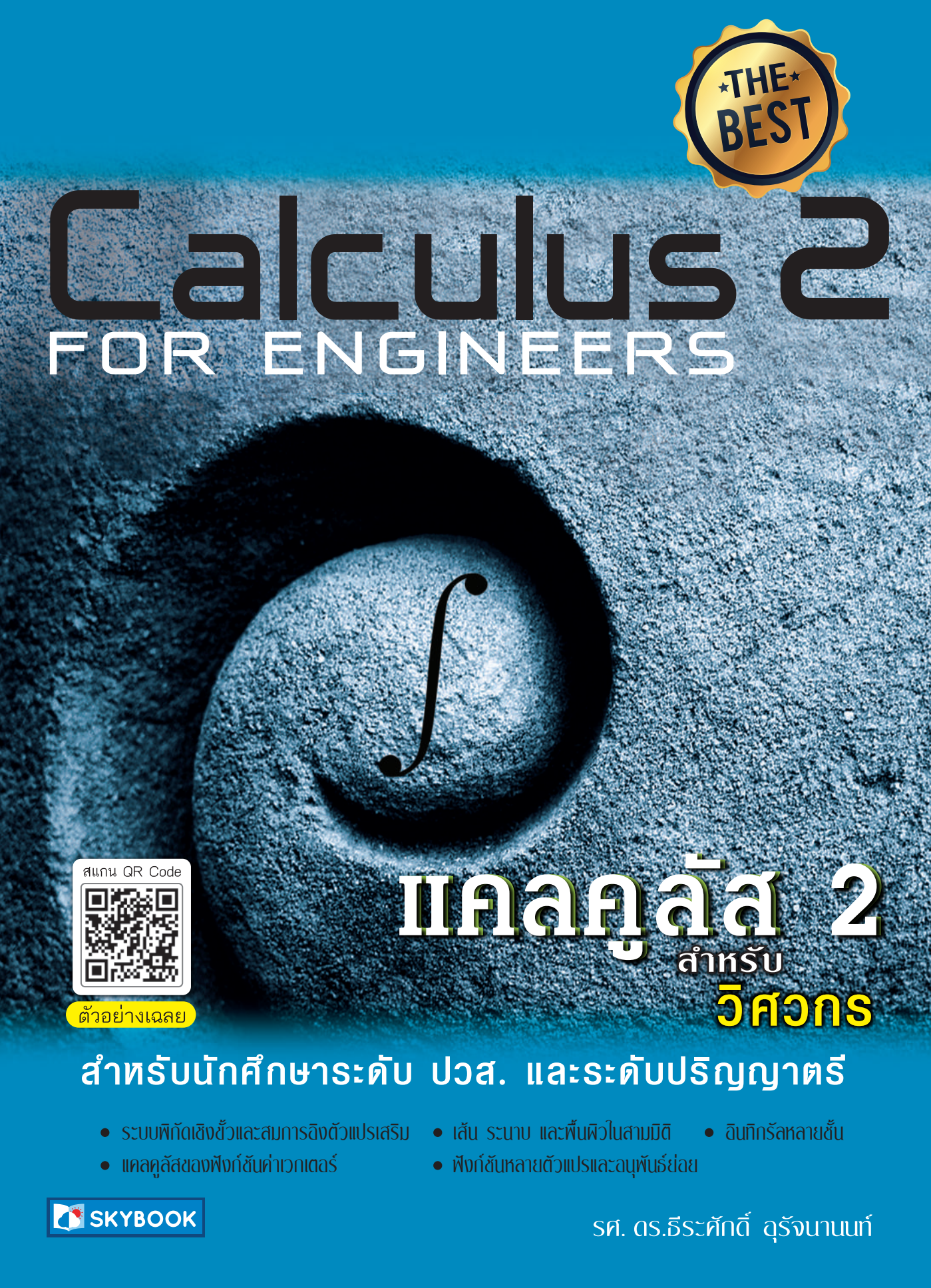
THE BEST

Calculus 2
FOR ENGINEERS



สแกน QR Code

ตัวอย่างเฉลย

แคลคูลัส 2
สำหรับ
วิศวกร

สำหรับนักศึกษาระดับ ปวส. และระดับปริญญาตรี

- ระบบพิกัดเชิงขั้วและสมการอิงตัวแปรเสริม
- เส้น ระนาบ และพื้นผิวในสามมิติ
- อินทิกรัลหลายชั้น
- แคลคูลัสของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์
- ฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย

SKYBOOK

รศ. ดร.ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์

คำนำ

ตำราแคลคูลัส 2 สำหรับวิศวกร (Calculus 2 for Engineers) เล่มนี้ ผู้เขียนได้เขียนและเรียบเรียงขึ้น เพื่อให้นักศึกษาได้มีตำราที่ใช้ในการประกอบการเรียนการสอนนักศึกษาในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วศ.บ.) หลักสูตรอุตสาหกรรมศาสตรบัณฑิต (อส.บ.) และหลักสูตรครุศาสตร์อุตสาหกรรมบัณฑิต (ค.อ.บ.) ระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลล้านนา นอกจากนี้ตำราเล่มนี้นักศึกษามหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอื่น ๆ และสถาบันอาชีวศึกษาทั่วประเทศ สามารถศึกษาเนื้อหาที่มีความสนใจเพื่อใช้ในการประกอบการเรียนการสอนเพิ่มเติมได้ โดยมีเนื้อหาดังนี้

1. **ระบบพิกัดเชิงขั้วและสมการอิงตัวแปรเสริม**
2. **เส้น ระนาบ และพื้นผิวในสามมิติ**
3. **แคลคูลัสของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์**
4. **ฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย**
5. **อินทิกรัลหลายชั้น**

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าตำราแคลคูลัส 2 สำหรับวิศวกร เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ในการประกอบการเรียนการสอนของนักศึกษาและผู้ที่ต้องการใช้ประกอบการศึกษาเพิ่มเติม

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดาและมารดา ที่มีพระคุณอันยิ่งใหญ่มหาศาลหาสิ่งอื่นใดเสมอมิได้ และผู้เขียนขอโอกาสนี้แสดงคารวะและกตัญญูกตเวทีต่อ คุณครู อาจารย์ทุก ๆ ท่านของผู้เขียน รวมทั้งผู้ช่วยศาสตราจารย์เมธี ลิมอักษร ผู้ช่วยศาสตราจารย์เสกสรร ดำกระบี่ รองศาสตราจารย์ ดร. สมใจ จิตต์พิทักษ์ รองศาสตราจารย์ ดร. วิชัย ชำนิ รองศาสตราจารย์สมศักดิ์ โพธิวิจิตร รองศาสตราจารย์ สุพจน์ ชะนะมา รองศาสตราจารย์ ดร. สุเทพ ทองอยู่ ศาสตราจารย์ ดร. สมหวัง พิธิยานุวัฒน์ ศาสตราจารย์ ดร. อุทุมพร จามรมาน อาจารย์ ดร.อัญชลี ตนานนท์ และรองศาสตราจารย์ ดร. กิตติพร ปัญญาภิญโญผล ที่เป็นบูรพคณาจารย์ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้และประสบการณ์ต่าง ๆ ให้แก่ผู้เขียน รวมถึงเพื่อนร่วมงานทุกคน และท้ายสุดครอบครัวอันเป็นที่รักยิ่งที่สุดของผู้เขียนตลอดมา

รองศาสตราจารย์ ดร. ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์

สารบัญ

		หน้า
บทที่ 1	**ระบบพิกัดเชิงขั้วและสมการอิงตัวแปรเสริม**	1
	ระบบพิกัดเชิงขั้ว	1
	แบบฝึกหัด 1.1	15
	คำตอบแบบฝึกหัด 1.1	17
	กราฟในพิกัดเชิงขั้ว	18
	แบบฝึกหัด 1.2	36
	คำตอบแบบฝึกหัด 1.2	37
	สมการอิงตัวแปรเสริม	40
	แบบฝึกหัด 1.3	56
	คำตอบแบบฝึกหัด 1.3	58
	แคลคูลัสของเส้นโค้งเชิงขั้ว	59
	แบบฝึกหัด 1.4	77
	คำตอบแบบฝึกหัด 1.4	78
บทที่ 2	**เส้น ระนาบและพื้นผิวในสามมิติ**	79
	สมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง	79
	แบบฝึกหัด 2.1	89
	คำตอบแบบฝึกหัด 2.1	91
	ระนาบในปริภูมิสามมิติ	92
	แบบฝึกหัด 2.2	94
	คำตอบแบบฝึกหัด 2.2	95
	พื้นผิวในสามมิติ	96
	แบบฝึกหัด 2.3	109
	คำตอบแบบฝึกหัด 2.3	110

		หน้า
บทที่ 3	**แคลคูลัสของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์**	111
	ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของหนึ่งตัวแปร	111
	แบบฝึกหัด 3.1	117
	คำตอบแบบฝึกหัด 3.1	118
	แคลคูลัสของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของหนึ่งตัวแปร	119
	แบบฝึกหัด 3.2	139
	คำตอบแบบฝึกหัด 3.2	141
	การเปลี่ยนตัวแปรเสริมและความยาวส่วนโค้ง	143
	แบบฝึกหัด 3.3	152
	คำตอบแบบฝึกหัด 3.3	153
	เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยและเวกเตอร์ปกติ	154
	แบบฝึกหัด 3.4	164
	คำตอบแบบฝึกหัด 3.4	165
	ความโค้ง	166
	แบบฝึกหัด 3.5	184
	คำตอบแบบฝึกหัด 3.5	186
บทที่ 4	**ฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย**	187
	ฟังก์ชันหลายตัวแปร	187
	แบบฝึกหัด 4.1	216
	คำตอบแบบฝึกหัด 4.1	218
	อนุพันธ์ย่อยฟังก์ชันหลายตัวแปร	219
	แบบฝึกหัด 4.2	281
	คำตอบแบบฝึกหัด 4.2	287
	ความหมายของอนุพันธ์ย่อยทางเรขาคณิต	291
	แบบฝึกหัด 4.3	345
	คำตอบแบบฝึกหัด 4.3	349

		หน้า
บทที่ 5	**อินทิกรัลหลายชั้น**	351
	อินทิกรัลสองชั้นบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า	351
	แบบฝึกหัด 5.1	361
	คำตอบแบบฝึกหัด 5.1	363
	อินทิกรัลสองชั้นบนบริเวณทั่วไป	364
	แบบฝึกหัด 5.2	393
	คำตอบแบบฝึกหัด 5.2	396
	อินทิกรัลสองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว	397
	แบบฝึกหัด 5.3	417
	คำตอบแบบฝึกหัด 5.3	420
	การประยุกต์ของอินทิกรัลสองชั้น	421
	แบบฝึกหัด 5.4	460
	คำตอบแบบฝึกหัด 5.4	463
	อินทิกรัลสามชั้นบนบริเวณรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก	465
	แบบฝึกหัด 5.5	500
	คำตอบแบบฝึกหัด 5.5	502
	การเปลี่ยนตัวแปรในอินทิกรัลสามชั้น	503
	แบบฝึกหัด 5.6	543
	คำตอบแบบฝึกหัด 5.6	545
	การประยุกต์ของอินทิกรัลสามชั้น	546
	แบบฝึกหัด 5.7	558
	คำตอบแบบฝึกหัด 5.7	561

หน้า

ภาคผนวก 563

สูตรการหาอนุพันธ์ 564

สูตรการอินทิเกรต 565

สรุปภาคตัดกรวย 566

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 571

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ 572

พีชคณิตพื้นฐาน 574

สมบัติของเลขชี้กำลังและลอการิทึม 574

บรรณานุกรม 575

บทที่ 1

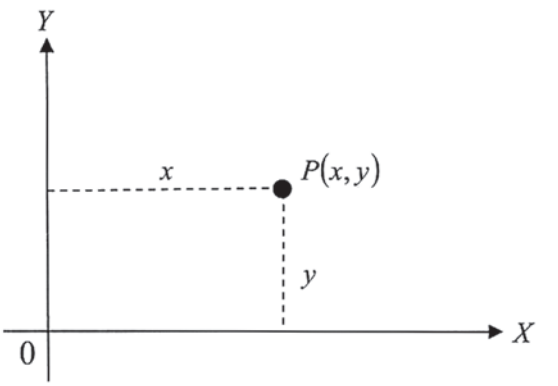
ระบบพิกัดเชิงขั้วและสมการอิงตัวแปรเสริม

เมื่อกำหนดตำแหน่งของจุดจุดหนึ่ง P ในระนาบ 2 มิติ และในปริภูมิ 3 มิติของระบบพิกัดฉาก (rectangular coordinate system) ที่ประกอบด้วยแกนพิกัดที่ตั้งฉากกัน 2 แกนใน 2 มิติ และ 3 แกนใน 3 มิติ ยังมีระบบพิกัดชนิดอื่น ๆ ที่จะบอกตำแหน่งของจุดที่ใช้ได้เหมาะสมกับปัญหาหลายปัญหา ระบบพิกัดดังกล่าวใน 2 มิติ ได้แก่ ระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate system)

1.1 ระบบพิกัดเชิงขั้ว

1.1.1 พิกัดเชิงขั้ว

ถ้า P เป็นจุดที่มีพิกัดฉากเป็น (x,y) ใน 2 มิติ เราจะทราบตำแหน่งของ P ได้ โดยที่ P จะอยู่ห่างจากแกน Y เป็นระยะทาง x หน่วย และจะอยู่ห่างจากแกน X เป็นระยะทาง y หน่วย เป็นการบอกตำแหน่งของจุดโดยการอาศัยการอ้างอิงจากแกนพิกัดฉากดังรูป 1.1.1

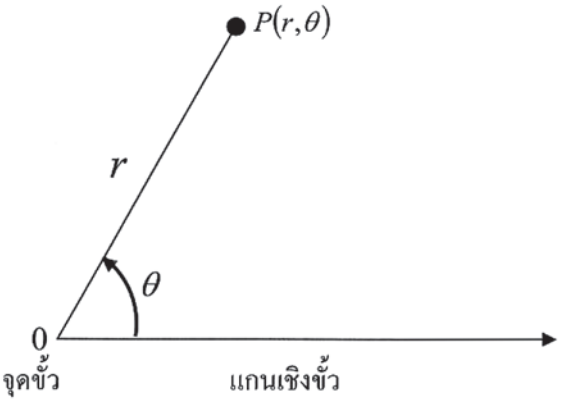


รูป 1.1.1

สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้วใน 2 มิติ เราสามารถสร้างระบบพิกัดเชิงขั้วได้ดังนี้

กำหนดจุดคงที่ O จุดหนึ่ง เรียกว่า จุดกำเนิด (origin) หรือ ขั้ว (pole) และใช้จุดขั้วนี้เป็นจุดปลายสร้างเส้นตามแนวนอนขึ้นมาเส้นหนึ่ง เรียกว่า แกนเชิงขั้ว (polar axis)

ให้ P เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ เราอาจจะแทนจุด P ด้วยพิกัดเชิงขั้ว (r,θ) เมื่อ r คือ ระยะจากจุด P ไปยังจุดขั้ว เรียกว่า ระยะชี้ออก (radial distance) และ θ เป็นมุมที่วัดจากแกนเชิงขั้วไปยังเส้น OP เรียกว่า มุมเชิงขั้ว (polar angle) ดังรูป 1.1.2

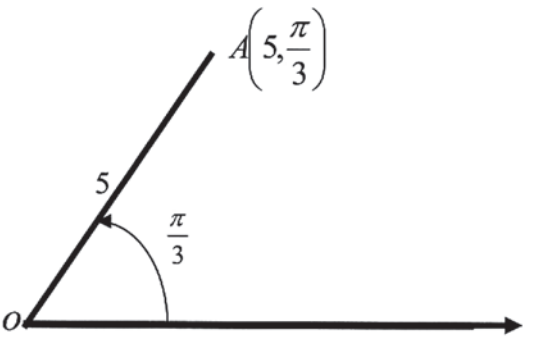


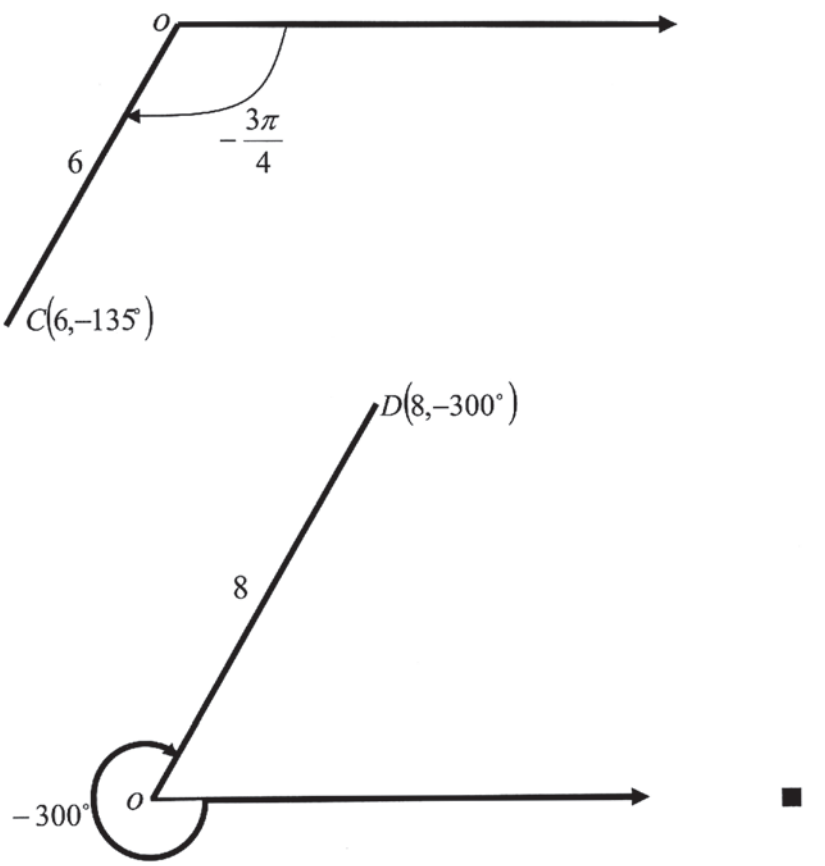
รูป 1.1.2

เราเรียกคู่อันดับ (r,θ) โดยวิธีดังกล่าวว่า พิกัดเชิงขั้วของ P การสร้างจุด (r,θ) ในระบบพิกัดเชิงขั้ว เริ่มต้นด้วยการวัดมุม θ ก่อน โดยการวัดมุมจะวัดจากแกนเชิงขั้วใน 2 ทิศทาง คือ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกาและตามเข็มนาฬิกา โดยใช้เครื่องหมาย บวก และลบ กำกับหน้าของค่า θ เพื่อระบุทิศทางทวนเข็มนาฬิกาและตามเข็มนาฬิกาตามลำดับ ซึ่งมุมเชิงขั้ว θ อาจจะวัดเป็นเรเดียนหรือองศาก็ได้ แล้วจึงกำหนดความยาวของ r

ตัวอย่าง 1.1.1 จงสร้างจุด $A\left(5,\frac{\pi}{3}\right)$, $B(3,120^\circ)$, $C\left(6,-\frac{3\pi}{4}\right)$, $D(8,-300^\circ)$

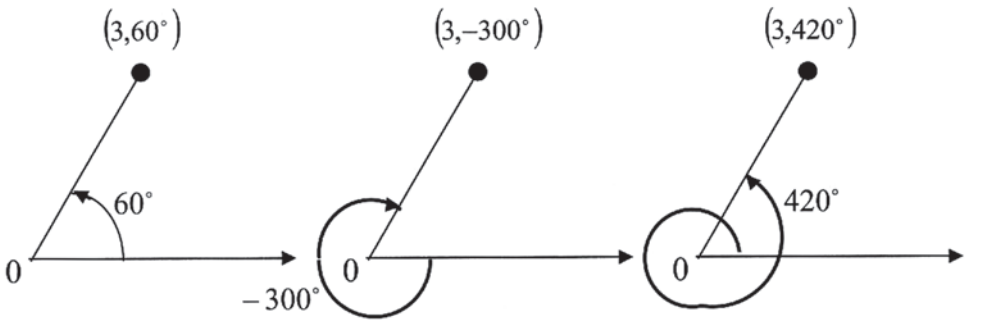
วิธีทำ





รูป 1.1.3

พิกัดเชิงขั้วของจุดจุดหนึ่งอาจมีได้หลายแบบ เช่น พิกัดเชิงขั้ว $(3,60^\circ)$, $(3,-300^\circ)$ และ $(3,420^\circ)$ แทนจุดเดียวกัน ดังรูป 1.1.4



พิกัดเชิงขั้ว 3 คู่อันดับ แทนจุดเดียวกัน

รูป 1.1.4

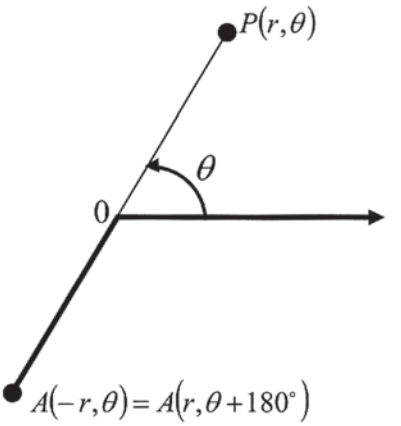
โดยทั่วไป ถ้าจุด P มีพิกัดเชิงขั้ว (r,θ) แล้ว $(r,\theta+n\cdot 360^\circ)$ และ $(r,\theta-n\cdot 360^\circ)$ เมื่อ $n=0,1,2,...$ เป็นพิกัดเชิงขั้วของจุด P เช่นเดียวกัน

กรณีที่ P เป็นจุดกำเนิด เส้น OP ในรูป 1.1.2 จะกลายเป็นจุด เพราะ $r=0$ กรณีนี้จะกำหนดมุม θ ได้ไม่ชัดเจน จึงมีข้อตกลงว่าอาจจะใช้มุม θ เป็นเท่าไรก็ได้ ดังนั้นจะแทนจุดกำเนิดด้วย $(0,\theta)$ สำหรับ θ ทุกค่า

กรณีค่า r เป็นลบ

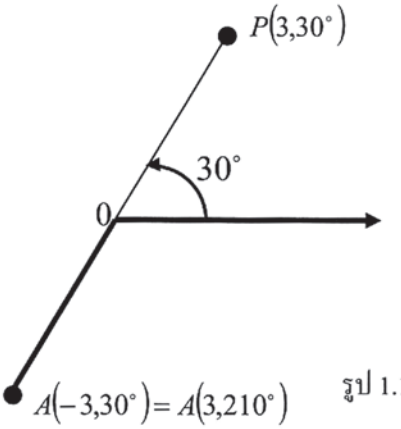
ในการเขียนกราฟเส้นโค้งที่กำหนดโดยสมการ $r=f(\theta)$ ในพิกัดเชิงขั้ว อาจจำเป็นต้องให้ r มีค่าเป็นลบได้ ดังนั้นจึงต้องนิยามเป็นกรณีพิเศษดังนี้

พิจารณาจุด P ถ้าขยายระยะชี้ออก OP ในทิศตรงกันข้าม และวัดระยะจากจุดกำเนิดย้อนหลังไปตามส่วนขยายระยะชี้ออกเป็นระยะ r จะได้จุดที่มีพิกัด $A(r,\theta+180^\circ)$ ซึ่งจุดนี้อาจแทนโดย $A(-r,\theta)$ โดยที่เครื่องหมายลบบอกให้ทราบว่า จุดนี้อยู่บนระยะชี้ออกที่ขยายออกไปทิศตรงกันข้าม ดังนั้นจึงนิยาม $A(-r,\theta)$ และ $A(r,\theta+180^\circ)$ เป็นพิกัดของจุดเดียวกัน ดังรูป 1.1.5



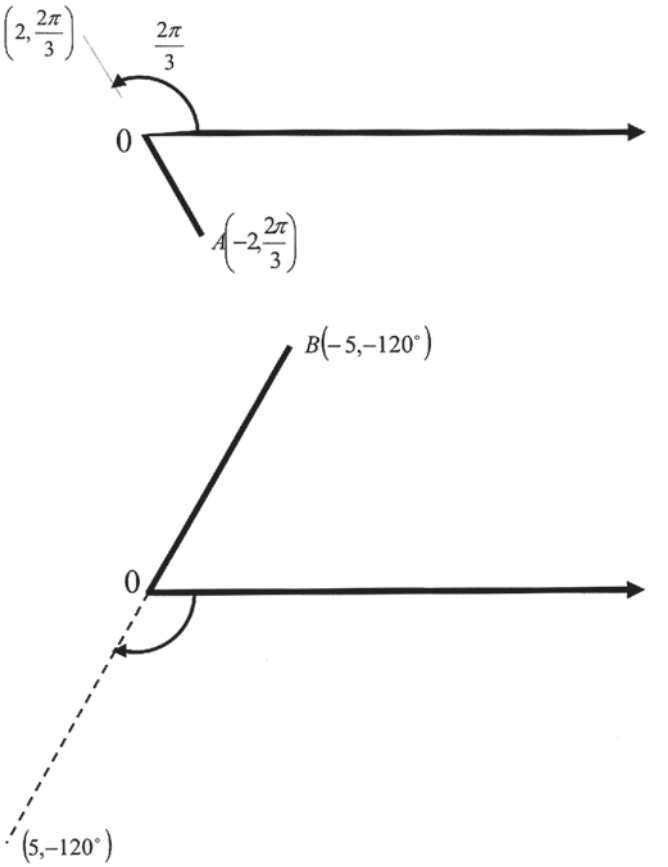
รูป 1.1.5

เช่น $r=3$ และ $\theta=30^\circ$ จะได้ว่า $(-3,30^\circ)$ และ $(3,30^\circ+180^\circ)=(3,210^\circ)$ เป็นพิกัดเชิงขั้วของจุดเดียวกัน ดังรูป 1.1.6



รูป 1.1.6

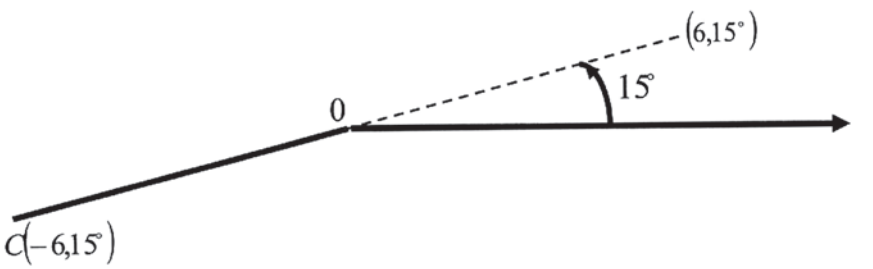
ตัวอย่าง 1.1.2 จงสร้างจุด $A\left(-2,\frac{2\pi}{3}\right)$, $B(-5,-120^\circ)$

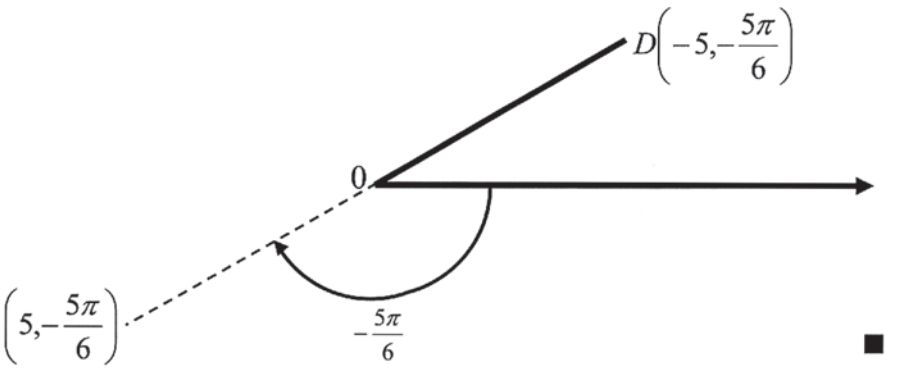


■

รูป 1.1.7

ตัวอย่าง 1.1.3 จงสร้างจุด $C(-6,15^\circ)$, $D\left(-5,-\frac{5\pi}{6}\right)$





รูป 1.1.8

ตัวอย่าง 1.1.4 กำหนดจุด P มีพิกัดเชิงขั้วเป็น $\left(4,\frac{11\pi}{6}\right)$ จงหาพิกัดเชิงขั้วตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ของจุด P ต่อไปนี้

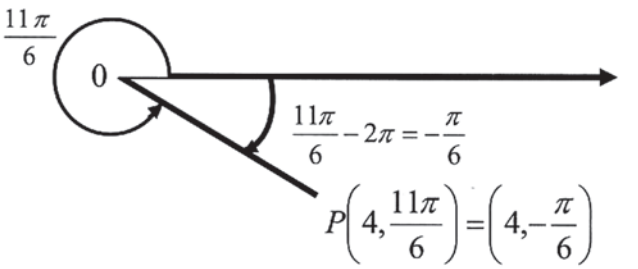
ก. $r>0$ และ $-2\pi\le\theta\le 0$

ข. $r<0$ และ $0\le\theta\le 2\pi$

ค. $r<0$ และ $-2\pi\le\theta\le 0$

วิธีทำ เนื่องจากพิกัดเชิงขั้วจุด $P\left(4,\frac{11\pi}{6}\right)$ เป็นจุดอยู่ในควอดรันท์ (Quadrant) ที่ 4 โดยมี $r>0$ และ $0\le\theta\le 2\pi$

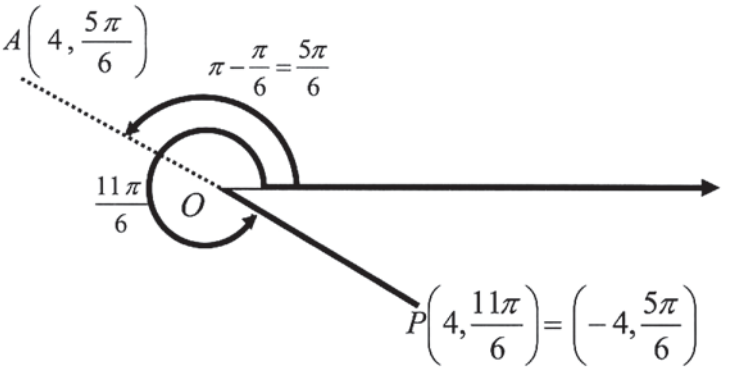
ก. เนื่องจาก $\frac{11\pi}{6}-2\pi=-\frac{\pi}{6}$ แสดงว่า จุด P มีมุมเชิงขั้ว θ โดยที่ $-2\pi\le\theta\le 0$ คือ $\theta=-\frac{\pi}{6}$ ดังรูป 1.1.9



รูป 1.1.9

ดังนั้นจุด $P\left(4,\frac{11\pi}{6}\right)$ มีพิกัดเชิงขั้วที่มี $r>0$ และ $-2\pi\le\theta\le 0$ คือ $\left(4,-\frac{\pi}{6}\right)$ ■

ข. ต้องการพิกัดเชิงขั้วที่มี $r<0$ แสดงว่าต้องวัดมุมจากแกนเชิงขั้วไปยังด้านที่ต่อออกไปในทิศตรงกันข้ามกับด้าน OP ให้เป็นด้าน OA ดังรูป1.1.10

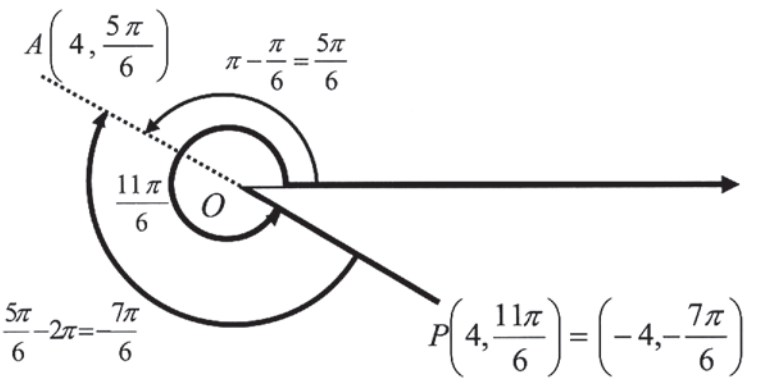


รูป1.1.10

ดังนั้นมุมเชิงขั้ว θ ถึงด้าน OA มีค่าเท่ากับ $\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$ จะได้ $\theta=\frac{5\pi}{6}$ และ

จุด $P\left(4,\frac{11\pi}{6}\right)$ มีพิกัดเชิงขั้วที่มี $r<0$ และ $0\le\theta\le 2\pi$ คือ $\left(-4,\frac{5\pi}{6}\right)$ ■

ค. จากการวัดมุมจากแกนเชิงขั้วไปยังด้านที่ต่อออกไปในทิศตรงกันข้ามกับด้าน OP ให้เป็นด้าน OA ในข้อ ข. ซึ่ง $0\le\theta\le 2\pi$ มีค่า $\theta=\frac{5\pi}{6}$ นั้น ต้องการ $-2\pi\le\theta\le 0$ จะได้ $\theta=\frac{5\pi}{6}-2\pi=-\frac{7\pi}{6}$ ดังรูป1.1.11

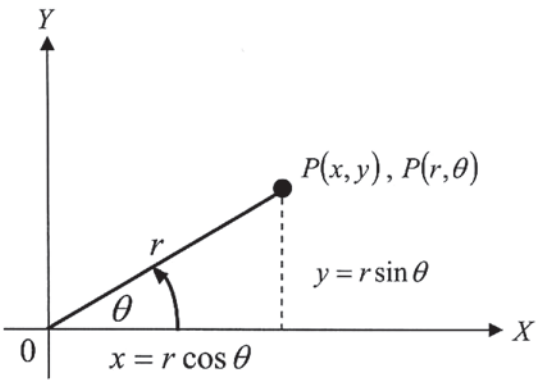


รูป1.1.11

ดังนั้น จุด $P\left(4,\frac{11\pi}{6}\right)$ มีพิกัดเชิงขั้วที่มี $r<0$ และ $-2\pi\le\theta\le 0$ คือ $\left(-4,-\frac{7\pi}{6}\right)$ ■

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้วและพิกัดฉาก

ในการแก้ปัญหาบางปัญหา อาจจะต้องใช้ทั้งพิกัดเชิงขั้วและพิกัดฉากในปัญหาเดียวกัน ดังนั้นจึงต้องใช้ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดทั้งสอง โดยให้แกน X ด้านทางบวก แทนแกนเชิงขั้วของระบบพิกัดเชิงขั้ว ดังนั้นจุด P แต่ละจุดจะมีทั้งพิกัดเชิงขั้ว (r,θ) และพิกัดฉาก (x,y) ดังรูป 1.1.12



รูป 1.1.12

จากรูป 1.1.10 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดทั้งสองโดยสมการดังนี้

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \tag{1.1.1}$$

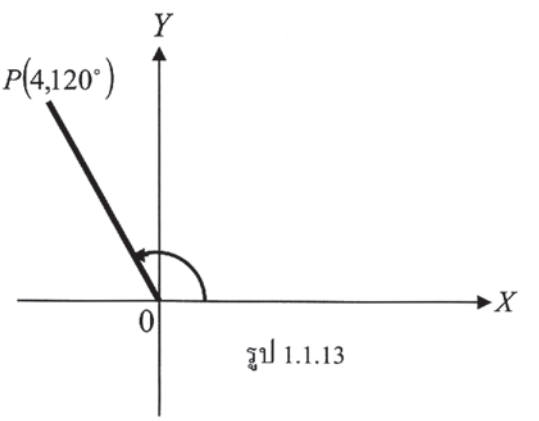
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \tag{1.1.2}$$

ตัวอย่าง 1.1.5 จงหาพิกัดฉากของจุด P และ Q ที่มีพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้

ก. $P(4,120^\circ)$

ข. $Q\left(-4,\frac{4\pi}{3}\right)$

วิธีทำ ก. จากจุด $P(4,120^\circ)$ จะได้ $r=6$ และ $\theta=120^\circ$ ซึ่งจะเห็นว่า จุด P เป็นจุดอยู่ในควอดรันท์ที่ 2 ดังรูป 1.1.13 โดยมีค่า x เป็นลบ และค่า y เป็นบวก



รูป 1.1.13

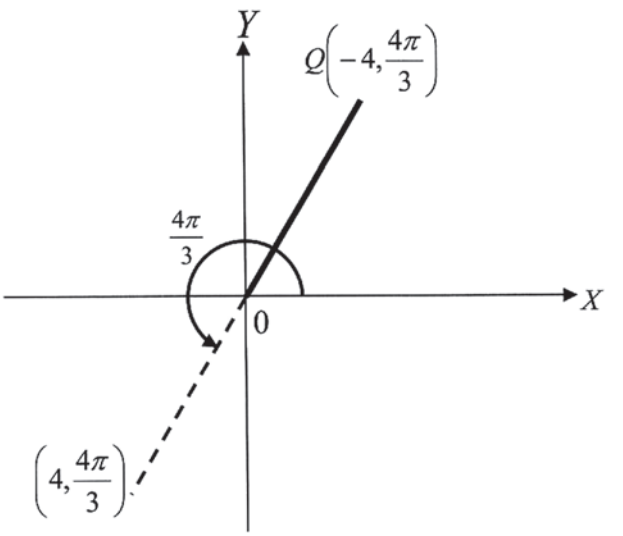
จากสมการ (1.1.1) จะได้

$$x = r\cos\theta = 4\cos 120^\circ = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$y = r\sin\theta = 4\sin 120^\circ = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

ดังนั้นพิกัดเชิงขั้ว $\left(4,120^\circ\right)$ มีพิกัดฉากคือ $\left(-3,3\sqrt{3}\right)$ ■

ข. จากจุด $Q\left(-4,\frac{4\pi}{3}\right)$ จะได้ $r=-4$ และ $\theta=\frac{4\pi}{3}$ ซึ่งจะเห็นว่า จุด Q เป็นจุดอยู่ในควอดรันท์ที่ 1 ดังรูป 1.1.14 โดยมีค่า x เป็นบวก และค่า y เป็นบวก



รูป 1.1.14

จากสมการ (1.1.1) จะได้

$$x = r\cos\theta = -4\cos\frac{4\pi}{3} = -4\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$y = r\sin\theta = -4\sin\frac{4\pi}{3} = -4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

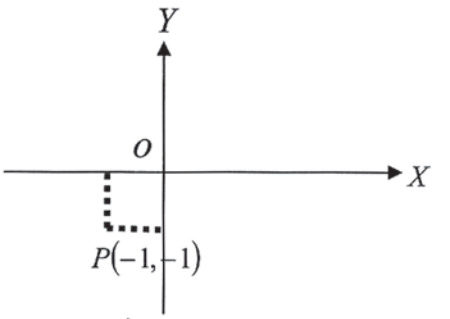
ดังนั้นพิกัดเชิงขั้ว $Q\left(-4,\frac{4\pi}{3}\right)$ มีพิกัดฉากคือ $\left(2,2\sqrt{3}\right)$ ■

ตัวอย่าง 1.1.6 จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุด P ที่มีพิกัดฉากโดยมีเงื่อนไขต่อไปนี้

ก. $P(-1,-1)$ ที่มี $r>0$ และ $0\le\theta\le 2\pi$

ข. $P(-1,-1)$ ที่มี $r<0$ และ $0\le\theta\le 2\pi$

วิธีทำ ก. จากจุด $P(-1,-1)$ จะได้ $x=-1$ และ $y=-1$ ซึ่งจะเห็นว่า จุด P เป็นจุดอยู่ใน ในควอดรันท์ที่ 3 ดังรูป 1.1.15



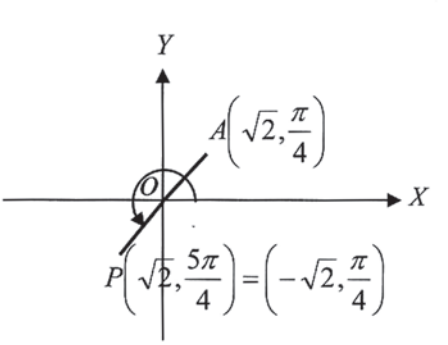
รูป 1.1.15

จากสมการ $(1.1.2)$ จะได้

$$r^2=x^2+y^2=(-1)^2+(-1)^2=2\ ,\ r=\sqrt{2}$$
$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-1}{-1}=1\ ,\ \theta=\frac{5\pi}{4}$$

ดังนั้นจุด $P(-1,-1)$ มีพิกัดเชิงขั้วที่มี $r>0$ และ $0\le\theta\le 2\pi$ คือ $\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$ ■

ข. จากข้อ ก. ที่ได้พิกัดเชิงขั้ว $P\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$ นั้น ต้องการพิกัดเชิงขั้วที่มี $r<0$ แสดงว่าต้องวัดมุมจากแกนเชิงขั้วไปยังด้านที่ต่อออกไปในทิศตรงกันข้ามกับด้าน OP ให้เป็นด้าน OA ดังรูป1.1.16



รูป 1.1.16

ดังนั้นมุมเชิงขั้ว θ ถึงด้าน OA มีค่าเท่ากับ $\frac{5\pi}{4}-\pi=\frac{\pi}{4}$ จะได้ $\theta=\frac{\pi}{4}$ และ จุด $A\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$ นั่นคือ จุด $P\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ มีพิกัดเชิงขั้วที่มี $r<0$ และ $0\le\theta\le 2\pi$ คือ $\left(-\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$ ■

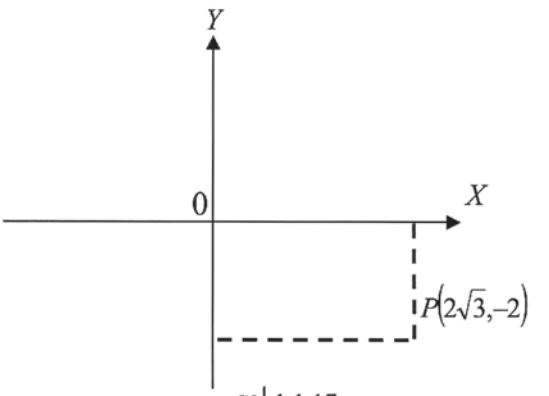
ตัวอย่าง 1.1.7 จงหาพิกัดเชิงขั้วตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ของจุดพิกัดฉากต่อไปนี้

ก. $P(2\sqrt{3},-2)$ จงหาพิกัดเชิงขั้วที่มี $r>0$ และ $0\le\theta\le 360^\circ$

ข. $P(2\sqrt{3},-2)$ จงหาพิกัดเชิงขั้วที่มี $r>0$ และ $-360^\circ\le\theta\le 0$

ค. $P(2\sqrt{3},-2)$ จงหาพิกัดเชิงขั้วที่มี $r<0$ และ $0\le\theta\le 360^\circ$

วิธีทำ ก. จากจุด $P(2\sqrt{3},-2)$ จะได้ $x=2\sqrt{3}$ และ $y=-2$ ซึ่งจะเห็นว่า จุด P เป็นจุดอยู่ในควอดรันท์ที่ 4 ดังรูป 1.1.17



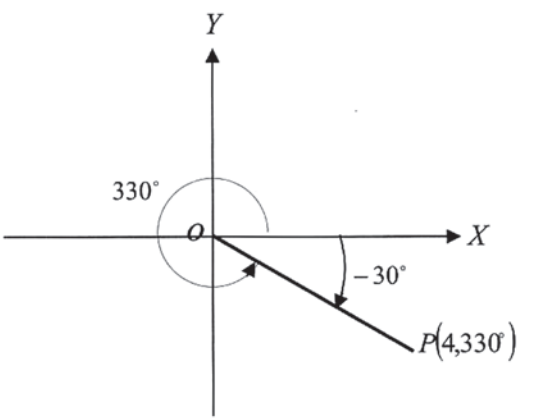
รูป 1.1.17

จากสมการ (1.1.2) จะได้ $r^2=x^2+y^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+(-2)^2=16$, $r=4$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-2}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ \theta=330^\circ$$

ดังนั้นจุด $P(4\sqrt{3},-4)$ มีพิกัดเชิงขั้วที่มี $r>0$ และ $0\le\theta\le 360^\circ$ คือ $(4,330^\circ)$ ■

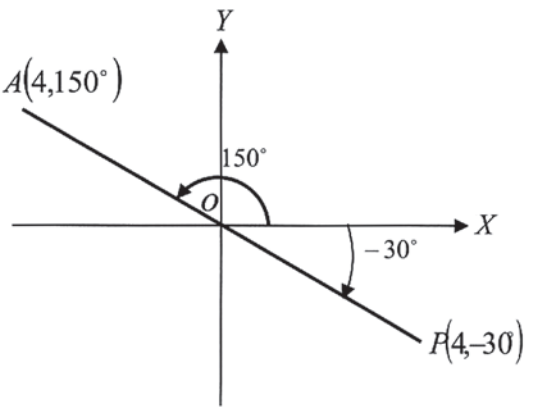
ข. จากข้อ ก. พิกัดเชิงขั้วจุด $P\ (4,330^\circ)$ เป็นจุดอยู่ในควอดรันท์ที่ 4 โดยมี $r>0$ และ $0\le\theta\le 360^\circ$ เนื่องจาก $330^\circ-360^\circ=-30^\circ$ แสดงว่า จุด P มีมุมเชิงขั้ว θ โดยที่ $-360^\circ\le\theta\le 0$ คือ $\theta=-30^\circ$ ดังรูป 1.1.18



รูป 1.1.18

ดังนั้นจุด $P(2\sqrt{3},-2)$ มีพิกัดเชิงขั้วที่มี $r>0$ และ $-360^\circ\le\theta\le 0$ คือ $(4,-30^\circ)$ ■

ค. ต้องการพิกัดเชิงขั้วที่มี $r<0$ จากรูป 1.1.18 ต้องวัดมุมจากแกนเชิงขั้วไปยังด้านที่ต่อออกไปในทิศตรงกันข้ามกับด้าน OP ให้เป็นด้าน OA จะได้มุมเชิงขั้ว θ ถึงด้าน OA มีค่าเท่ากับ $180^\circ-30^\circ=150^\circ$ จะได้ $\theta=150^\circ$ ดังนั้นได้จุด $A(4,150^\circ)$ ดังรูป1.1.19



รูป1.1.19

ดังนั้นจุด $P(2\sqrt{3},-2)$ มีพิกัดเชิงขั้วที่มี $r<0$ และ $0\le\theta\le360^\circ$ คือ $(-4,150^\circ)$ ■

เราสามารถแปลงสมการในพิกัดเชิงขั้วให้เป็นสมการในพิกัดฉาก หรือแปลงจากสมการในพิกัดฉากให้เป็นสมการในพิกัดเชิงขั้ว โดยใช้ความสัมพันธ์จากสมการ (1.1.1) และ (1.1.2)

$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta \tag{1.1.1}$$

$$r^2=x^2+y^2 \quad , \quad \tan\theta=\frac{y}{x} \tag{1.1.2}$$

ตัวอย่าง 1.1.8 จงหาสมการพิกัดฉากพร้อมบอกลักษณะกราฟของเส้นโค้งพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้

ก. $r=3$

ข. $r=2\cos ec\theta$

ค. $r=4\sin\theta$

ง. $r=\dfrac{4}{2-3\cos\theta}$

วิธีทำ ก. กำหนด $r=3$

ยกกำลังทั้งสองข้างได้ $r^2=3^2=9$

จาก $r^2=x^2+y^2$ ได้ $x^2+y^2=9$ เป็นสมการพิกัดฉากของ $r=3$

ซึ่ง $x^2+y^2=9$ มีลักษณะเป็นกราฟรูปวงกลม

ดังนั้น $r=3$ มีกราฟเป็นรูปวงกลม ■

ข. กำหนด $r = 2\cos ec\theta$

ปรับได้เป็น $r = \dfrac{2}{\sin\theta}$

$r\sin\theta = 2$

จาก $y = r\sin\theta$ จะได้ $y = 2$ เป็นสมการพิกัดฉากของ $r = 2\cos ec\theta$

ซึ่ง $y = 2$ มีลักษณะเป็นกราฟเส้นตรง

ดังนั้น $r = 2\cos ec\theta$ มีกราฟเป็นเส้นตรง ■

ค. กำหนด $r = 4\sin\theta$

นำ r คูณทั้งสองข้าง $r^2 = 4r\sin\theta$

จาก $r^2 = x^2 + y^2$ และ $y = r\sin\theta$ ได้

$x^2 + y^2 = 4y$

$x^2 + y^2 - 4y = 0$ เป็นสมการพิกัดฉากของ $r = 4\sin\theta$

ซึ่ง $x^2 + y^2 - 4y = 0$ มีลักษณะเป็นกราฟรูปวงกลม

ดังนั้น $r = 4\sin\theta$ มีกราฟเป็นรูปวงกลม ■

ง. กำหนด $r = \dfrac{4}{2 - 3\cos\theta}$

นำ $2 - 3\cos\theta$ คูณทั้งสองข้างได้ $r(2 - 3\cos\theta) = 4$

$2r - 3r\cos\theta = 4$

$2r = 4 + 3r\cos\theta$

จาก $r^2 = x^2 + y^2$ และ $x = r\cos\theta$ ได้

$2\sqrt{x^2 + y^2} = 4 + 3x$

ยกกำลังทั้งสองข้างได้ $\left(2\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = (4 + 3x)^2$

$4(x^2 + y^2) = 16 + 24x + 9x^2$

$4x^2 + 4y^2 = 16 + 24x + 9x^2$

$4y^2 - 5x^2 - 24x - 16 = 0$

เป็นสมการพิกัดฉากของ $r = \dfrac{4}{2 - 3\cos\theta}$

ซึ่ง $4y^2 - 5x^2 - 24x - 16 = 0$ มีลักษณะเป็นกราฟรูปไฮเพอร์โบลา

ดังนั้น $r = \dfrac{4}{2 - 3\cos\theta}$ มีกราฟเป็นรูปไฮเพอร์โบลา ■