาสตร์เป็นแบบเดิมหรือย่ำอยู่กับที่ ได้พัฒนาการเรียนรู้โดยการนำโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการแสดงวิธีทำและหาคำตอบ และได้สอดแทรกการแก้ปัญหาโดยโปรแกรมสำเร็จรูปในหนังสือเล่มนี้ด้วย

ผมเองได้เห็น ความบากบั่น ความพยายามของอาจารย์ทั้งสองท่าน ที่พยายามช่วยให้การเรียนรู้คณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่ไม่ยุ่งยากอีกต่อไป และในฐานะของผู้บริหารคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ต้องขอขอบคุณและ อยากให้มีหนังสือแบบนี้มากขึ้นในหลายสาขาวิชาของคณะเพื่อการเรียนรู้ในวิชาของคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์สามารถทำให้นักศึกษาหรือผู้อ่านได้เข้าใจในเนื้อหาของวิชานั้นอย่างดี

ขอบคุณครับ



รองศาสตราจารย์ ดร. วิตนนต์ จารุโรจน์กิริติ
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

แถมฟรี

e-book:Series 7 เล่มนี้ ผู้เขียนได้มอบแผ่นพับขนาด A3 รูป4สีสวยงามจำนวน 3 แผ่นที่จะเป็นประโยชน์กับนักศึกษาวิชา CALCULAS and ANALYTIC GEOMETRY เป็นอย่างดี

1. CALCULUS CONCEPT MAPS
2. FORMULA TABLES OF DERIVATIVES AND INTEGRALS
3. SOME COMPUTER-GENERATED SURFACES IN 3-SPACE

คำนิยม

ท่านผู้อ่านหนังสือ **e-book:Series 7** เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ 2มิติ , 3มิติ เล่มนี้ทุกท่าน ผมเป็นคนหนึ่งที่ใกล้ชิดและเห็นการทำงาน แนวความคิดและการทำหนังสือของรองศาสตราจารย์ ศรีบุตร แวเวจริญ และ รองศาสตราจารย์ ดร.ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง มาโดยตลอด ท่านทั้งสองได้เขียนหนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ (**e-book:Series 1- 8**) ออกมาแล้ว 8 เล่มอย่างต่อเนื่องและมีการปรับปรุงเนื้อหาใหม่ในหนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ทั้ง 8 เล่ม โดยมีการเพิ่มเติมรูปภาพประกอบโจทย์ปัญหาให้เห็นเป็นรูปธรรมและนำเอาโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ Maple และ Mathcad มาช่วยในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์เพื่อให้ผู้อ่านหนังสือเล่มนี้ได้เห็นปัญหาโจทย์เป็นรูปธรรมยิ่งขึ้น

ผมเห็นความมุ่งมั่น และความตั้งใจของอาจารย์ทั้งสองท่าน คือ ความสำเร็จที่ยังใหม่ที่จะช่วยประเทศไทยแก้ปัญหาการขาดแคลนหนังสือคณิตศาสตร์ที่ทันสมัยเหมือนต่างประเทศ จากจุดเริ่มต้นดังกล่าว ท่านตั้งใจจะทำหนังสือเพื่อลูกศิษย์ นิสิต นักศึกษาและผู้สนใจในวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ทำให้หนังสือไม่เพียงใช้เรียนในชั้นเรียนแต่กลับใช้เรียนเสมือนศึกษาบนเว็บที่มีรูปภาพคำอธิบายและโปรแกรมครบทุกส่วน ทำให้ผู้เรียนขยายวงกว้างจากนักเรียนในชั้นเรียน สู่นักเรียนนอกชั้นเรียนหลายสาขาอาชีพ ตอบสนองต่อยุทธศาสตร์ การพัฒนาประเทศด้านการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ เกิดการเรียนรู้ที่สนับสนุนต่อสังคม การมีการเรียนรู้อย่างต่อเนื่องตลอดชีวิต และนิสิต นักศึกษาจะได้ก้าวเข้าสู่สังคมอาเซียนได้เป็นอย่างดี

นับเป็นภารกิจของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ ที่ต้องผลิตหนังสือและตำราวิชาการเป็นบริการความรู้แก่สังคม ตามปรัชญาของมหาวิทยาลัยที่ว่า “พัฒนาคน พัฒนาศาสตร์และเทคโนโลยี” และในฐานะของผู้บริหารภาควิชาคณิตศาสตร์ ต้องขอขอบคุณอาจารย์ทั้งสองท่านที่ปรับปรุงหนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ 2มิติ , 3มิติ **e-book:Series 7** เล่มนี้ ก็นับเป็นบริการด้านสติปัญญาอีกเล่มหนึ่งที่ภาควิชาคณิตศาสตร์ภูมิใจมอบให้แก่สังคม และประเทศไทย

ขอบคุณครับ



รองศาสตราจารย์ ดร.เสนอ คุณประเสริฐ
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

สารบัญ e-book:Series 7

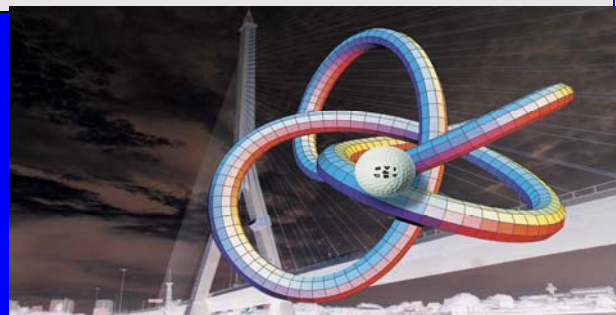
ส่วนที่ 1 เรขาคณิตวิเคราะห์เชิงระนาบ (PLANAR ANALYTIC GEOMETRY)

บทที่ 1 แนวความคิดเบื้องต้น (Fundamental Concepts)



- | | | |
|-----|---|------|
| 1.1 | พิกัดฉาก (Rectangular Coordinate) | 1-43 |
| 1.2 | ระยะระหว่างจุดสองจุด (Distance between Two Points) | |
| 1.3 | สูตรหาจุดแบ่งส่วนของเส้นตรง
(Division Point of a Line Segment) | |
| 1.4 | ความเอียงและความชันของเส้นตรง เส้นขนานและเส้นปกติ
(Inclination, Slope, Parallel and Perpendicular) | |
| 1.5 | มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น (Angle between Two Lines) | |

บทที่ 2 เส้นตรงและวงกลม (The Straight Line and The Circle)



- | | | |
|-----|---|--------|
| 2.1 | สมการของเส้นตรง (Equations of a Straight Line) | 44-100 |
| 2.2 | การเปลี่ยนรูปของสมการเส้นตรงให้เป็นสมการเส้นตรงแบบปกติ
(Line in General Form Reduced to Normal Form) | |
| 2.3 | ระยะทางจากจุดไปยังเส้นตรง
(Distance from a Line to a Point) | |

- 2.4 ระยะทางระหว่างเส้นคู่ขนาน
(Distance Between Parallel Lines)
- 2.5 สมการของเส้นแบ่งครึ่งมุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น
(Equations of Angle Bisectors)
- 2.6 พื้นที่ของสามเหลี่ยม (Area of a Triangle)
- 2.7 ชุดของเส้นตรง (Families of Lines)
- 2.8 วงกลม (Circles)

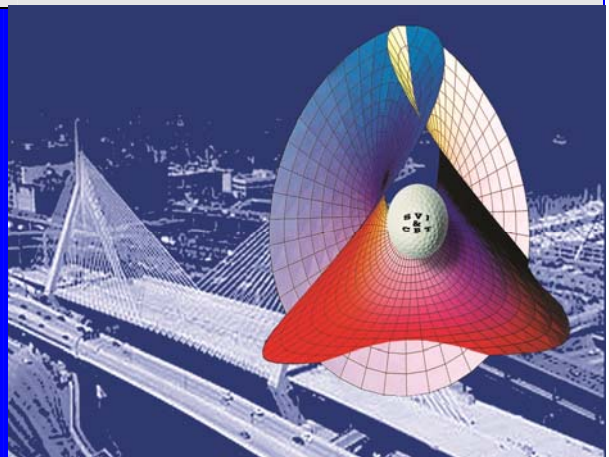
บทที่ 3 ภาคตัดกรวย (Conic Sections)



- 3.1 พาราโบลา (Parabola)
- 3.2 วงรี (Ellipse)
- 3.3 ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

101-153

บทที่ 4 การทำให้ง่ายลงของสมการ (Simplification of Equations)

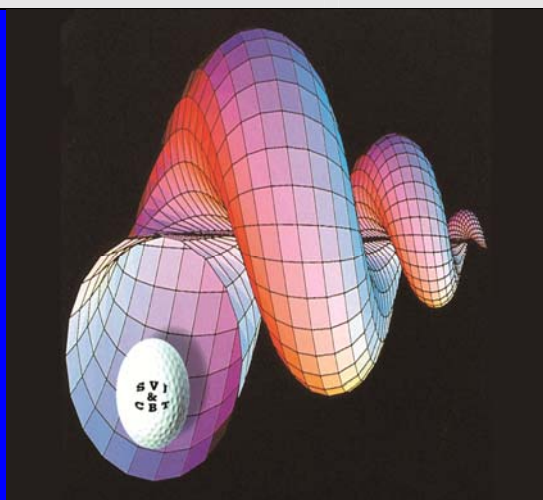


- 4.1 การทำให้ง่ายลงโดยการเลื่อนแกนพิกัด
(Simplification by Translation of Axes)
- 4.2 การหมุนแกนพิกัด (Rotation of Axes)
- 4.3 การทำให้ง่ายลงโดยการเลื่อนและหมุนแกนพิกัด
(Simplification by Translations and Rotations)
- 4.4 สมการทั่วไปของระดับชั้นที่สอง
(General Equation of the Second Degree)

154-195

บทที่ 5

พิกัดเชิงขั้วและสมการอิงตัวแปรเสริม
(Polar Coordinates and
Parametric Equations)

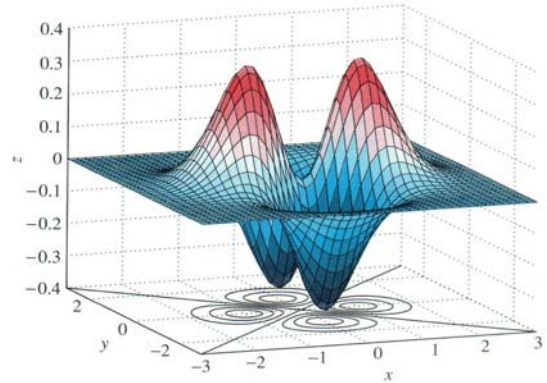


- 5.1 ระบบพิกัดเชิงขั้ว (The Polar Coordinates System)
- 5.2 ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้ว
(Relations Between Rectangular and Polar Coordinates)
- 5.3 กราฟของสมการในพิกัดเชิงขั้ว
(Graphs of Polar Coordinates Equations)
- 5.4 สมการเชิงขั้วของเส้นตรงและภาคตัดกรวย
(Polar Equations of Lines and Conics)
- 5.5 สมการอิงตัวแปรเสริม
(Parametric Equations)

196-282

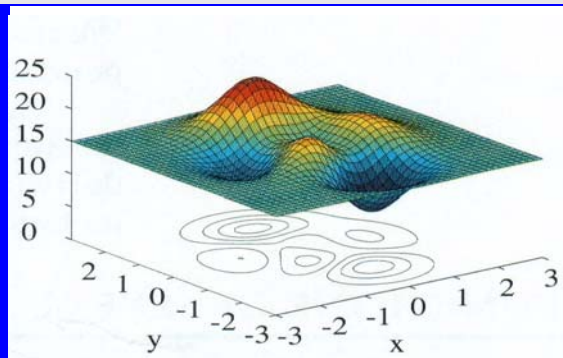
ส่วนที่ 2 เรขาคณิตวิเคราะห์เชิงทรงตัน (SOLID ANALYTIC GEOMETRY)

บทที่ 6 จุดในปริภูมิ 3 มิติ (The Point in Three-Dimension Space)



- | | | |
|-----|--|---------|
| 6.1 | พิกัดในระบบพิกัดฉาก
(Three-Dimensional Rectangular Coordinates) | 283-336 |
| 6.2 | ระยะทางระหว่างจุดสองจุด (Distance between Two Points) | |
| 6.3 | เวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ (Vectors in Space) | |
| 6.4 | มุมกำหนดทิศทางและโคไซน์กำหนดทิศทางของเวกเตอร์
(Directions Angle and Direction Cosines of Vectors) | |
| 6.5 | เส้นตรง (Line) | |
| 6.6 | มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น (Angle between Two Lines) | |
| 6.7 | ระยะทางจากจุดไปยังเส้นตรง
(Perpendicular Distance from a Line to a Point) | |
| 6.8 | เส้นไขว้ต่างระดับ (Skew Lines) | |

บทที่ 7 ระนาบในปริภูมิ 3 มิติ (The Plane in 3-Dimension Space)

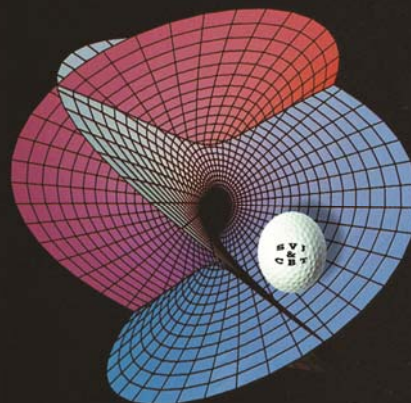


- | | | |
|-----|---|---------|
| 7.1 | สมการระนาบ (Equation of a Plane) | 337-383 |
| 7.2 | การขนานและการตั้งฉากของระนาบ
(Parallel and Perpendicular Planes) | |

7.3 มุมระหว่างสองระนาบ (Angle between Two Planes)

7.4 ระยะทางระหว่างจุดไปยังระนาบ
(Perpendicular Distances from a Plane to a Point)

บทที่ 8 พื้นผิวกำลังสอง (Quadric Surface)



8.1 รอยตัด (Traces)

384-443

8.2 ทรงกระบอก (Cylinder)

8.3 กรวย (Cone)

8.4 ทรงกลม (Sphere)

8.5 ทรงรี (Ellipsoid)

8.6 ไฮเพอร์โบลอยด์ (Hyperboloid)

8.7 อีลิปติคพาราโบลอยด์ (Elliptic Paraboloid)

8.8 ไฮเพอร์โบลิคพาราโบลอยด์ (Hyperbolic Paraboloid)

8.9 ระบบพิกัดทรงกระบอก
(Cylindrical Coordinates Systems)

8.10 ระบบพิกัดทรงกลม (Spherical Coordinates Systems)

เฉลยแบบฝึกหัด

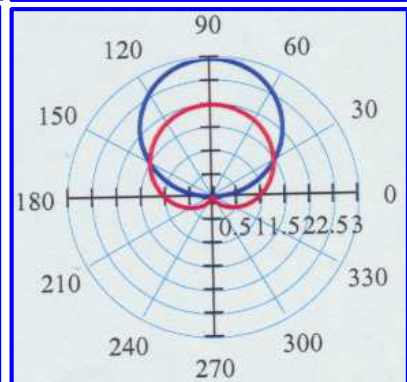
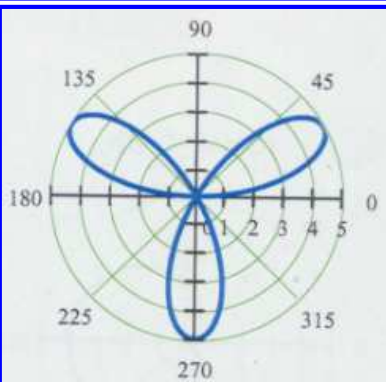
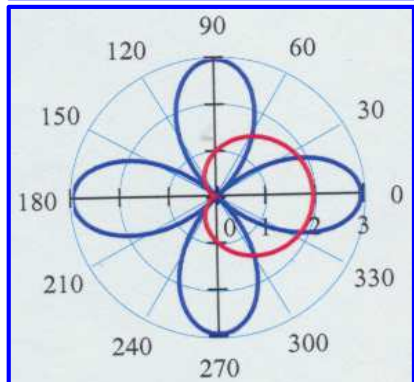
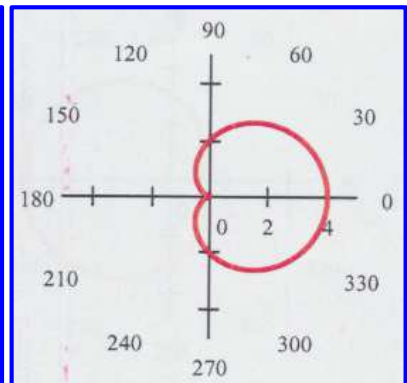
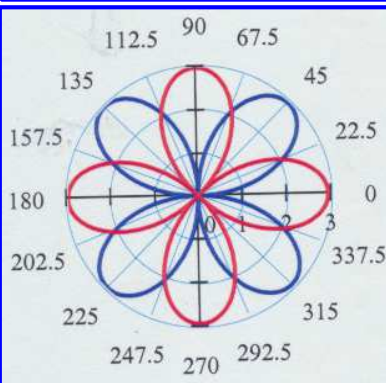
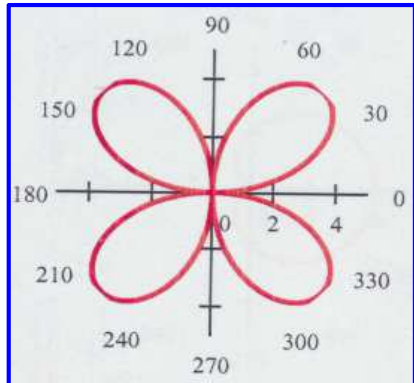
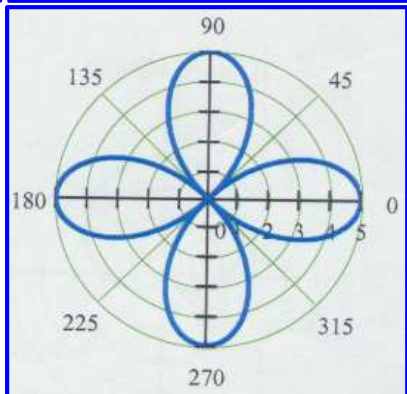
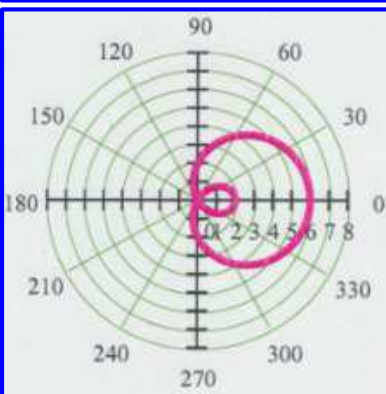
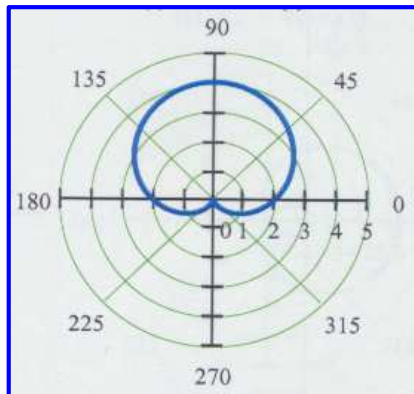
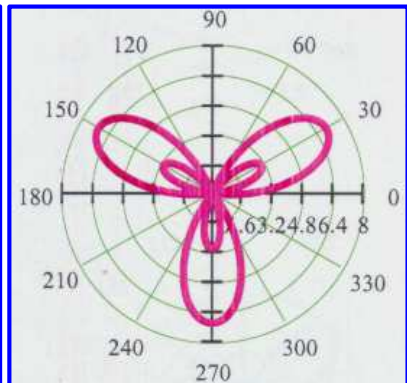
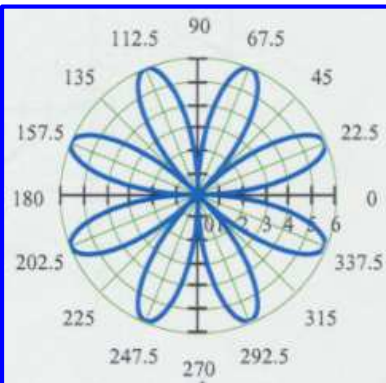
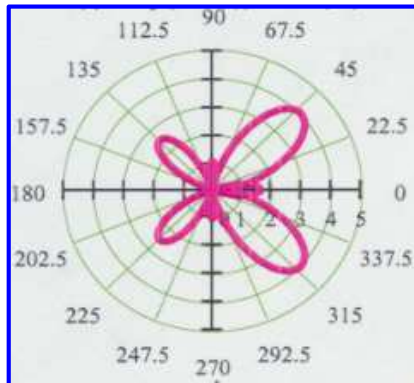
444-497

สูตร

498-499

บรรณานุกรม

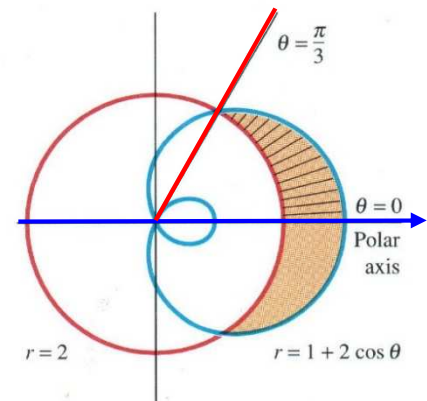
ส่วนที่ 1 เรขาคณิตวิเคราะห์เชิงระนาบ (PART 1 PLANAR ANALYTIC GEOMERY)



บทที่ 1

แนวความคิดเบื้องต้น

(Fundamental Concepts)



การที่จะหาที่ตั้งของจุดในระนาบ จำเป็นต้องใช้แกนพิกัดเป็นหลักในการหาจุดที่ตั้ง ในปัจจุบันนี้นิยมใช้แกนพิกัด 2 ระนาบ คือ ระบบพิกัดฉาก และพิกัดเชิงขั้ว สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้วจะได้กล่าวในบทที่ 5 ต่อไป ในที่นี้กล่าวถึงระบบพิกัดฉาก

1.1 ระบบพิกัดฉาก (Rectangular Coordinate System)

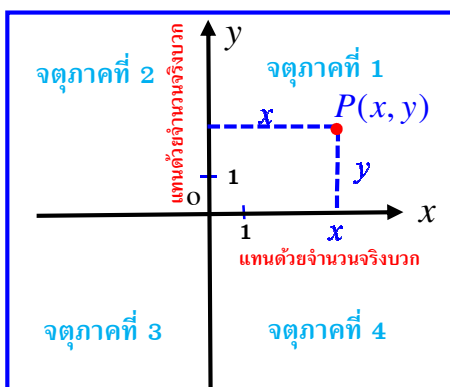
ระบบพิกัดฉาก ประกอบด้วยเส้นตรง 2 เส้น ลากเส้นตั้งฉากซึ่งกันและกันซึ่งเส้นตรง 2 เส้นนั้นเราเรียกว่า แกนพิกัด (Coordinate Axes) แกนในแนวนอน (Abscissa Axes) เรียกว่า แกน X แกนในแนวตั้ง (Ordinate Axes) เรียกว่า แกน Y ระนาบที่มีแกนพิกัดทั้งสองอยู่เรียกว่า ระนาบพิกัด (Coordinate Plane)

แกนพิกัดตัดกันที่จุด 0 ซึ่งจุด 0 นี้เรียกว่า จุดกำเนิด (Origin Point)

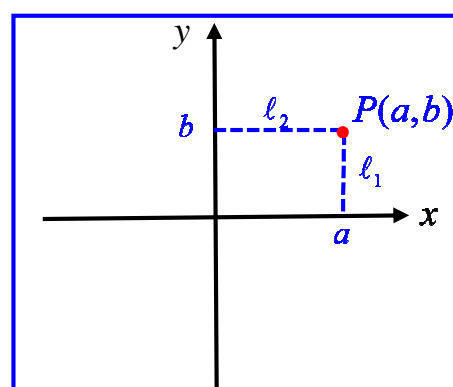
จุดบนแกน X ทางด้านขวาของจุดกำเนิด แทนด้วยจำนวนจริงบวก
ทางด้านซ้ายของจุดกำเนิด แทนด้วยจำนวนจริงลบ

จุดบนแกน Y ทางด้านบนของจุดกำเนิด แทนด้วยจำนวนจริงบวก
ทางด้านล่างของจุดกำเนิด แทนด้วยจำนวนจริงลบ

แกนพิกัดจะแบ่งระนาบ xy ออกเป็น 4 ส่วน เรียกว่า จตุภาค (Quadrants) คือ จตุภาคที่ 1, จตุภาคที่ 2, จตุภาคที่ 3, และจตุภาคที่ 4, ดังแสดงในรูป 1.1



รูป 1.1

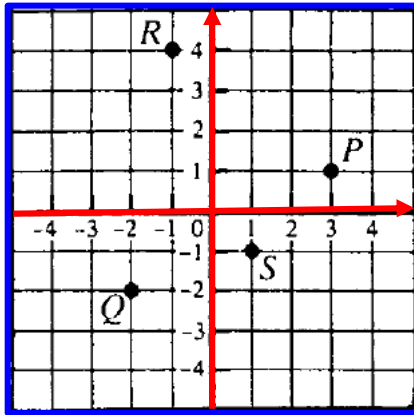


รูป 1.2

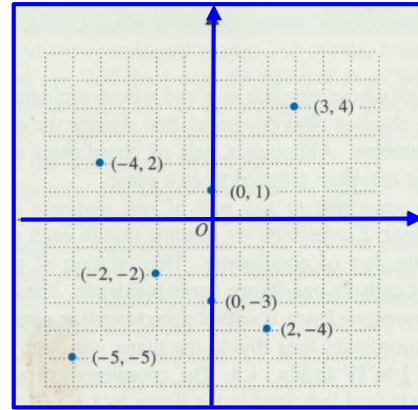
ถ้า $P(a, b)$ เป็นจุดใดๆ บนระนาบ xy ซึ่งจุดนี้เกิดจากการลากเส้นตรงตั้งฉากกับแกน X ที่ a และลากเส้นตรงตั้งฉากกับแกน Y ที่ b มาตัดกัน ค่า a เรียกว่า พิกัด x ของจุด P และ ค่า b เรียกว่า พิกัด y ของจุด P ดังแสดงในรูป 1.2

ข้อสังเกต	ถ้าจุด $P(a, b)$ อยู่ในจุดภาค 1 จะได้ $a > 0, b > 0$ ถ้าจุด $P(a, b)$ อยู่ในจุดภาค 2 จะได้ $a < 0, b > 0$ ถ้าจุด $P(a, b)$ อยู่ในจุดภาค 3 จะได้ $a < 0, b < 0$ ถ้าจุด $P(a, b)$ อยู่ในจุดภาค 4 จะได้ $a > 0, b < 0$
ตัวอย่าง 1.1	จงลงจุด $P(-4, 3)$ บนระนาบพิกัดฉาก วิธีทำ ใช้กระดาษกราฟซึ่งมีเส้นไขว้ปลาดัดขวางตัดตั้งฉากกันลากเส้นแกน x และแกน y ตั้งฉากซึ่งกันและกัน หน่วยของระยะทางบนแกน x ไม่จำเป็นต้องเท่ากับแกน y ดังรูป 1.3 แล้วลงจุด P โดยพิกัด x ของ P เท่ากับ -4 หมายความว่าจุด P อยู่ห่างจากแกน y ไปซ้ายเป็นระยะ 4 หน่วย และพิกัด y ของ P เท่ากับ 3 หมายความว่าจุด P อยู่ห่างจากแกน x ขึ้นไปข้างบนเป็นระยะ 3 หน่วย ดังนั้นเราลงจุด P โดยลากจากจุดกำเนิดไปทางซ้ายตามแกน x เป็นระยะ 4 หน่วย แล้วลากขึ้นไป ข้างบนขนานกับแกน y เป็นระยะ 3 หน่วย จุด P อยู่ในจุดภาคที่ 2 ดังรูป 1.3
รูป 1.3	
ตัวอย่าง 1.2	จงลงจุดที่กำหนดให้ต่อไปบนระนาบพิกัดฉาก $P(3, 1)$, $Q(-2, -2)$, $R(-1, 4)$ และ $S(1, -1)$ วิธีทำ ใช้กระดาษกราฟซึ่งมีเส้นไขว้ปลาดัดขวางตัดตั้งฉากกัน ลากเส้นแกน x และแกน y ตั้งฉากซึ่งกันและกันหน่วยของระยะทางบนแกน x ไม่จำเป็นต้องเท่ากับแกน y ดังรูป 1.4 แล้วลงจุดทั้ง 4 โดยจำไว้เสมอว่าต้องลงพิกัด x ก่อน แล้วลงพิกัด y ต่อเสมอ

ดังนั้น จุด P ลงจุด 3 หน่วยทางขวาของแกน y และ 1 หน่วยเหนือแกน x , จุด P ลงจุด 2 หน่วยทางซ้ายของแกน y และ 2 หน่วย ด้านล่างของแกน x , จุด R ลงจุด 1 หน่วยทางซ้ายของแกน y และ 4 หน่วย เหนือแกน x, จุด S ลงจุด 1 หน่วยทางขวาของแกน y และ 1 หน่วย ด้านล่างของแกน x ดังแสดงในรูป 1.4



รูป 1.4



รูป 1.5

ตัวอย่าง 1.3

จงลงจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ลงบนระนาบ xy

$A(3, 4)$, $B(-4, 2)$, $C(-5, 5)$, $D(2, -4)$, $E(0, 1)$, $F(0, -3)$

วิธีทำ ใช้กระดาษกราฟที่มีเส้นไขว้ลาดตัดขวางตัดกัน ลากเส้นแกน x และแกน y ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ดังรูป 1.5 แล้วลงจุดทั้ง 6 จุด โดยจำไว้ว่า ต้องลงพิกัด x ก่อนพิกัด y เสมอ ดังนั้น ถ้าต้องการลงจุด $A(3, 4)$ เราเคลื่อน 3 หน่วย ไปทางขวาจากจุดกำเนิดตามแกน x และ 4 หน่วย ขึ้นไปด้านบนขนานกับแกน y

ดังนั้น เราจะได้จุด $A(3, 4)$ อยู่ในจตุภาค 1 ทำนองเดียวกัน จุด $B(-4, 2)$ เราเคลื่อน 4 หน่วยไปทางซ้ายจากจุดกำเนิดตามแกน x และ 2 หน่วย ขึ้นไปด้านบนขนานกับแกน y ได้จุด B อยู่ในจตุภาค 2 ตามต้องการ ดูรูป 1.5

จุด $C(-5, 5)$ เราเคลื่อน 5 หน่วยไปทางซ้ายจากจุดกำเนิดตามแกน x และ 5 หน่วย ลงด้านล่างขนานกับแกน y ได้จุด C อยู่ในจตุภาค 3 ตามต้องการ ดูรูป 1.5

จุด $D(2, -4)$ เราเคลื่อน 2 หน่วยไปทางขวาจากจุดกำเนิดตามแกน x และ 4 หน่วย ลงด้านล่างขนานกับแกน y ได้จุด D อยู่ในจตุภาค 4 ตามต้องการ

จุด $E(0, 1)$ เราเคลื่อน 1 จากจุดกำเนิดขึ้นไปเหนือแกน x ตามแกน y จะได้จุด E อยู่บนแกน y ตามต้องการ ดูรูป 1.5

จุด $F(0, -3)$ เราเคลื่อน 3 จากจุดกำเนิดลงด้านล่างของแกน x ตามแกน y จะได้จุด F อยู่บนแกน y ตามต้องการ ดูรูป 1.5

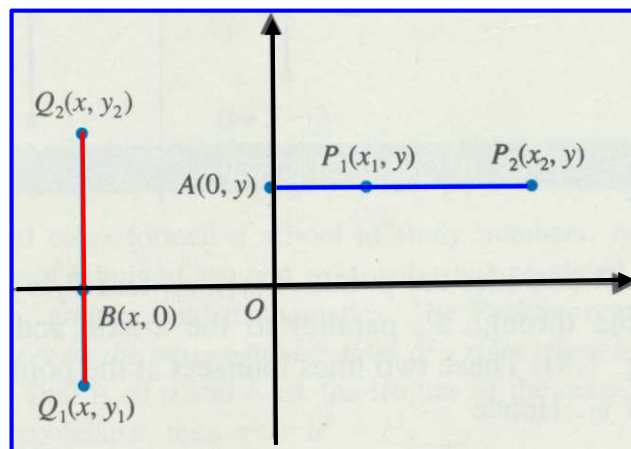


1.2 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด (Distance Between Two Points)

ระยะทางที่วัดขนานกับแกน X หรือแกน Y

จากรูป 1.6 ระยะ $AB = x_2 - x_1$; $x_2 > x_1$

จากรูป 1.6 ระยะ $CD = y_2 - y_1$; $y_2 > y_1$



รูป 1.6

ระยะทางระหว่าง 2 จุดใดๆ บนระนาบ xy

ทฤษฎี 1.1

ให้จุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดใดๆ บนระนาบ xy และ d แทนระยะทางระหว่างจุด P_1 กับ จุด P_2 จะได้

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \dots\dots (1.1)$$

พิสูจน์ ให้จุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดบนระนาบ xy ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด P_1 ขนานกับแกน x และส่วนของเส้นตรงขนานกับแกน y ดังรูป (1.7) ทั้งสองเส้นตัดกันที่จุด R ซึ่งมีพิกัด x เป็น x_2 และพิกัด y เป็น y_1 ดังนั้น

ระยะ $P_1R = |P_1R| = x_2 - x_1$ และระยะ $RP_2 = |RP_2| = y_2 - y_1$ เพราะว่าสามเหลี่ยม P_1P_2R เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก จากทฤษฎี พิทาโกรัส จะได้

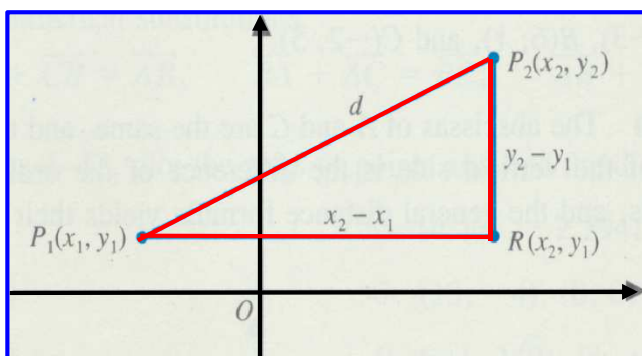
$$|P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

เมื่อ d แทนระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2 เราจะได้สูตร

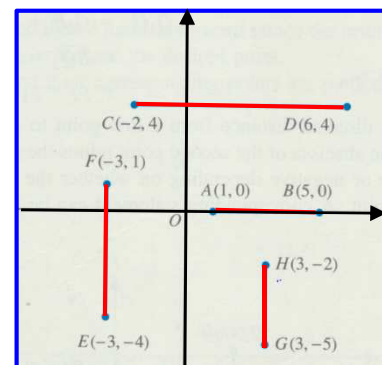
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



ตัวอย่าง 1.4	จงหาระยะทางระหว่างจุด A(1, 0) กับ B(5, 0), จุด C(-2, 4) กับ D(6, 4) จุด E(-3, -4) กับ F(-3, 1) และจุด G(3, -5) กับ H(3, -2) ดังรูป 1.8
	วิธีทำ จากสูตร 1.1 $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$ จะได้ $ AB = \sqrt{(5-1)^2} = 4, \quad CD = \sqrt{(6-(-2))^2} = 8$ จากสูตร 1.2 $d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2}$ จะได้ $ EF = \sqrt{(1-(-4))^2} = 5, \quad GH = \sqrt{(-2-(-5))^2} = 3 \quad \square$



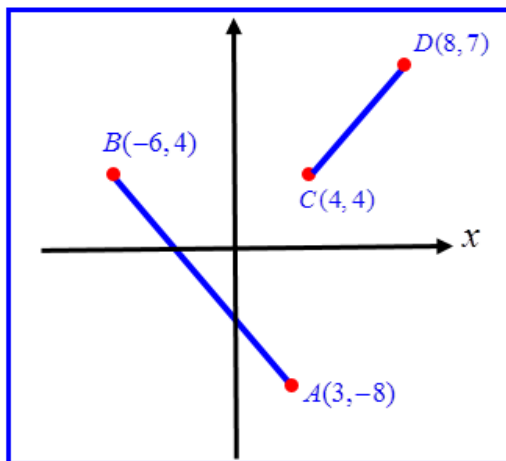
รูป 1.7



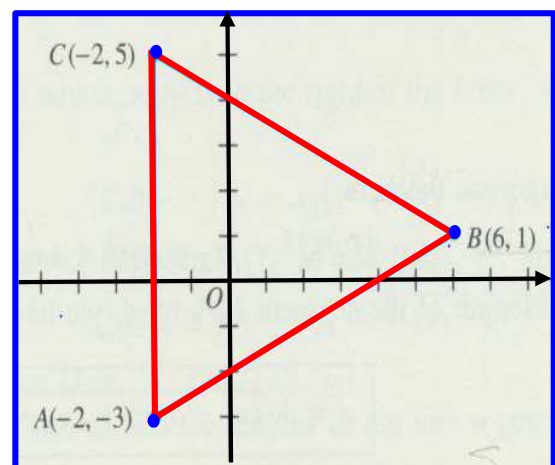
รูป 1.8

ตัวอย่าง 1.5	จงหาระยะทางระหว่างจุด A(3, -8) กับ B(-6, 4) และจุด C(4, 4) กับ D(8, 7)
	วิธีทำ จากสูตร 1.1 จะได้ $d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3+6)^2 + (-8-4)^2}$ $= \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$ และ $d_{CD} = \sqrt{(8-4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$ $= 5 \quad \text{ดังรูป 1.9} \quad \square$

ตัวอย่าง 1.6	จงหาความยาวของด้านของสามเหลี่ยม ABC ดังรูป 1.10 ซึ่งมีพิกัด A(-2, -3), B(6, 1) และ C(-2, 5)
	วิธีทำ จากสูตรระยะทางระหว่างจุดสองจุด จะได้ $d_{AC} = 5 - (-3) = 5 + 3 = 8$ $d_{AB} = \sqrt{(6-(-2))^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ $d_{BC} = \sqrt{(6-(-2))^2 + (1-5)^2} = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ เนื่องจากความยาวของด้าน AB เท่ากับด้าน BC ดังนั้น สามเหลี่ยม ABC เป็น สามเหลี่ยมหน้าจั่ว □



รูป 1.9



รูป 1.10

ตัวอย่าง 1.7

จุดยอดสองจุดสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็น $(0, 0)$ และ $(0, 4)$ จุดยอดที่สามของสามเหลี่ยมมีพิกัดเท่าไร

วิธีทำ เพราะว่าจุด $(0, 0)$ และ $(0, 4)$ อยู่บนแกน y จะได้ระยะระหว่างจุดทั้งสอง = 4 หน่วย ดังนั้นด้านของสามเหลี่ยมนี้ยาวด้านละ 4 หน่วย เพราะว่าจุดกึ่งกลางของจุด $(0, 0)$ และจุด $(0, 4)$ คือ $(0, 2)$

ให้จุดยอดที่สามของรูปสามเหลี่ยมนี้ คือ $(x, 2)$
เนื่องจากสามเหลี่ยมนี้เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า จะได้

$$\text{ระยะระหว่างจุด } (x, 2) \text{ กับจุด } (0, 0) = 4$$

$$\sqrt{x^2 + 4} = 4$$

$$x^2 + 4 = 16$$

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$$

ดังนั้น จุดยอดที่สามของสามเหลี่ยมนี้ คือ $(-2\sqrt{3}, 2)$ หรือ $(2\sqrt{3}, 2)$

ดังรูป 1.11



ตัวอย่าง 1.8

รูปสามเหลี่ยม PQR มีมุม PQR เป็นมุมฉาก และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 หน่วย ถ้าพิกัดของจุด P และ Q $(-4, 3)$ และ $(-1, 2)$ ตามลำดับจงหาพิกัดของจุด R

วิธีทำ เพราะว่าความยาวของด้าน $PR = |PR| = 10$

$$\text{และ } |PQ| = \sqrt{(-4+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

เนื่องจาก PQR เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้

$$|PR|^2 = |PQ|^2 + |QR|^2$$

$$\text{ดังนั้น } |QR|^2 = |PR|^2 - |PQ|^2 = 100 - 10 = 90$$

$$\text{หรือ } |QR| = \sqrt{90}$$

	ให้พิกัดของจุด R เป็น (x, y) จะได้ $PR ^2 = (x+4)^2 + (y-3)^2$ ดังนั้น $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 100$ (1) $x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 100$ $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 75$ (2) และ $QR ^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2$ จะได้ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 90$ $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 90$ $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 85$ (3) (2)-(3) $6x - 2y = -10$ $3x - y = -5$ $y = 3x + 5$ แทนลงใน (1) จะได้ $(x+4)^2 + (3x+5)^2 = 100$ $x^2 + 8x + 16 + 9x^2 + 30x + 25 = 100$ $10x^2 + 38x - 59 = 0$ $x^2 + 3.8x - 5.9 = 0$ $(x+4)(x-2) = 0$ จะได้ $x = -4, 2$ และ $y = -7, 11$ ดังนั้น พิกัดของจุด R คือ $(-4)(-7)$ หรือ $(2, 11)$ ดังรูป 1.12
หมายเหตุ	เมื่อได้ $QR = \sqrt{90}$ ก็หาระยะทางจากจุดที่โจทย์บอกมาให้กับจุด $(-1, 2)$ ถ้าระยะทางระหว่างจุดทั้งสองเป็น $\sqrt{90}$ จะได้คำตอบเช่นกัน
รูป 1.11	รูป 1.12

ตัวอย่าง 1.9

จงหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $A(2, -5)$ และ $B(-1, -1)$

2. $P(-2\sqrt{2}, 0)$ และ $Q(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

วิธีทำ 1. ให้จุด $A(2, -5) = A(x_1, y_1)$

จุด $B(-1, -1) = B(x_2, y_2)$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด A และ B คือ

$$\begin{aligned} d &= |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-1 - 2)^2 + (-1 + 5)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ หน่วย} \end{aligned}$$

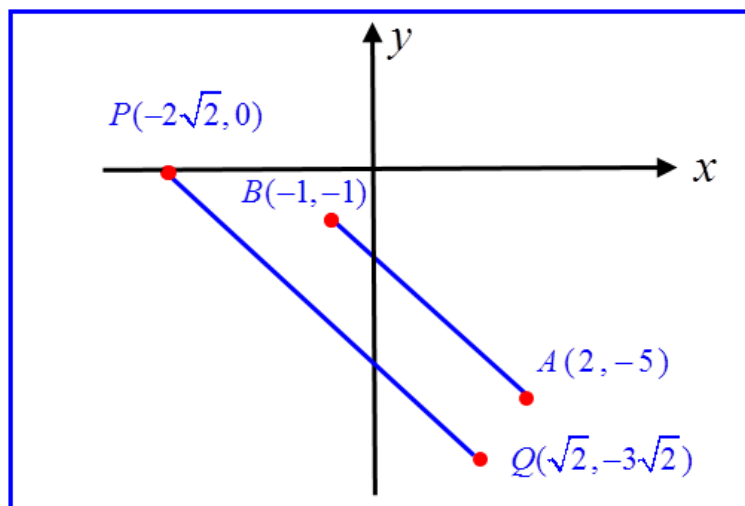
2. ให้จุด $P(-2\sqrt{2}, 0) = P(x_1, y_1)$

จุด $Q(\sqrt{2}, -3\sqrt{2}) = Q(x_2, y_2)$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด P และ Q คือ

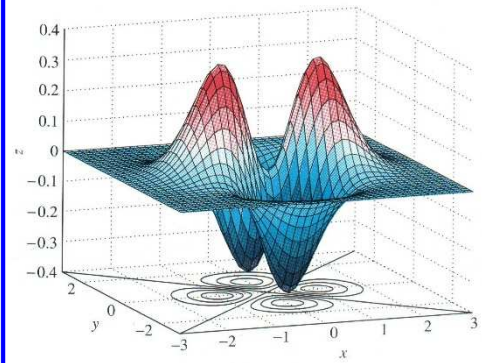
$$\begin{aligned} d &= |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2} + 2\sqrt{2})^2 + (-3\sqrt{2} - 0)^2} \\ &= \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (-3\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{18 + 18} = \sqrt{36} = 6 \text{ หน่วย} \end{aligned}$$

ดูรูป 1.13



รูป 1.13

1.3 จุดแบ่งของส่วนของเส้นตรง (Division of A Line Segment)



ทฤษฎี 1.2

กำหนดให้ จุด $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ เป็น 2 จุดใดๆ บนระนาบ xy
ให้ จุด $P(x, y)$ แบ่งระยะ AB ออกเป็นอัตราส่วน $AP : PB = r_1 : r_2$
เราจะได้จุด $P(x, y)$ มีพิกัด ดังนี้

$$x = \frac{r_1 x_2 + r_2 x_1}{r_1 + r_2}, \quad y = \frac{r_1 y_2 + r_2 y_1}{r_1 + r_2} \quad \dots\dots\dots(1.2)$$

พิสูจน์ ให้จุด $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ เป็นจุดบนระนาบ xy
จากรูป 1.14 จะได้

$$\begin{aligned} \text{ระยะ } AP &= |AP| = r_1 & \text{ระยะ } AB &= |AB| = r_1 + r_2 \\ AM &= x - x_1 & AN &= x_2 - x_1 \\ PM &= y - y_1 & BN &= y_2 - y_1 \end{aligned}$$

สามเหลี่ยม APM คล้ายกับสามเหลี่ยม ABN เราจะได้สมบัติต่อไปนี้เป็นจริง คือ

$$\frac{AM}{AN} = \frac{PM}{BN} = \frac{AP}{AB} \quad \dots\dots\dots(1)$$

จาก (1) $\frac{AM}{AN} = \frac{AP}{AB}$

จาก $\frac{PM}{BN} = \frac{AP}{AB}$

จะได้

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \quad \text{และ}$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{r_1}{r_1 + r_2}$$

$$x - x_1 = \frac{r_1(x_2 - x_1)}{r_1 + r_2},$$

$$y - y_1 = \frac{r_1(y_2 - y_1)}{r_1 + r_2}$$

$$x = \frac{r_1 x_2 - r_1 x_1}{r_1 + r_2} + x_1,$$

$$y = \frac{r_1 y_2 - r_1 y_1}{r_1 + r_2} + y_1$$

$$= \frac{r_1 x_2 - r_1 x_1 + r_1 x_1 + r_2 x_1}{r_1 + r_2},$$

$$= \frac{r_1 y_2 - r_1 y_1 + r_1 y_1 + r_2 y_1}{r_1 + r_2}$$

ดังนั้น $x = \frac{r_1 x_2 + r_2 x_1}{r_1 + r_2}$ และ

$$y = \frac{r_1 y_2 + r_2 y_1}{r_1 + r_2}$$

