

SERIES 3

e-book : Series 3

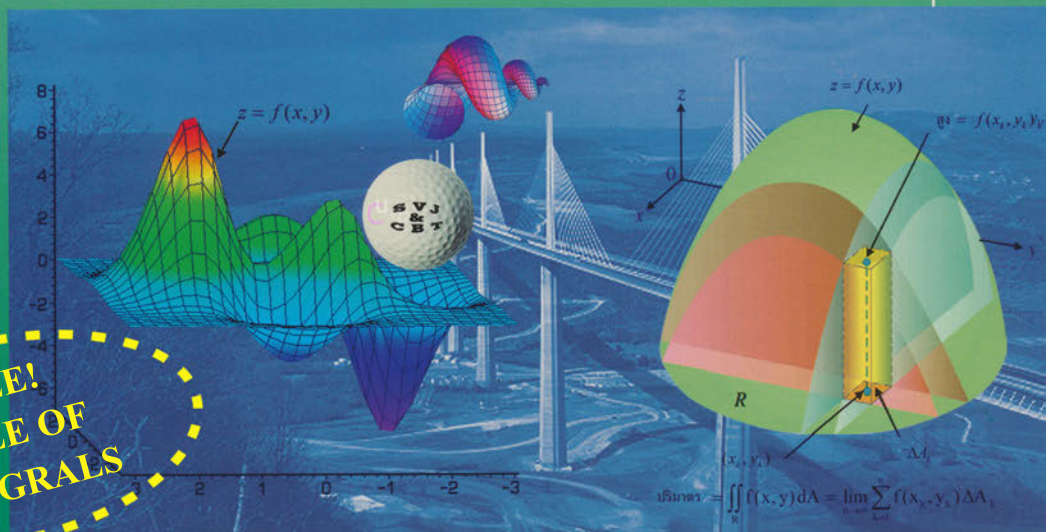
DRIVING RANGE OF CALCULUS 3

ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์

THEORY AND PROBLEMS

คณิตศาสตร์ วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์

MATHEMATICS OF ENGINEERS AND SCIENTISTS



แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ของฟังก์ชันหลายตัวแปร

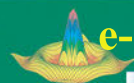
CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY FOR SEVERAL VARIABLES

- ✓ สรุปสูตรนิยาม ทฤษฎี และตัวอย่างประกอบ
- ✓ 394 ตัวอย่างโจทย์พร้อมเฉลยโดยละเอียด
- ✓ 1686 โจทย์ปัญหาพร้อมคำตอบ
- ✓ 468 กราฟโดยโปรแกรม Mathcad & Mathematica & Maple

รองศาสตราจารย์ ศรีบุตร แวเวจริญ

รองศาสตราจารย์ ดร.ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ



ประวัติผู้แต่ง



รองศาสตราจารย์ ศรีบุตร นวนเจริญ



รองศาสตราจารย์ ดร.ชนศักดิ์ ป้ายเที่ยง

การศึกษา

- กศ.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยม มศว.บางเขน
- วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (นักเรียนทุน U.D.C.)

- กศ.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยม มศว.พิษณุโลก
- วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (นักเรียนทุน U.D.C.)
- ค.ด. (อุดมศึกษา), Cognate : สถิติ-วิจัย, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประสบการณ์

- หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
- รองคณบดีฝ่ายวิชาการ

- หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
- รองคณบดีฝ่ายวิชาการ, ฝ่ายพัฒนา, ฝ่ายกิจการนักศึกษา
- รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ

ปัจจุบัน

- ดำรงตำแหน่งรองศาสตราจารย์ ระดับ 9 ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ (มจพ.)

ผลงานตำราวิชาการร่วมกัน

- SERIES 1 อนุพันธ์และการประยุกต์
- SERIES 2 อินทิกรัลและการประยุกต์
- SERIES 3 แคลคูลัสหลายตัวแปร
- SERIES 4 การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์

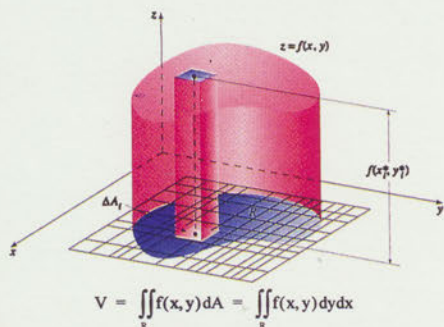
- SERIES 5 สมการเชิงอนุพันธ์ 1
- SERIES 6 สมการเชิงอนุพันธ์ 2 และการแปลงลาปลาซ
- SERIES 7 เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ 2 มิติ, 3 มิติ
- SERIES 8 เมตริกซ์และพีชคณิตเชิงเส้น

ผลงานวิจัย

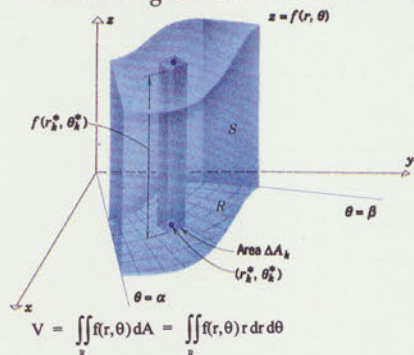
- สื่อการเรียนการสอนสำหรับวิชาแคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ใน 3 มิติ
- Computer-assisted instruction (CAI) in Calculus
- สื่อการเรียนการสอนสำหรับ ปริพันธ์ของฟังก์ชัน 1: ความหมายของ ปริพันธ์จำกัดเขต ปริยานุพันธ์ และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต
- Adomian Decomposition Method for Solving a Non-Linear Shallow Water Tsunami Model of Coupled Partial Differential Equations
- Development of a Mathematical Model of the Inshore Tsunami Wave Equations by Lax-Wendroff Numerical Method

- Elliptic Number และเส้นรอบวงของวงรี
- Elliptic Number and Approximation Function
- การทดสอบการรู้เข้าของอนุกรมโดยใช้คอมพิวเตอร์
- The Development of The Prerequisite Model in Basic Mathematics Course for Science and Technology Undergraduate Curricular by Using Concept Maps
- การใช้คอมพิวเตอร์สร้างฟังก์ชันไมโครสโคป

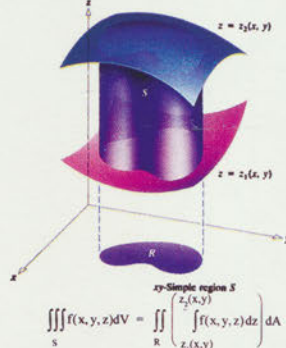
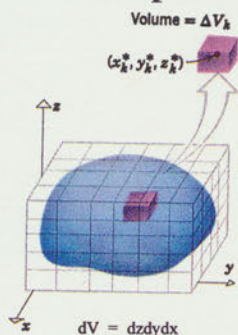
Double Integrals in Rectangular Coordinates



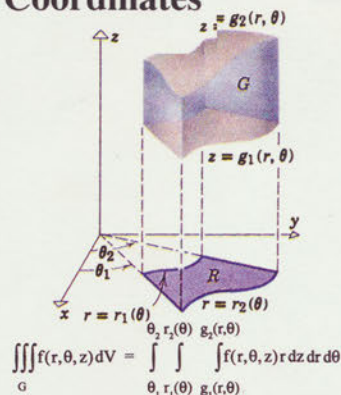
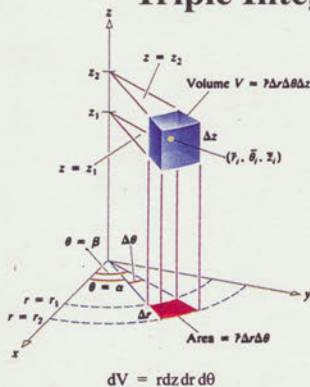
Double Integrals in Polar Coordinates



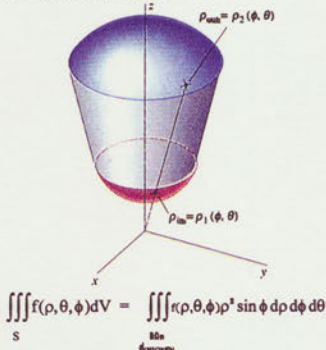
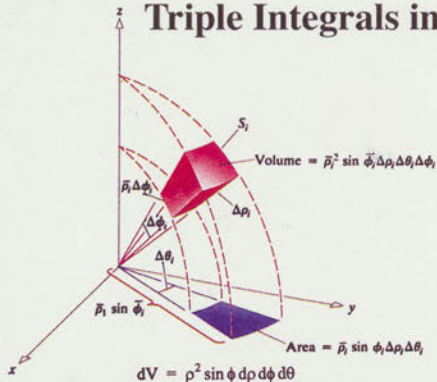
Triple Integrals in Rectangular Coordinates



Triple Integrals in Cylindrical Coordinates



Triple Integrals in Spherical Coordinates



DRIVING RANGE OF CALCULUS
ทฤษฎีและปัญหา
THEORY AND PROBLEMS

**คณิตศาสตร์
วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์**
MATHEMATICS OF ENGINEERING AND SCIENTISTS

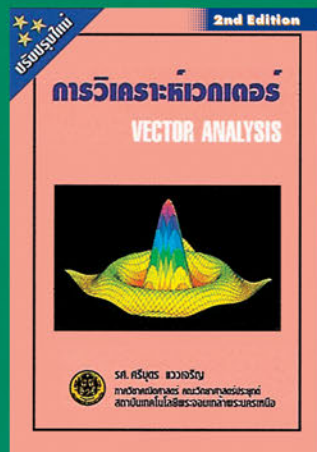
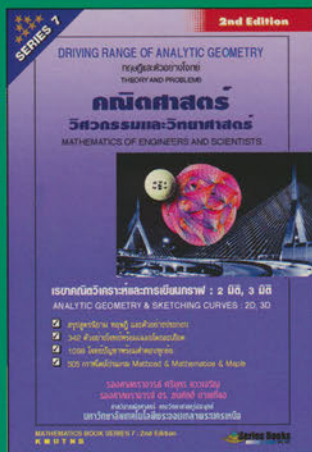
อนุพันธ์และการประยุกต์
THE DERIVATIVE AND ITS APPLICATIONS

- 1. อนุพันธ์, ทฤษฎี และปัญหา
- 2. การประยุกต์ของอนุพันธ์
- 3. การประยุกต์ของอนุพันธ์
- 4. การประยุกต์ของอนุพันธ์

สมการอนุพันธ์ และอนุพันธ์
สมการอนุพันธ์ และอนุพันธ์
สมการอนุพันธ์ และอนุพันธ์

MATHEMATICS BOOK SERIES 11: The Bridge
K S CHAKRABARTI

Sams Books
Sams



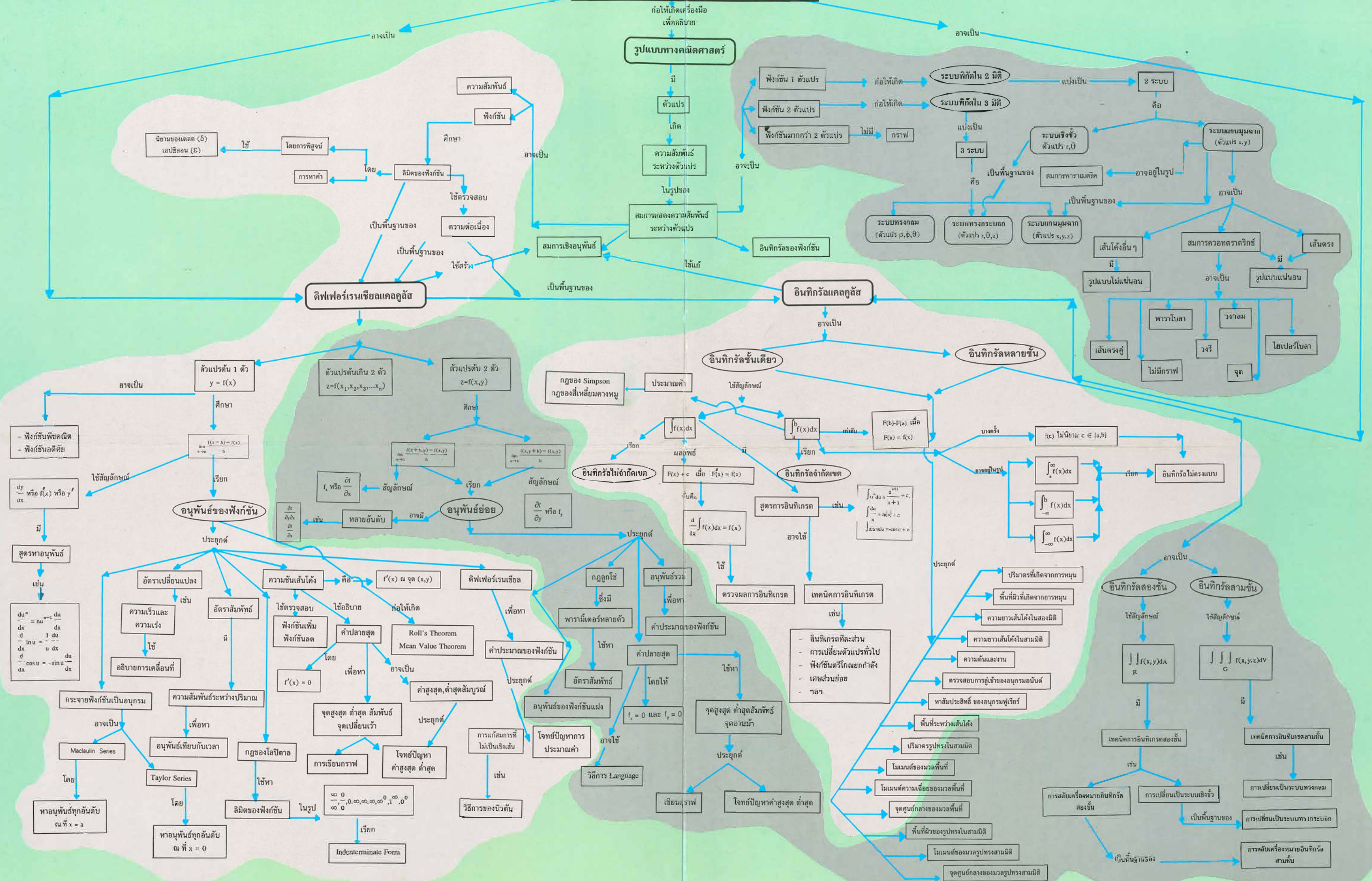
ISBN : 978-616-590-447-6

ห้ามลอกเลียนไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ นอกจากได้รับอนุญาต

ISBN 978-616-7701-02-8



329 .- (8.99 \$)



สูตรอนุพันธ์
(TABLE OF DERIVATIVES)

1. $\frac{d}{dx} c = 0$, c เป็นค่าคงที่
2. $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
3. $\frac{d}{dx} (u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d}{dx} (uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$, $y = f(u)$, $u = g(x)$
7. $\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$
8. $\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$
9. $\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
10. $\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$
11. $\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
12. $\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$
13. $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
14. $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$
15. $\frac{d}{dx} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
16. $\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
17. $\frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
18. $\frac{d}{dx} \cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
19. $\frac{d}{dx} \cot^{-1} u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
20. $\frac{d}{du} \csc^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
21. $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$
22. $\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \log_a e} \frac{du}{dx}$
23. $\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$
24. $\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$
25. $\frac{d}{dx} \tanh u = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$
26. $\frac{d}{dx} \coth u = -\operatorname{csc}^2 u \frac{du}{dx}$
27. $\frac{d}{dx} \operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$
28. $\frac{d}{dx} \operatorname{csc} h u = -\operatorname{csc} h u \coth u \frac{du}{dx}$
29. $\frac{d}{dx} \sinh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}$
30. $\frac{d}{dx} \cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
31. $\frac{d}{dx} \tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}$

สูตรทั่วไป
(GENERAL FORMULAS)

1. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
2. $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$, c เป็นค่าคงที่
3. $\int u dv = uv - \int v du$ (IBP)

สูตรที่จำเป็น
(ESSENTIAL FORMULAS)

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C$
3. $\int e^u du = e^u + C$
4. $\int \sin u du = -\cos u + C$
5. $\int \cos u du = \sin u + C$
6. $\int \tan u du = \ln |\sec u| + C$
7. $\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C$
8. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$
9. $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$
10. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + C$
11. $\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + C$
12. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1} u + C$

สูตรที่มีประโยชน์
(USEFUL FORMULAS)

13. $\int \cot u du = \ln |\sin u| + C$
14. $\int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + C$
15. $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$
16. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$
17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$, $a > 0$
18. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$, $a > 0$
19. $\int \sinh u du = \cosh u + C$
20. $\int \cosh u du = \sinh u + C$
21. $\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$
22. $\int \csc h^2 u du = -\coth u + C$
23. $\int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C$
24. $\int \csc h u \coth u du = -\csc h u + C$

อินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
(FORMS CONTAINING TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

84. $\int \sin^2 u du = \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} + C$
85. $\int \cos^2 u du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} + C$
86. $\int \tan^2 u du = \tan u - u + C$
87. $\int \cot^2 u du = -\cot u - u + C$
88. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$
89. $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$
90. $\int \sin^3 u du = -\frac{1}{3} \cos^3 u + \frac{1}{3} \cos u + C$
91. $\int \cos^3 u du = \frac{1}{3} \sin^3 u + \frac{1}{3} \sin u + C$
92. $\int \tan^3 u du = \frac{1}{2} \tan^2 u + \ln |\cos u| + C$
93. $\int \cot^3 u du = -\frac{1}{2} \cot^2 u - \ln |\sin u| + C$
94. $\int \sec^3 u du = \frac{1}{2} \sec u \tan u + \frac{1}{2} \ln |\sec u + \tan u| + C$
95. $\int \csc^3 u du = -\frac{1}{2} \csc u \cot u + \frac{1}{2} \ln |\csc u - \cot u| + C$
96. $\int \sin mu \cos nu du = \frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} + C$, $m \neq \pm n$
97. $\int \cos mu \cos nu du = \frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C$, $m \neq \pm n$
98. $\int \sin mu \sin nu du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C$, $m \neq \pm n$
99. $\int \sin u du = -\cos u + C$
100. $\int \cos u du = \sin u + C$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{a+bu}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{a+bu}$)

25. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C$, $a > 0$
26. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{1}{a} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$
27. $\int \frac{du}{a+bu} = \frac{1}{b} \ln |a+bu| + C$
28. $\int \frac{u du}{a+bu} = \frac{1}{b} (a+bu - a \ln |a+bu|) + C$
29. $\int \frac{u du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2} \ln |a+bu| + \frac{1}{b} \frac{a+bu}{(a+bu)^2} + C$
30. $\int \frac{u^2 du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2} \left(a+bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a \ln |a+bu| \right) + C$
31. $\int \frac{u du}{(a+bu)^3} = \frac{1}{b^2} \left(\frac{a+bu}{2(a+bu)^2} - \frac{a}{2(a+bu)} \right) + C$
32. $\int \frac{u^2 du}{(a+bu)^3} = \frac{1}{b^2} \left(\frac{a+bu}{2(a+bu)^2} - \frac{a}{2(a+bu)} + \frac{a^2}{(a+bu)^2} \right) + C$
33. $\int (a+bu)^n du = \frac{(a+bu)^{n+1}}{b(n+1)} + C$, $n \neq -1, -2$
34. $\int \frac{u du}{(a+bu)(c+du)} = \frac{1}{b(c-ad)} \left(-\ln |a+bu| + \frac{c}{d} \ln |c+du| \right) + C$, $bc-ad \neq 0$
35. $\int \frac{u du}{(a+bu)^2(c+du)} = \frac{1}{b(c-ad)} \left(\frac{a}{a+bu} + \frac{c}{c+du} \right) + C$, $bc-ad \neq 0$
36. $\int \frac{u du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$
37. $\int \frac{u du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$
38. $\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left(\frac{u}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} \right)$, $n \neq 1$
39. $\int \frac{du}{(u^2-a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left(\frac{u}{(u^2-a^2)^{n-1}} - (2n-3) \int \frac{du}{(u^2-a^2)^{n-1}} \right)$, $n \neq 1$

อินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน
(FORMS CONTAINING INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

106. $\int \sin^{-1} u du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$
107. $\int \cos^{-1} u du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$
108. $\int \tan^{-1} u du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C$
109. $\int \sin^{-1} u du = \frac{2u-1}{4} \sin^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$
110. $\int \cos^{-1} u du = \frac{2u-1}{4} \cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$
111. $\int \tan^{-1} u du = \frac{u^2+1}{2} \tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$
112. $\int u^a \sin^{-1} u du = \frac{1}{n+1} \left(u^{n+1} \sin^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right)$, $n \neq -1$
113. $\int u^a \cos^{-1} u du = \frac{1}{n+1} \left(u^{n+1} \cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right)$, $n \neq -1$
114. $\int u^a \tan^{-1} u du = \frac{1}{n+1} \left(u^{n+1} \tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{1+u^2} \right)$, $n \neq -1$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{a+bu}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{a+bu}$)

40. $\int \sqrt{a+bu} du = \frac{2}{15b^3} (3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + C$
41. $\int u^a \sqrt{a+bu} du = \frac{2}{b(2a+3)} \left[u^a (a+bu)^{3/2} - na \int u^{a-1} \sqrt{a+bu} du \right]$
42. $\int \frac{u du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2} (bu-2a)\sqrt{a+bu} + C$
43. $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3} (6a^2+3b^2u^2-4abu)\sqrt{a+bu} + C$
44. $\int \frac{u^3 du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^4 \sqrt{a+bu}}{b(2a+1)} - \frac{2na}{b(2a+1)} \int \frac{u^2 du}{\sqrt{a+bu}}$
45. $\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bu} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+bu} - \sqrt{a}} \right| + C, a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-a}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, a < 0 \end{cases}$
46. $\int \frac{u du}{u^2 \sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} + \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)} \int \frac{du}{u^{n-1} \sqrt{a+bu}}$
47. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u} du = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$
48. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2} \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{a^2 \pm u^2}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{a^2 \pm u^2}$)

49. $\int \sqrt{a^2 \pm u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 \pm u^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{a^2 \pm u^2}| + C$
50. $\int u \sqrt{a^2 \pm u^2} du = \frac{1}{3} (u^2 \pm a^2)^{3/2} + C$
51. $\int u^2 \sqrt{a^2 \pm u^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 \pm a^2) \sqrt{a^2 \pm u^2} - \frac{a^4}{8} \ln |u + \sqrt{a^2 \pm u^2}| + C$
52. $\int \frac{u du}{\sqrt{a^2 \pm u^2}} = \frac{u}{\sqrt{a^2 \pm u^2}} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{u} \right| + C$
53. $\int \frac{\sqrt{a^2 \pm u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 \pm u^2} - a \sec^{-1} \left| \frac{a}{u} \right| + C$

อินทิกรัลของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม
(EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FORMS)

115. $\int u^a e^u du = \frac{1}{a+1} (u^{a+1} e^u - (a+1) \int u^a e^u du)$
116. $\int u^a e^{au} du = \frac{1}{a} u^a e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{a-1} e^{au} du$
117. $\int \frac{e^u}{u} du = -\frac{e^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^u}{u^{n-1}} du$
118. $\int \ln u du = u \ln u - u + C$
119. $\int (\ln u)^n du = u (\ln u)^n - n \int (\ln u)^{n-1} du$
120. $\int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \left(\ln u - \frac{1}{n+1} \right) + C$
121. $\int \frac{(\ln u)^n}{u} du = \frac{(\ln u)^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
122. $\int \frac{du}{u \ln u} = \ln |\ln u| + C$
123. $\int u^m (\ln u)^n du = \frac{u^{m+1}}{m+1} \left(\ln u \right)^n - \frac{n}{m+1} \int u^m (\ln u)^{n-1} du$
124. $\int \frac{u^m}{(\ln u)^n} du = -\frac{u^{m+1}}{(n-1)(\ln u)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{u^m}{(\ln u)^{n-1}} du$
125. $\int e^{au} \sin bu du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2} (a \sin bu - b \cos bu) + C$
126. $\int e^{au} \cos bu du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2} (a \cos bu + b \sin bu) + C$

อินทิกรัลของไฮเพอร์โบลิกฟังก์ชัน
(FORMS CONTAINING HYPERBOLIC FUNCTIONS)

127. $\int \sinh u du = \cosh u + C$
128. $\int \cosh u du = \sinh u + C$
129. $\int \tanh u du = \ln |\cosh u| + C$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{a^2 - u^2}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{a^2 - u^2}$)

62. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
63. $\int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
64. $\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$
65. $\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
66. $\int \frac{u du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
67. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$
68. $\int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$

130. $\int \coth u du = \ln |\sinh u| + C$
131. $\int \operatorname{sech} u du = \tan^{-1}(\sinh u) + C$
132. $\int \csc h u du = \ln \left| \tanh \frac{u}{2} \right| + C$
133. $\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$
134. $\int \csc h^2 u du = -\coth u + C$
135. $\int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C$
136. $\int \csc h u \coth u du = -\csc h u + C$
137. $\int \sinh^2 u du = \frac{\sinh 2u}{4} - \frac{u}{2} + C$
138. $\int \cosh^2 u du = \frac{\sinh 2u}{4} + \frac{u}{2} + C$
139. $\int \tanh^2 u du = u - \tanh u + C$
140. $\int \coth^2 u du = u - \coth u + C$
141. $\int u \sinh u du = u \cosh u - \sinh u + C$
142. $\int u \cosh u du = u \sinh u - \cosh u + C$
143. $\int u^a \sinh u du = u^a \cosh u - n \int u^{a-1} \cosh u du$
144. $\int u^a \cosh u du = u^a \sinh u - n \int u^{a-1} \sinh u du$

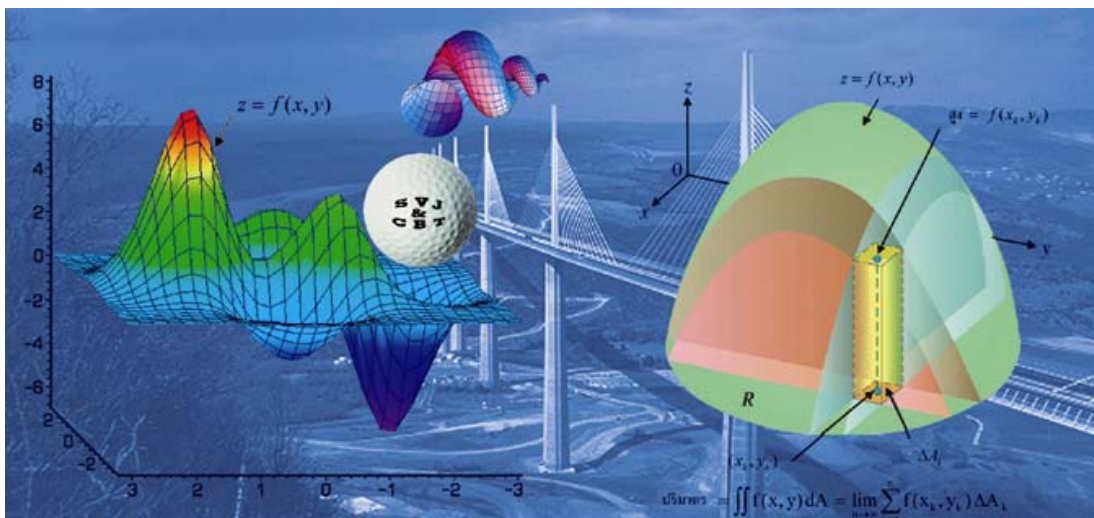
อินทิกรัลที่มีเทอม $(a+be^{mu})^{-1}$
(FORMS CONTAINING $(a+be^{mu})^{-1}$)

145. $\int \frac{dx}{1+e^x} = \ln \left(\frac{e^x}{1+e^x} \right) = x - \ln(1+e^x) + C$
146. $\int \frac{dx}{a+be^{mx}} = \frac{1}{am} \left[m - \ln(a+be^{mx}) \right] + C$
147. $\int \frac{e^{mx}}{a+be^{mx}} dx = \frac{1}{mb} \ln(a+be^{mx}) + C$



คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรและวิทยาศาสตร์ (MATHEMATICS OF ENGINEER AND SCIENTISTS)

แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร (Calculus with Analytic Geometry for several variables)



รวบรวมและเรียบเรียงโดย

รศ. ศรีบุตร แววจริณ

รศ.ดร. ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง

ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ราคา 329 บาท (8.99 USD)

SERIES 3

คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์

(MATHEMATICS OF ENGINEER AND SCIENTISTS)

แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร

(Calculus with Analytic Geometry for Several Variables)

Calculus: e-book:Series 3

ISBN 974-89995-4-8

สำหรับหนังสือ Series 3

ISBN (e-book) 978-616-590-447-6

สำหรับ e-book : Series 3

แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร

สงวนลิขสิทธิ์ในประเทศไทย พ.ร.บ.ลิขสิทธิ์ พศ. 2521

ห้ามลอกเลียนไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้นอกจากได้รับอนุญาต

วันวางจำหน่าย : 30-05-2022

ขนาดไฟล์ : 123 MB

จำนวนหน้า : 686 หน้า

ประเทศ : THAILAND

ประเภทไฟล์ : PDF

ภาษา : Thai

ออกแบบปกและ Artwork ทินพัฒน์ แวเจริญ ภาควิชาสถิติประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

จัดทำโดย

รศ.ศรีบุตร แวเจริญ และ รศ.ดร. ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง

ซื้อหนังสือ e-book:Series 3 เล่มนี้

ราคา 329 บาท (8.99 USD)

การสั่งซื้อ e-book:Series 3 สามารถติดต่อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาฯทุกสาขา

รศ. ศรีบุตร แวเจริญ

Tel. 081-904-1608

ID Line sribudh

E-mail : swr@kmutnb.ac.th

รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง

Tel. 081-908-5090

ID Line mala0928

E-mail : chanasak.b@op.kmutnb.ac.th

คำนิยาม

การเรียนรู้แคลคูลัสกับการเล่นกีฬามีลักษณะคล้ายกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งกีฬากอล์ฟ “ไทเกอร์ วูดส์” นักกอล์ฟสายเลือดลูกครึ่ง ไทย-อเมริกัน ดังระเบิดไปทั่วโลก ด้วยประวัติการเรียนและกีฬากอล์ฟอันเยี่ยมยอด เป็นแชมป์กอล์ฟเยาวชนของสหรัฐหลายสมัย หลังการก้าวเข้าสู่กอล์ฟอาชีพเพียงเวลาไม่กี่เดือน ก็สามารถคว้าแชมป์กอล์ฟรายการใหญ่ได้หลายรายการ ด้วยวัยเพียง 21 ปี ด้านการเรียน มีผลการเรียนดีเยี่ยมสามารถเข้าเรียนในมหาวิทยาลัย ซึ่งเป็นมหาวิทยาลัยท็อปเทนของสหรัฐ ผู้เขียนอยากนำทั้งสองสิ่งมาหล่อหลอมเข้าด้วยกัน เพื่อให้บัณฑิต นักศึกษา และผู้สนใจในวิชาแคลคูลัสได้มองภาพในอนาคตได้เห็นชัดเจนยิ่งขึ้น โดยนำกีฬากอล์ฟมาอธิบายเปรียบเทียบ หนังสือเล่มนี้ได้ตั้งชื่อว่า “ **สนามฝึกซ้อมวิชาแคลคูลัส** ” (Driving Range of Calculus) เช่นเดียวกับกีฬากอล์ฟซึ่งมี **สนามฝึกซ้อมกอล์ฟ** (Driving Range of Golf) ก่อนที่จะเข้าสนามฝึกซ้อมคงต้องศึกษานิยามทฤษฎี และคุณสมบัติต่างๆ จากห้องเรียนจนเข้าใจดีพอ แล้วจึงนำหนังสือเล่มนี้มาฝึกฝนให้เกิดความเข้าใจให้ดียิ่งขึ้น

หนังสือเล่มนี้ได้ใช้เทคโนโลยีสมัยใหม่ มาช่วยทำให้รูปแบบของหนังสือดีมีคุณค่ายิ่งขึ้น โดยใช้โปรแกรม **Mathcad** และ **Maple** ซึ่งทำให้ผู้อ่านหนังสือเล่มนี้ สามารถมองเห็นโจทย์ปัญหานั้นๆ ได้เป็นรูปธรรมมากขึ้น

แคลคูลัสเป็นวิชาที่สำคัญวิชาหนึ่งของสาขาคณิตศาสตร์ และเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพัฒนาไปใช้ประยุกต์ในสาขาวิชาต่างๆ ของนักวิทยาศาสตร์และวิศวกร ก่อนที่จะนำไปประยุกต์ ใช้ได้ดี นิสิตนักศึกษา จำเป็นต้องศึกษาวิชาพื้นฐานให้เข้าใจถ่องแท้ก่อน จากประสบการณ์ด้านการสอนมากกว่า 40 ปี ในสถาบันแห่งนี้ และเป็นอาจารย์พิเศษมหาวิทยาลัยอีกหลายแห่ง จึงได้รวบรวมเขียนออกมาเป็น**แผนที่วิชาแคลคูลัสพื้นฐาน** (Calculus Concept Maps) ตามที่นำเสนอในปกหลังด้านในของหนังสือเล่มนี้นั้น ผู้เขียนได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น **e-Book:Series 1-8** โดยแต่ละ **Series** จะมีเนื้อหาความสัมพันธ์กันเกี่ยวข้องกันอยู่ตลอดเวลา ดังนั้น การศึกษาวิชาแคลคูลัสจำเป็นต้องมีพื้นฐานของคณิตศาสตร์ **e-Book:Series** ต้นๆ อยู่ตลอดเวลา

ทางด้านกีฬากอล์ฟนั้นผู้เขียนได้มีโอกาสรับการฝึกอบรมจากคุณครูกอล์ฟ **Bell Penny** (Head Professional-Class A C.P.G.A.) จากโรงเรียนการศึกษากอล์ฟไทย ซึ่งเป็นโรงเรียนกอล์ฟแห่งแรกของประเทศไทย เมื่อปี 1994 ทำให้ผู้เขียนได้เกิดแนวคิดที่จะนำทั้งสองเรื่องนี้ คือ แคลคูลัสและกอล์ฟมา

ผนวกเข้าด้วยกัน ซึ่งมีหลายๆ สิ่งสามารถนำมาเปรียบเทียบให้นิสิต นักศึกษา ได้มองเห็นภาพการศึกษา แคลคูลัสได้ดียิ่งขึ้นในกีฬากอล์ฟนั้นเราแบ่งฟิท์ออกเป็น 3 ฟิท์ เรียงลำดับตามความสามารถได้ดังนี้ คือ ฟิท์ C มือใหม่ (Beginner) , ฟิท์ B มือสมัครเล่น (Amateur) , ฟิท์ A มืออาชีพ (Professional) การเล่นกอล์ฟนั้น ในการออกรอบ 1 รอบ หรือตีจนครบ 18 หลุมนั้น ต้องใช้ความอดทน ความพยายาม มีจิตใจที่มุ่งมั่น การเล่นกอล์ฟจะต้องแก้ปัญหาเฉพาะหน้าตลอดเวลาและรูปแบบของปัญหานั้นเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอผู้เล่นต้องคิดแก้ปัญหาด้วยตัวเองบนพื้นฐานของประสบการณ์ที่มีอยู่ เมื่อถึงจุดหนึ่งผู้เล่นที่มีพื้นฐานและการฝึกซ้อมดีพอ ผู้เล่นจะสามารถแก้ปัญหาเฉพาะหน้าได้เสมอ โดยที่ผู้เล่นจะต้องนำปัจจัยหลายๆ อย่างมาช่วยในการคิดแก้ปัญหา

ในวิชาแคลคูลัสก็เช่นเดียวกัน เป็นวิชาที่ต้องใช้คณิตศาสตร์หลายๆ ด้านมาประกอบกัน เพื่อช่วยในการคิดแก้ปัญหา ผู้เขียนจึงได้เขียนปูพื้นตั้งแต่เริ่มต้น ตั้งแต่ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแต่เจาะลึกลงไปในแต่ละเรื่องมากกว่าเดิม นักศึกษาที่พื้นฐานยังไม่ดีพอจึงเปรียบเสมือนนักกอล์ฟมือใหม่ ต้องฝึกทำโจทย์ตั้งแต่ต้นในเรื่องพื้นฐานจนเกิดความเข้าใจก่อน จึงจะเริ่มศึกษาในเนื้อหาของวิชาแคลคูลัสได้ เมื่อผู้เรียนฝึกซ้อมจนเข้าใจแล้วก็จะถือว่าอยู่ในระดับมือสมัครเล่น และนักศึกษาจะต้องทำการฝึกฝนต่อไปอีกจนเกิดความเข้าใจ จึงจะถือว่านักศึกษาจัดอยู่ในขั้นระดับมืออาชีพ จึงจะสามารถศึกษาในขั้นประยุกต์ได้ ในตำราชุดนี้เปรียบเสมือนสนามฝึกซ้อม มีโจทย์ตัวอย่างมากมายเพียงพอที่จะทำให้นักศึกษาพัฒนาตนเองอยู่ในขั้นมืออาชีพได้อย่างสบาย

หนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรม Series 3 ก่อนที่จัดทำเป็น e-book:Series 3 ได้ปรับปรุงมาแล้ว 3 ครั้ง โดยทำการปรับปรุงจากหนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรม Series 3 จะเน้นในเรื่อง แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร โดยปรับปรุง จากการจัดพิมพ์ครั้งแรกในปี 2541 มีการเพิ่มเนื้อหาและรูปภาพของฟังก์ชันอีกมากมายรวมทั้งรูปเล่ม ตัวหนังสือเป็นสีน้ำเงิน และกราฟของฟังก์ชันสองตัวแปรเป็นรูปพื้นผิวใน 3 มิติ 4 สี เพื่อให้ผู้อ่านดูชัดเจน และสวยงาม นอกจากนี้ผู้เขียนได้เพิ่มตัวอย่างพร้อมแสดงวิธีทำโดยละเอียดที่น่าสนใจจากเดิม รวมตัวอย่างโจทย์เป็น 394 ตัวอย่าง และเพิ่มโจทย์ปัญหาพร้อมคำเฉลย เป็น 1,686 ข้อ และใช้โปรแกรม Maple และ Mathcad วาดกราฟ ทั้งหมดเป็น 468 รูป เพื่อให้นักศึกษาได้เห็นเป็นรูปธรรมนามธรรมยิ่งขึ้น และเกิดความเข้าใจลึกซึ้ง โดยดูจากกราฟของฟังก์ชันจริง โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในส่วนเฉลยคำตอบเดิมได้ย่อหน้าให้เหลือ 50% ทำให้คำเฉลยดูไม่ชัดเจน ผู้เขียนได้ขยายเป็น 100% เพื่อให้ผู้อ่านได้ตรวจคำตอบได้สะดวกขึ้น จากการเพิ่มข้อมูลต่างๆ ทำให้จำนวนหน้าเพิ่มขึ้นอีกมากกว่าเดิม 576 หน้า เป็น 686 หน้า นักศึกษาได้ฝึกทบทวนเนื้อหาและทดลองทำแบบฝึกหัดในลักษณะต่างๆ ทำให้เกิดความรู้ความเข้าใจในทฤษฎีให้ถ่องแท้ อันจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญต่อการเรียนการ

สอน และการทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพในอนาคตถ้าจะให้หนังสือเล่มนี้เปรียบเทียบกับกีฬากอล์ฟผู้เขียนตั้งใจจะให้มันเป็นเช่นเดียวกับ **สนามฝึกซ้อมกอล์ฟ (Driving Range)** ถ้าใครเข้าสนามฝึกซ้อมมากก็จะทำให้พัฒนาดียิ่งขึ้น แล้วจะส่งผลให้นิสิต-นักศึกษา **ข้อสอบกลางภาค (Midterm)** และ**สอบปลายภาค (Final)** ด้วยความมั่นใจ เช่นเดียวกับนักกอล์ฟที่มีความพร้อม และมีความเชื่อมั่นที่ลงสนามแข่งขัน และได้รับรางวัลให้กับตนเองในที่สุด

ผู้เขียนขอกราบขอบคุณ คุณครู-อาจารย์ทุกท่าน ตั้งแต่ประณจนถึงมหาวิทยาลัยที่ได้ประสิทธิประสาทวิชาให้ ขอกราบขอบคุณทุกท่านที่ได้ให้การสนับสนุนหนังสือตั้งแต่ **e-book:Series 1** ถึง **e-book :Series 8** ขอขอบคุณเพื่อนร่วมงานทุกคนที่ได้คอยให้กำลังใจและให้คำแนะนำด้วยดีมาตลอด ขอขอบคุณ คุณ วรณนิภา ขาวผ่อง ที่ทุ่มเทช่วยพิมพ์ต้นฉบับให้เป็นอย่างดีและขอบคุณนักศึกษาของภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ได้ช่วยตรวจต้นฉบับให้เป็น น้อย่างดี และที่สำคัญที่สุดขอขอบคุณและขอใจ ภรรยา และลูกๆ ของผู้เขียนทั้งสอง : คุณยุพิน แวเวจริญ ลูกแพรวและลูกเพชร คุณวงษ์เดือน บ่ายเที่ยง ลูกคัมและลูกดี ที่ได้ให้กำลังใจในการเขียนมาตลอดและเป็นผู้อยู่เบื้องหลังของความสำเร็จในการจัดทำนี้

หนังสือ **e-book:Series 3 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร** ปรับปรุงใหม่เล่มนี้จะไม่สามารถเกิดขึ้นได้ ถ้าไม่มีทีมงานของคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ ในภาควิชาคณิตศาสตร์และนักศึกษาของภาควิชาคณิตศาสตร์ทั้งในอดีตและปัจจุบัน ดังเช่น **คุณ อูมา รัตนเทพี (MA12)** ที่ช่วยพิมพ์ต้นฉบับและช่วยคำนวณคำตอบและวาดกราฟของคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยโปรแกรม Maple **คุณ เวลิน พุทธิธิระโชติ (MA14)** ที่ช่วยตรวจต้นฉบับอย่างละเอียดทุกบท **คุณ นพดล สวนควน (MA16)** และ **คุณ บุญผา จิตรโสม (MA20)** ที่ทุ่มเทเวลาช่วยพิมพ์ต้นฉบับให้เป็นอย่างดียิ่ง ท้ายสุดนี้ขอขอบคุณ **คุณ ทินพัฒน์ แวเวจริญ (AS 23)** ของ **มจพ. (KMUTNB)** ที่ช่วยออกแบบปก และ Artwork ของ **e-book:Series 3** เล่มนี้ทั้งหมด

ผู้เขียนหวังว่าหนังสือประกอบการเรียนเล่มนี้คงจะเป็นประโยชน์ต่อนิสิตนักศึกษาใน สถาบันอุดมศึกษาต่างๆบ้างตามสมควรหากพบข้อบกพร่องที่ควรแก้ไขในหนังสือเล่มนี้กรุณาเสนอแนะให้ ผู้เขียนทราบด้วย จักเป็นพระคุณยิ่ง ขอให้แฟนพันธ์แท้และผู้สนใจคอยติดตาม **e-book:Series 5** ต่อไป

คุณความดีและคุณประโยชน์ทั้งหลายทั้งปวง ขอมอบให้บิดา – มารดา ครู-อาจารย์ ของผู้เขียนทั้งสอง

รศ. ศรีบุตสร แวเวจริญ

รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง

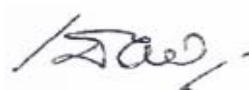
คำนิยม

ท่านผู้คั่นหนังสือ e-book:Series 3 เล่มนี้ทุกท่าน ผมเป็นคนหนึ่งที่ใกล้ชิดและเห็นการทำงาน แนวความคิดและการทำหนังสือของรองศาสตราจารย์ศรีบุตร แวเวเจริญ และ รองศาสตราจารย์ ดร.ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง มาโดยตลอด ท่านทั้งสองได้เขียนหนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ e-book:Series ออกมา 8 เล่ม อย่างต่อเนื่องและมีการปรับปรุงเนื้อหาใหม่ในหนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ทั้ง 8 เล่ม โดยมีการเพิ่มเติมรูปภาพประกอบโจทย์ปัญหาให้เห็นเป็นรูปธรรมและนำเอาโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ Maple , Mathcad มาช่วยในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์

ผมเห็นความมุ่งมั่น ตั้งใจของท่านอาจารย์ทั้งสองท่าน คือความสำเร็จที่ยิ่งใหญ่ ที่จะช่วยประเทศไทย แก้ปัญหาการขาดแคลนหนังสือ จากจุดเริ่มต้นดังกล่าว ท่านตั้งใจจะทำหนังสือ e-book:Series 3 เพื่อ ศิษย์ ทำให้หนังสือไม่เพียงใช้เรียนในชั้นเรียนแต่กลับใช้เรียนเสมือนบนเว็บไซต์ที่มีรูปภาพ 4 สี คำอธิบายและ โปรแกรมครบทุกส่วน ทำให้ผู้เรียนขยายวงกว้างจากนักเรียนในชั้นเรียน สู่ นักเรียนนอกชั้นเรียนหลายสาขา อาชีพ ตอบสนองต่อยุคศาสตร์ การพัฒนาประเทศด้านการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ เกิดการเรียนรู้ที่ สนับสนุนต่อสังคม การมีการเรียนรู้อย่างต่อเนื่องตลอดชีวิต

นับเป็นภารกิจของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มจพ.ที่ต้องผลิตหนังสือและ ตำราวิชาการเป็นบริการความรู้แก่สังคม ตามปรัชญาของมหาวิทยาลัยที่ว่า “พัฒนาคณ พัฒนาวิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี” และในฐานะของผู้บริหารภาควิชาคณิตศาสตร์ ต้องขอขอบคุณอาจารย์ทั้งสองท่านที่ ปรับปรุงหนังสือ Series 3 เป็น e-book:Series 3 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ของฟังก์ชันหลาย ตัวแปร (คณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์) ซึ่งนับเป็นบริการด้านสติปัญญาอีกเล่มหนึ่งที่ภาควิชา คณิตศาสตร์ภูมิใจมอบให้แก่สังคม

ขอบคุณครับ



รองศาสตราจารย์ ดร.เสนอ คุณประเสริฐ

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

แถมฟรี

e-book:Series 3 เล่มนี้ ผู้เขียนได้มอบแผ่นพับขนาด A3 รูป 4 สีสวยงามจำนวน

2 แผ่นที่จะเป็นประโยชน์กับนักศึกษาและผู้สนใจวิชา CALCULAS เป็นอย่างดี

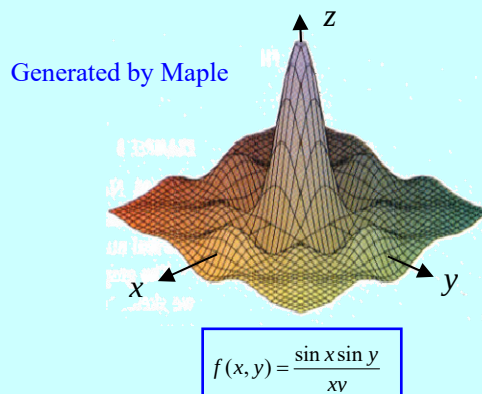
1. CALCULUS CONCEPT MAPS

2. FORMULA TABLES OF DERIVATIVES AND INTEGRALS

สารบัญ

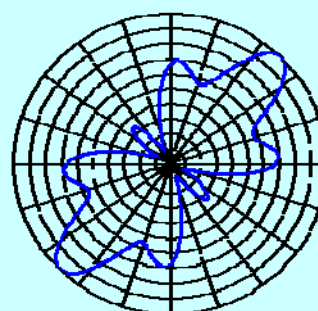
เกี่ยวกับผู้แต่ง คำนำ คำนิยม

บทที่ 1 ผิวโค้งในปริภูมิ 3 มิติ (Surface in Space)



1.1	ระบบพิกัดฉากในปริภูมิ 3 มิติ	1
1.2	กราฟของฟังก์ชันสองตัวแปรในปริภูมิ 3 มิติ	4
1.3	ระนาบ ทรงกลม ทรงกระบอก กรวย	6
1.4	กรวย ผิวโค้งกำลังสอง	9
1.5	การสมมาตรเทียบกับจุด เส้นตรง และ ระนาบ	13
	แบบฝึกหัด	19

บทที่ 2 พิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinates)



$$r = 1 + \sin(2\theta) + \cos^2(4\theta)$$

2.1	ระบบพิกัดเชิงขั้ว	23
2.2	ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้ว	29
2.3	กราฟของสมการเชิงขั้ว	40
2.4	จุดตัดของกราฟในพิกัดเชิงขั้ว	64

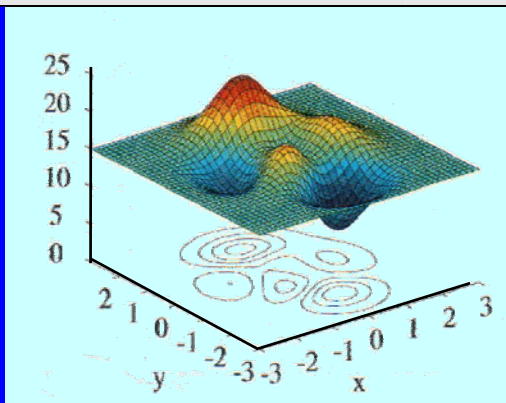
2.5 พื้นที่ในพิกัดเชิงขั้ว
แบบฝึกหัด

74

92

บทที่ 3

แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ของหลายตัวแปร
(Multivariable Differential Calculus)



3.1 ฟังก์ชันค่าจริงของหลายตัวแปร

93

3.2 ลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปร

118

3.3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชันสองตัวแปร

134

3.4 อนุพันธ์ย่อย

145

3.5 กฎลูกโซ่ของอนุพันธ์ย่อย

181

3.6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย

214

3.7 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ และการประยุกต์

239

3.8 การหาจุดวิกฤตโดยตัวคูณลากรางจ์

293

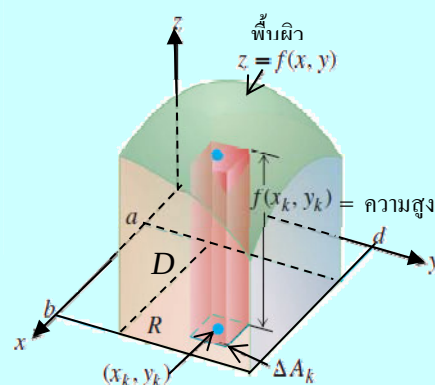
3.9 ระบายสัมผัส ค่าเชิงอนุพันธ์รวมและการประมาณค่า
แบบฝึกหัด

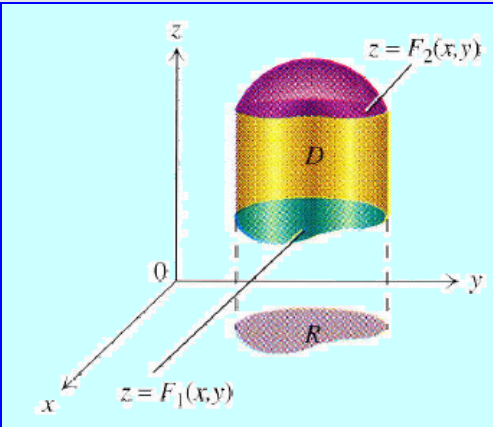
321

341

บทที่ 4

อินทิกรัลสองชั้นและประยุกต์
(Double Integral and It's Application)



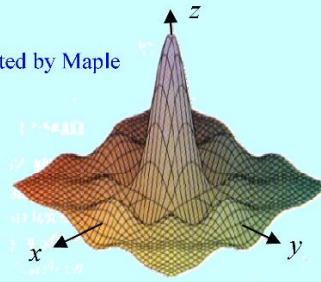
4.1	อินทิกรัลสองชั้นบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก	345
4.2	อินทิกรัลสองชั้นบนบริเวณทั่วไป	366
4.3	การหาพื้นที่และปริมาตร	396
4.4	การเปลี่ยนตัวแปรสำหรับอินทิกรัลสองชั้น	417
4.5	อินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว	426
4.6	การประยุกต์ของอินทิกรัลสองชั้น	442
	แบบฝึกหัด	448
บทที่ 5 อินทิกรัลสามชั้นและการประยุกต์ (Triple Integrals and its Applications) 		
5.1	อินทิกรัลสามชั้นบนทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก	469
5.2	อินทิกรัลสามชั้นบนทรงตันทั่วไป	483
5.3	การเปลี่ยนตัวแปรสำหรับอินทิกรัลสามชั้น	530
	5.3.1 การเปลี่ยนตัวแปรระหว่างระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดทรงกระบอก	531
	5.3.2 การเปลี่ยนตัวแปรระหว่างระบบพิกัดฉากกับระบบพิกัดทรงกลม	555
5.4	ประโยชน์ของอินทิกรัลสามชั้น	588
	แบบฝึกหัด	591
	เฉลยแบบฝึกหัดบทที่1-บทที่ 5 ข้อ จำนวน 1868 ข้อ	616
	บรรณานุกรม	686

บทที่ 1

ผิวโค้งในปริภูมิ 3 มิติ

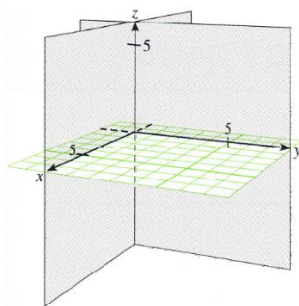
(Surface in Space)

Generated by Maple

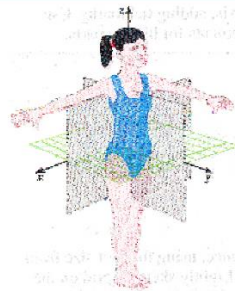


$$f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{xy}$$

เนื่องจากในชีวิตประจำวันเราโดยทั่วไปจะเกี่ยวข้องกับปริภูมิ 3 มิติ (R^3) การพัฒนาในระบบ 3 มิติ จะพัฒนาจากระบบพิกัดในระนาบ 2 มิติ (R^2) โดยการตั้งแกนซึ่งตั้งฉากกันทั้งหมด 3 แกน ในมิติที่ต้องการอ้างอิงถึง ด้วยรูป 1.1 ถ้าเรายืนอยู่ที่จุดกำหนดและการแขนออกในทิศทางบวกตามแนวแกน x และตามแนวแกน y (มือขวาและมือซ้ายตั้งฉากกัน) ดังรูป 1.2 ศีรษะของเราจะชี้ไปในทิศทางบวกตามแนวแกน z

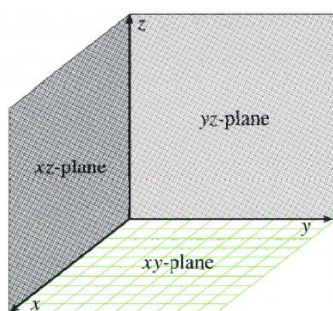


รูป 1.1

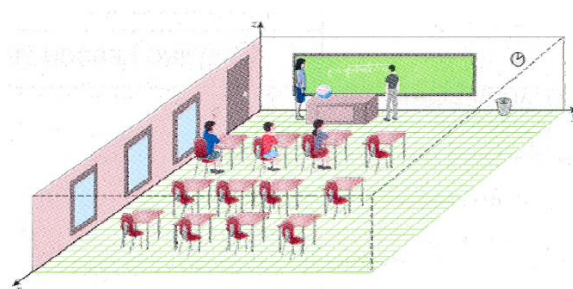


รูป 1.2

เพื่อให้ใกล้ตัวผู้เรียนเข้าไปอีก ขอให้ผู้เรียนลองนึกถึงแกน x และ y ไปตามแนวที่อยู่บนพื้น และแกน z เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับพื้น สมมติว่าห้องเรียนมีขนาด 10 เมตร x 12 เมตร x 5 เมตร และกำหนดจุดกำหนดไว้ที่มุมซ้ายบนพื้นหน้าห้องดังรูป 1.3



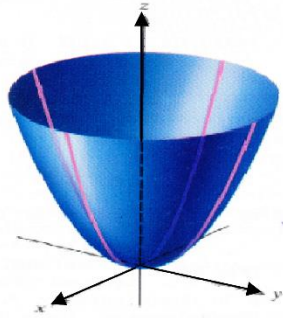
ก.



รูป 1.3

ข.

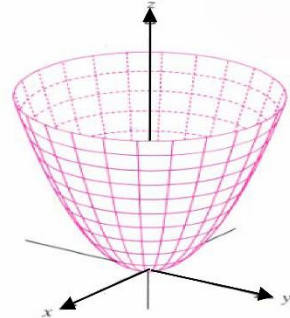
4. พื้นผิวอีลิปติคพาราโบลอยด์ (Ellipsoid Paraboloid)



ก. Ellipsoid Paraboloid :

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

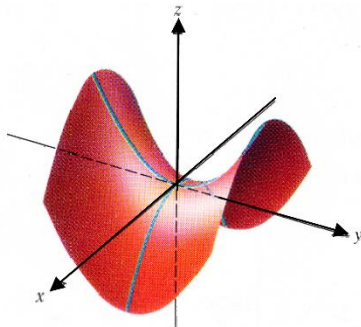
รูป 1.31



ข. Ellipsoid Paraboloid :

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

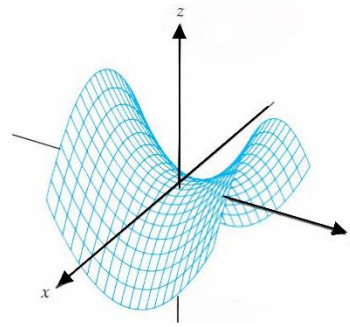
5. พื้นผิวไฮเพอร์โบลิกพาราโบลอยด์ (Hyperbolic Paraboloid)



ก. Hyperbolic Paraboloid :

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

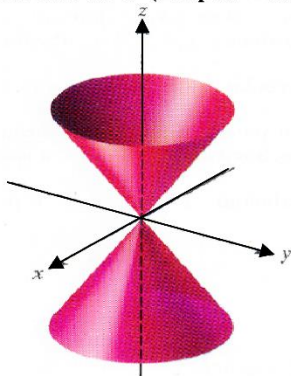
รูป 1.32



ข. Hyperbolic Paraboloid :

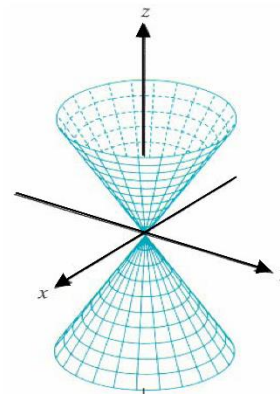
$$z = y^2 - x^2$$

6. พื้นผิวกรวยอีลิปติก (Elliptic Cone)



ก. Elliptic Cone : $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

รูป 1.33



ข. Elliptic Cone : $z^2 = 3x^2 + 3y^2$

บทที่ 1 ผิวโค้งในปริภูมิ 3 มิติ

1.91 $x = \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16}$

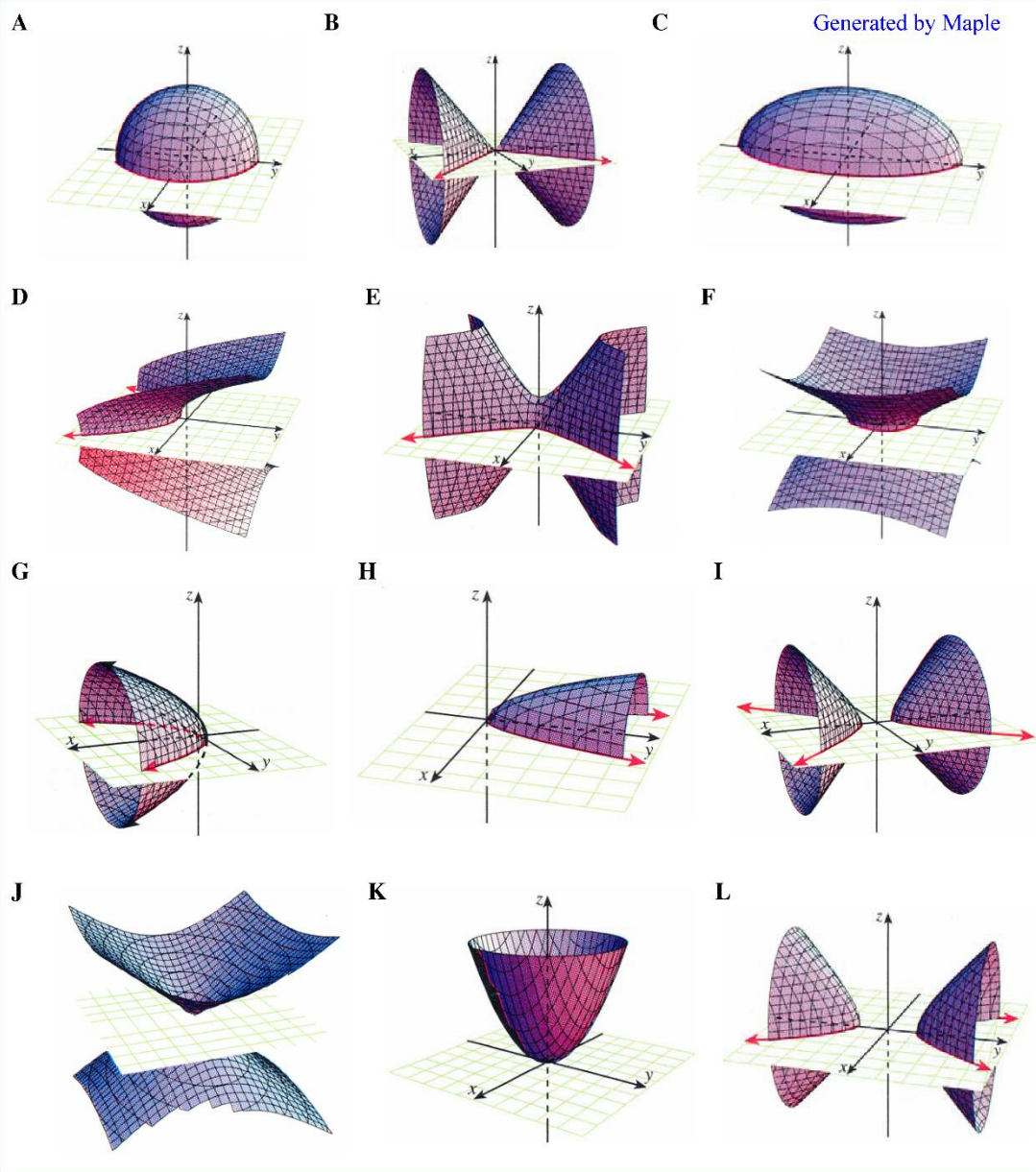
1.92 $y = \frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{9}$

1.93 $y^2 + z^2 - x^2 = 1$

1.94 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = -1$

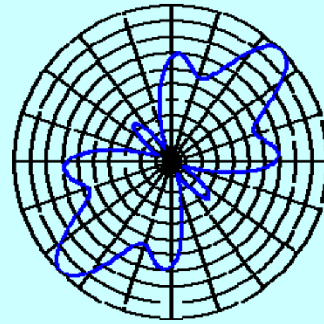
1.95 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$

1.96 $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$



บทที่ 2 พิกัดเชิงขั้ว

(Polar Coordinates)

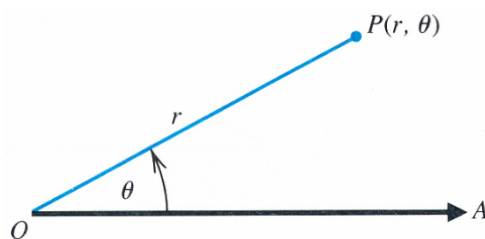


$$r = 1 + \sin(2\theta) + \cos^2(4\theta)$$

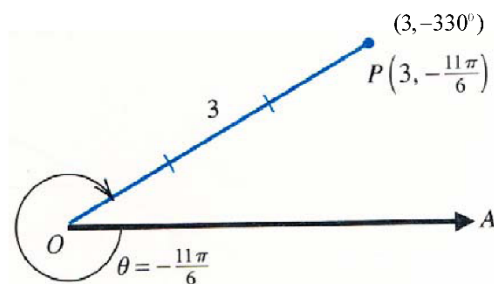
ในการศึกษาแคลคูลัสก่อนหน้านี้ เราทราบมาแล้วว่า เราสามารถบอกตำแหน่งของจุดในระนาบได้โดยบอกเป็นพิกัด (x,y) ในระนาบพิกัดฉาก (Rectangular Coordinates System) อย่างไรก็ตามยังมีระบบอื่นๆ อีก และที่นิยมใช้และสำคัญที่สุดระบบหนึ่งคือระบบพิกัดเชิงขั้ว

2.1 ระบบพิกัดเชิงขั้ว (The Polar Coordinate System)

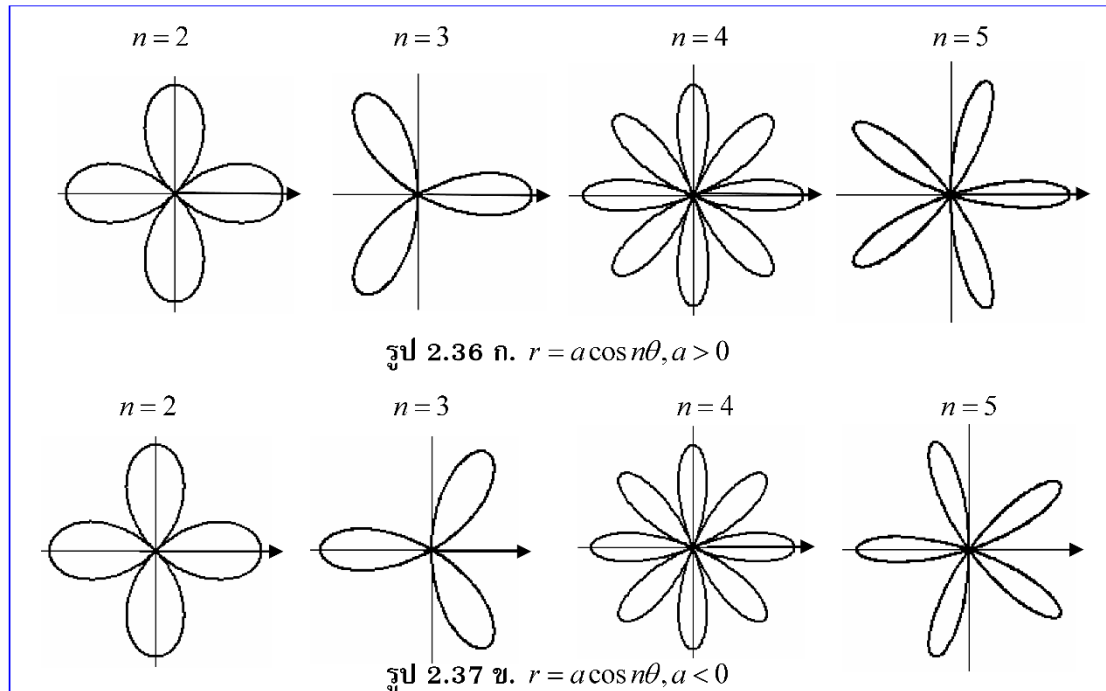
ระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinate System) ในระนาบประกอบด้วยจุดที่ถูกตรึง O ที่เรียกว่า ขั้ว (Bolt) หรือ จุดกำเนิด (Origin) และรังสีที่พุ่งออกจากจุด O ซึ่งจะเรียกว่า แกนเชิงขั้ว (Polar Axis) หรือ รังสีเริ่มต้น (Initial Ray) (รังสีหมายถึงครึ่งเส้นตรงซึ่งประกอบด้วยจุดยอด (Vertex) และจุดของเส้นตรงบนด้านหนึ่งของจุดยอด ตัวอย่างเช่น จุดกำเนิดและแกน x บวกเป็นรังสี หรือจุดบนเส้นตรง $y = 2x - 1$ เมื่อ $x \geq 3$ ก็เป็นรังสีโดยมีจุด $(3,5)$ เป็นจุดยอด) สำหรับจุด P ใดๆ ในระนาบ เราจะให้จุด P มีพิกัดเชิงขั้วเป็น (r, θ) โดยที่ r เป็นระยะจากจุด O ถึงจุด P และ θ เป็นมุมที่วัดจากแกนเชิงขั้วถึงเส้นตรงที่เชื่อมจุด O และจุด P (รูป 2.1) เราจะเรียก r ว่า พิกัดเชิงรัศมี (Polar Coordinate) ของจุด P และ เรียก θ ว่า พิกัดเชิงมุม (Angular Coordinate) หรือ มุมเชิงขั้ว (Polar Angle) ของจุด P



รูป 2.1

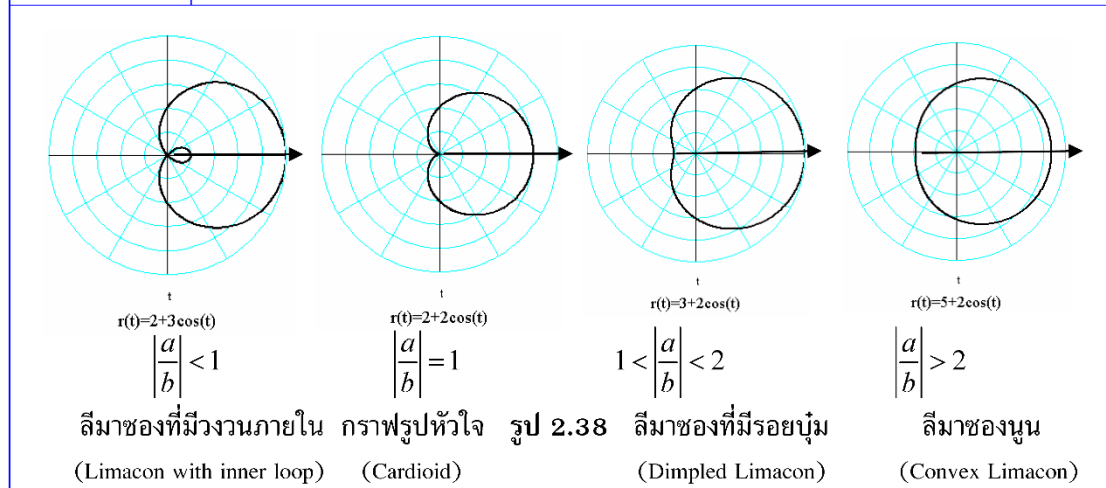


รูป 2.2



3. วงศ์ของกราฟรูปหัวใจและลีมะซอง (Family of Limacons)

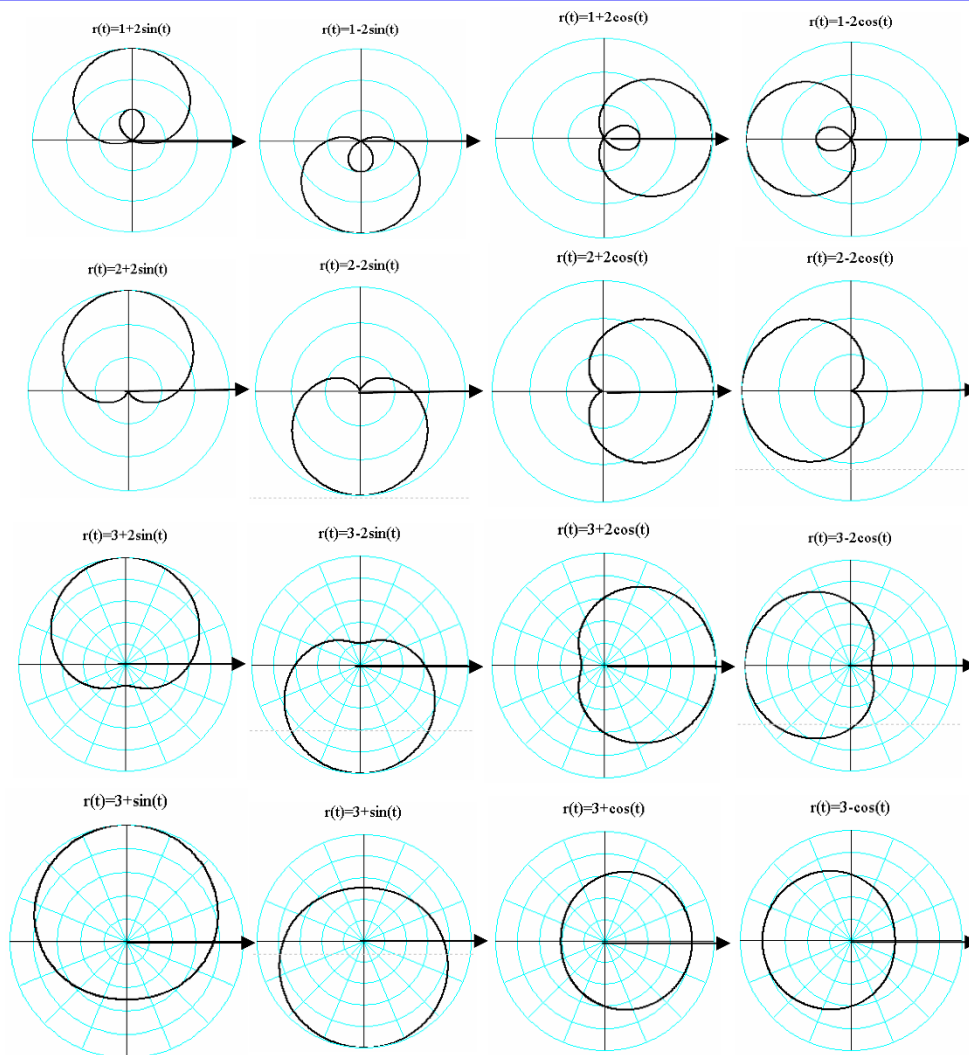
สมการในรูปแบบต่อไปนี้คือ $r = a + b \sin \theta$, $r = a + b \cos \theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ มีกราฟเป็นเส้นโค้งเรียกว่า ลีมะซอง (Limacon) และรูปร่างแตกต่างกันไปได้ 4 แบบ ขึ้นอยู่กับอัตราส่วน a/b จากรูป 2.38 ในกรณี $|a| = |b|$ หรือ $|a/b| = 1$ เราจะเรียกกราฟลีมะซองว่า กราฟรูปหัวใจ (Cardioid) เพราะว่ามีรูปร่างคล้ายหัวใจ



บทที่ 2 พิกัดเชิงขั้ว

ถ้าเราเขียนกราฟของสมการ $r = a + \cos \theta$ เมื่อ a มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.25 ถึง 2.50 ทีละ 0.25 จะพบว่าลิมาสองพัฒนาจากชนิดที่มีวงวนภายในไปเป็นชนิดนูน โดยที่เมื่อ a มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.25 บ่วงจะมีขนาดเล็กลงเรื่อยๆ จนกระทั่งบ่วงหายไปและได้กราฟเป็นรูปหัวใจเมื่อ $a = 1$ จากนั้นเมื่อ a มีค่าเพิ่มขึ้นต่อไป ลิมาสองจะพัฒนาไปเป็นชนิดที่มีรอยบุ๋ม แล้วสุดท้ายไปเป็นชนิดนูน

ตัวอย่างของลิมาสองและกราฟรูปหัวใจแสดงในรูป 2.39



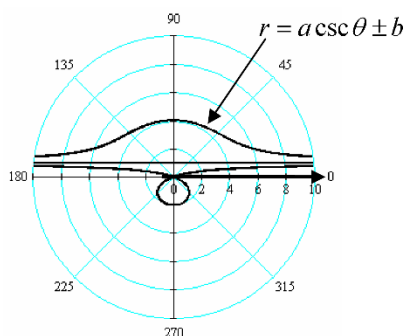
รูป. 2.39

Generated by Mathcad

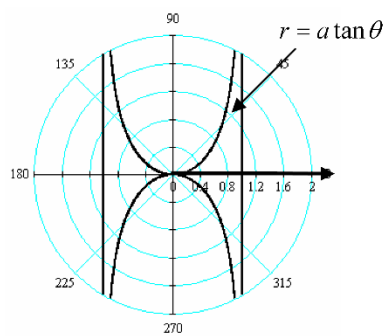
5. เส้นโค้งคอนคอยด์ (Conchoids)

สมการอยู่ในรูป $r = a \csc \theta \pm b$

มีกราฟดังรูป 2.41



รูป 2.41



รูป 2.42

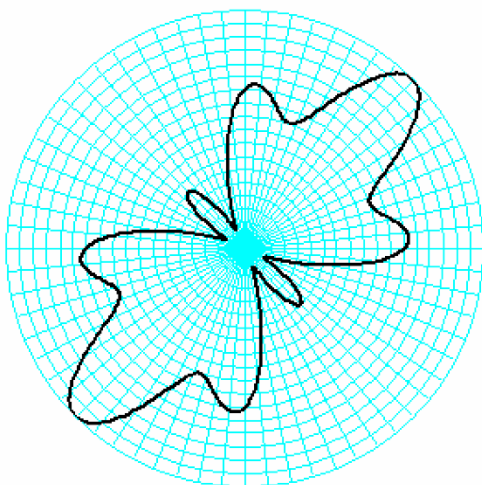
6. เส้นโค้งแคปปา (Kappa Curves)

สมการอยู่ในรูป $r = a \tan \theta$ มีกราฟดังรูป 2.42

7. วงศ์เส้นโค้งผีเสื้อ (Family of Butterflies Curves)

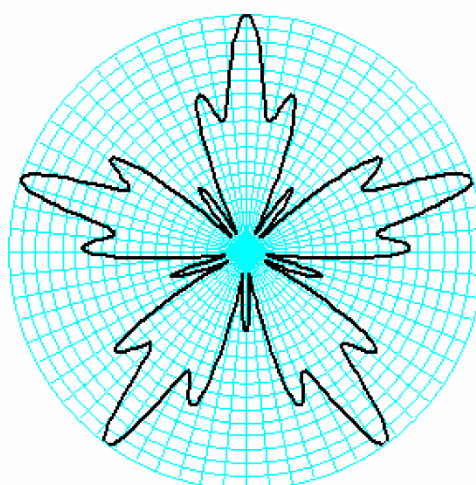
สมการอยู่ในรูป $r = 1 + \sin(n\theta) + \cos^2(2n\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่างเส้นโค้งผีเสื้ออยู่ในรูป 2.43 ก. - ข.



ก. $r = 1 + \sin(2\theta) + \cos^2(4\theta)$

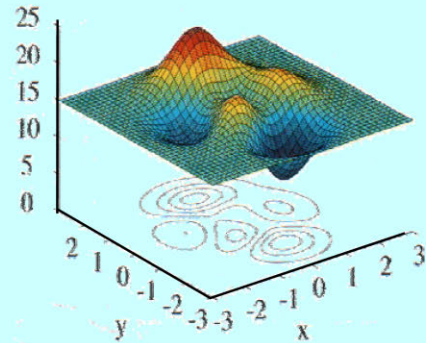
รูป 2.43



ข. $r = 1 + \sin(5\theta) + \cos^2(10\theta)$

บทที่ 3

แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ของหลายตัวแปร (Multivariable Differential Calculus)



เราได้ศึกษาเรื่องลิมิต ความต่อเนื่อง และอนุพันธ์ ของฟังก์ชันค่าจริงของหนึ่งตัวแปร รวมทั้งการประยุกต์ใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าจริงของหนึ่งตัวแปรมาแล้ว ในบทนี้เราจะได้ขยายแนวความคิดในเรื่องต่างๆ ดังกล่าวจากฟังก์ชันค่าจริงของหนึ่งตัวแปร โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ฟังก์ชันค่าจริงของสองและสามตัวแปร ถึงแม้ว่าการขยายแนวความคิดพื้นฐานที่เราได้พัฒนามาสำหรับฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรไปสู่ฟังก์ชันของหลายตัวแปรจะเป็นไปโดยธรรมชาติก็ตาม แต่ฟังก์ชันของหลายตัวแปรก็ยังมีคุณสมบัติที่ซับซ้อนมากกว่าฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร เราจึงมีความจำเป็นต้องพัฒนาเครื่องมือและแนวคิดใหม่ ๆ เพื่อใช้กับฟังก์ชันเหล่านี้เพื่อมาศึกษาเรื่องลิมิตความต่อเนื่องและอนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าจริงของหลายตัวแปรรวมทั้งการประยุกต์เช่นเดียวกันยิ่งไปกว่านั้นในบทที่ 4 เรายังศึกษาการหาปริพันธ์หลายชั้นหรืออินทิกรัลหลายชั้นนั่นเอง

3.1 ฟังก์ชันค่าจริงของหลายตัวแปร (Function of Several Variables)

นิยาม 3.1

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นจำนวนจริง เราจะเรียกเซตของอันดับของ n จำนวน $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ว่า ปริภูมิ n มิติ (n -dimensional space) และเขียนแทนด้วย $\mathbb{R}^n$

นั่นคือ
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i=1, 2, \dots, n\}$$

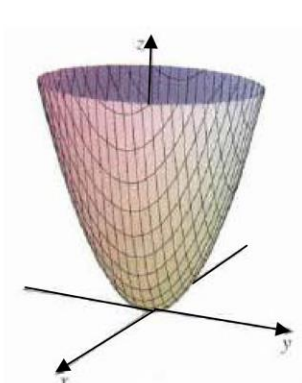
ถ้า X เป็นสมาชิกใน $\mathbb{R}^n$ จะเขียนได้ว่า $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ในกรณีที่ $n=2$ และ $n=3$ เรานิยมเขียนสมาชิกใน $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ และ $\mathbb{R}^3$ เป็น $X = (x, y)$, $X = (x, y, z)$ และ $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ตามลำดับ

นิยาม 3.2

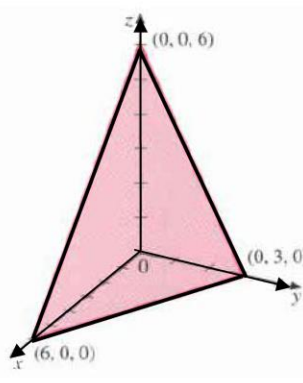
ให้ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น D และมีพิสัยเป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ เราจะเรียก f ว่าเป็น ฟังก์ชันค่าจริงของ n ตัวแปร (real-valued function of n variable) หรือ ฟังก์ชันค่าจริงของหลายตัวแปร เพื่อความสะดวกจะเรียกย่อๆ ว่า ฟังก์ชันของ n ตัวแปร หรือ ฟังก์ชันของหลายตัวแปร

บทที่ 3 แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ของหลายตัวแปร

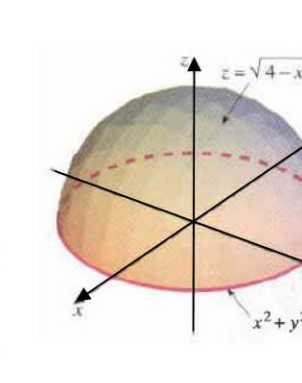
นิยาม 3.3	ให้ $f:D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ถ้า $u=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ เมื่อ $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ เราจะเรียก $x_1, x_2, \dots, x_n$ ว่า ตัวแปรอิสระ (Independent Variable) และเรียก u ว่า ตัวแปรตาม (dependent variable)
นิยาม 3.4	ให้ $f:D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ กราฟของ f คือ $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) u=f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ และ } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}$ สำหรับฟังก์ชัน f ของหนึ่งตัวแปร เรานิยามกราฟของ $f(x)$ ในระนาบ xy ว่าเป็นกราฟของสมการ $y=f(x)$ ในทำนองเดียวกัน ถ้า f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร เราจะนิยามกราฟของ $f(x,y)$ ว่าเป็นกราฟของสมการ $z=f(x,y)$ ในปริภูมิ xyz ซึ่งโดยทั่วไปกราฟเหล่านี้ก็คือพื้นผิวในปริภูมิ 3 มิติโดยที่ภาพฉายบนระนาบ xy คือ โดเมน D ของ f นั้นเอง ในบทที่ 1 เราได้ศึกษาพื้นผิวในปริภูมิ 3 มิติมาแล้ว ดังนั้น ถ้า $f(x,y)=x^2+y^2$ กราฟของ f ก็คือกราฟของสมการ $z=x^2+y^2$ ซึ่งเป็นพื้นผิวทรงพาราโบลอยด์ ดังรูป 3.3 ก. ถ้า $g(x,y)=6-x-2y$ กราฟของ g ก็คือกราฟของสมการ $g(x,y)=6-x-2y$ ซึ่งเป็นระนาบตัดแกน x ที่ $(6,0,0)$, ตัดแกน y ที่ $(0,3,0)$ และตัดแกน z ที่ $(0,0,6)$ ดังรูป 3.3 ข. ถ้า $h(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ กราฟของ h ก็คือกราฟของสมการ $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ ซึ่งเป็นพื้นผิวครึ่งทรงกลมรัศมี 1 หน่วยดังรูป 3.3 ค.



ก. $z = x^2 + y^2$



ข. $g(x,y) = 6 - x - 2y$



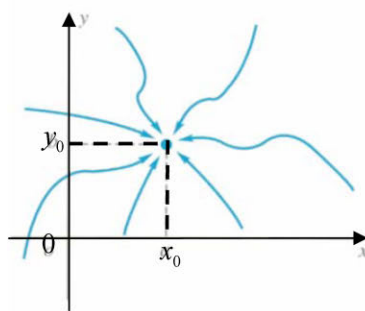
ค. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

รูป 3.3

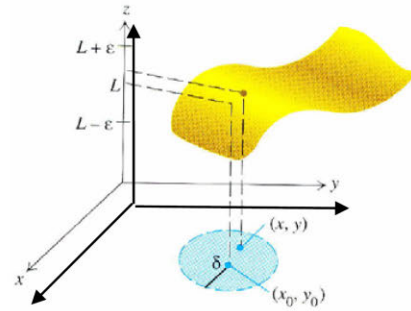
3.2 ลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปร

(Limit of Functions of Several Variables)

แนวความคิดของลิมิตในแคลคูลัสของฟังก์ชันสองตัวแปร, สามตัวแปร หรือมากกว่า มีความสำคัญ เช่นเดียวกับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร ในการศึกษาเรื่องลิมิตของฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรนั้น เมื่อต้องการหาลิมิตของฟังก์ชันที่จุด $x=a$ เราจะพิจารณาค่าของฟังก์ชันที่จุดใกล้ๆ a เมื่อจุดเหล่านั้นเข้าใกล้ a ซึ่งมีสองทิศทางคือ เข้าใกล้ a จากทางซ้ายมือ และเข้าใกล้ a จากทางขวามือ แต่เมื่อเราต้องการหาลิมิตของฟังก์ชันของสองตัวแปรที่จุด (x_0, y_0) นั้น เราจะพบว่า จุด (x, y) ที่อยู่ใกล้ๆ จุด (x_0, y_0) เข้าใกล้จุด (x_0, y_0) ได้หลายทิศทางนับไม่ถ้วน ไม่เฉพาะเข้าใกล้จากทางซ้ายมือหรือจากทางขวามือเท่านั้น ดูรูป 3.20 ดังนั้นการพิจารณาหาลิมิตของฟังก์ชันหลายตัวแปรจึงมีความซับซ้อนมากกว่าลิมิตของฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร ทำให้เราต้องพัฒนาแนวคิดใหม่สำหรับใช้หาลิมิตของฟังก์ชันของหลายตัวแปรนี้ รวมทั้งเรื่องความต่อเนื่อง โดยจะไม่ลงรายละเอียดมากนักและจะนำผลที่ได้ไปใช้หัวข้อต่อไป



ก.



ข.

รูป 3.20

ในที่นี้เราจะกล่าวถึงนิยามลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร เราจะอธิบายความหมายของลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร เพื่อให้เห็นเป็นรูปธรรม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.10

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ซึ่งมีพื้นผิวเหนือระนาบ xy เป็นรูปครึ่งทรงกลม รัศมี 1 หน่วย ดังรูป 3.21 ก. สมมติเราต้องการทราบว่า ค่าของ $f(x, y)$ จะเข้าใกล้ค่าอะไร ขณะที่ (x, y) เข้าใกล้ $(0, 0)$ นั่นคือ เราต้องการหาลิมิต

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

วิธีทำ สมมติเราพิจารณาจุดในโดเมนของ f ซึ่งเข้าใกล้ $(0, 0)$ นั่นคือ เราพิจารณาจุด (x, y) ภายในวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ เล็กๆ บางวง ดังแสดงในรูป 3.21 ข. ดังนั้นเราสามารถมองจากรูป 3.21 ค. เห็นได้ว่า ค่า z เข้าใกล้ 1 นั่นคือ $f(x, y)$ เข้าใกล้ค่า 1



2.3 อนุพันธ์ย่อย (Partial Derivative)

ในคณิตศาสตร์ 1 (Series 1) เราได้ศึกษาฟังก์ชัน $y = f(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรมาแล้ว อนุพันธ์ของ f เทียบกับ x (หรือ อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x) ที่จุด x_0 นิยามโดย

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร เราพิจารณาอนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร เมื่อเทียบกับตัวแปรอิสระตัวใดตัวหนึ่ง โดยตัวแปรอิสระอื่นๆ คงที่ เราเรียกว่า อนุพันธ์ย่อย

ถ้า $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร และ (x_0, y_0) เป็นจุดภายในของโดเมนของ f เมื่อเราให้ y มีค่าคงตัวโดยที่ $y = y_0$ จะได้ว่า $z = f(x, y_0)$ เป็นฟังก์ชันของ x เพียงตัวแปรเดียว ทำให้เราสามารถพิจารณาหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนี้ได้ ในลักษณะของฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร และถ้าฟังก์ชันนี้หาอนุพันธ์ได้ที่จุด x_0 เราจะเรียกอนุพันธ์ที่หาได้ว่า อนุพันธ์ย่อย (Partial Derivative) ของ f เทียบกับ x_0 ที่จุด (x_0, y_0) และเขียนแทนด้วย $f_x(x_0, y_0)$ ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราให้ x มีค่าคงตัวโดยที่ $x = x_0$ จะได้ว่า $z = f(x_0, y)$ เป็นฟังก์ชันของ y เพียงตัวแปรเดียว และเราก็สามารถพิจารณาหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนี้ได้ ในลักษณะของฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรเช่นกัน ซึ่งถ้าฟังก์ชันนี้หาอนุพันธ์ได้ที่จุด y_0 เราจะเรียกอนุพันธ์ที่หาได้ว่าอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y ที่จุด (x_0, y_0) และเขียนแทนด้วย $f_y(x_0, y_0)$

ดังนั้นเราจะนิยามอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันของสองตัวแปรดังนี้

นิยาม 3.19

ให้ $z = f(x, y_0)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร และ (x_0, y_0) เป็นจุดภายในของโดเมนของ f อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x (หรืออนุพันธ์ย่อยของ z เทียบกับ x) ที่จุด (x_0, y_0) คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad \dots(3.1)$$

และอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y (หรืออนุพันธ์ย่อยของ z เทียบกับ y) ที่จุด (x_0, y_0) คือ

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad \dots(3.2)$$

หมายเหตุ

ถ้าเราเปลี่ยนจุด (x_0, y_0) เป็นจุด (x, y) ใดๆ เราจะเขียนแทนอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x ได้เป็น $\frac{\partial f}{\partial x}, f_x(x, y), f_1(x, y), D_1 f(x, y)$

บทที่ 3 แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ของหลายตัวแปร

ตัวอย่าง 3.40	จงหา $\frac{\partial f}{\partial x}\bigg _{(1,2)}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}\bigg _{(1,2)}$ ถ้า $f(x,y) = x^2y + 2y^3 - x^4$
	วิธีทำ หา $\frac{\partial f}{\partial x}$ โดยให้ y ทำหน้าที่เหมือนค่าคงที่ และหาอนุพันธ์ของ f เทียบกับ x เราจะได้ $\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + 2y^3 - x^4) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}x^2y + \frac{\partial}{\partial x}2y^3 - \frac{\partial}{\partial x}x^4 \\ &= 2xy - 4x^3\end{aligned}$ ดังนั้น $\frac{\partial f}{\partial x}\bigg _{(1,2)} = 2(1)(2) - 4(1)^3 = 0$ หา $\frac{\partial f}{\partial y}$ โดยให้ x ทำหน้าที่เหมือนค่าคงที่ และหาอนุพันธ์ของ f เทียบกับ y เราจะได้ $\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + 2y^3 - x^4) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}x^2y + \frac{\partial}{\partial y}2y^3 - \frac{\partial}{\partial y}x^4 \\ &= x^2 + 6y^2\end{aligned}$ ดังนั้น $\frac{\partial f}{\partial y}\bigg _{(1,2)} = (1)^2 + 6(2)^2 = 25 \quad \square$
ตัวอย่าง 3.41	ถ้า $f(x,y) = \sqrt{x+y^2}$ จงหา $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$ ที่จุด $(2,-3)$
	วิธีทำ หา $\frac{\partial f}{\partial x}$ โดยใช้สูตร $\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$ และให้ y เป็นค่าคงที่ จะได้ $\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x+y^2} = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}} \frac{\partial}{\partial x}(x+y^2) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}(1+0) = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}\end{aligned}$ ดังนั้น $\frac{\partial f}{\partial x}\bigg _{(2,-3)} = \frac{1}{2\sqrt{2+(-3)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{11}}$

3.6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย (Implicit Differentiation)

ใน Series 1 แคลคูลัสหนึ่งตัวแปร เราได้เคยศึกษาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งซึ่งขยายโดยปริยาย $F(x,y) = 0$ มาแล้วเทคนิคในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประเภทนี้ เราหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันข้างต้นทุกเทอมเทียบกับ x โดยพิจารณา y เป็นฟังก์ชันของ x ในแต่ละเทอม เช่น y นิยามโดยปริยาย ดังนี้ $x^2xy + y^2 - 4 = 0$

โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งนิยามโดยปริยาย จะได้

$$2x + \left(x \frac{dy}{dx} + y \right) + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

เพราะฉะนั้น
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(2x+y)}{x+2y}$$

เราสามารถนำกฎลูกโซ่ของฟังก์ชัน $F(x,y)=0$ ที่หาอนุพันธ์ได้

โดย y เป็นฟังก์ชันของ x สมมติ $y=h(x)$ โดยเขียนในรูปนิยามโดยปริยาย (Implicit Differentiation) จากกฎลูกโซ่ เราสามารถหาสูตรสำหรับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งนิยาม

โดยปริยาย $\left(\frac{dy}{dx} \right)$ จากสมการ $F(x,y)=0$ ได้ ดังนี้

จากแผนภาพ 2.82 เราจะได้สูตร
$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

เพราะว่า $\frac{dF}{dx} = 0$ จะได้
$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

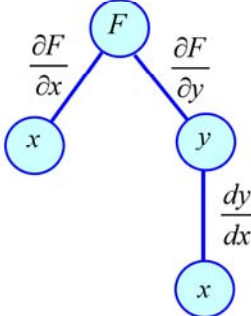
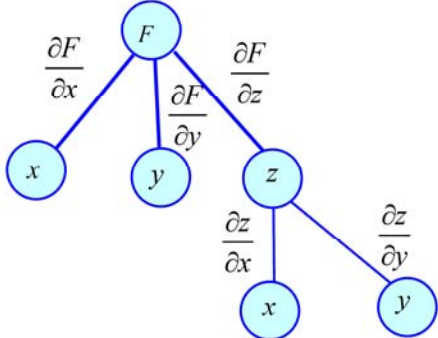
สำหรับการหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปรที่ผ่านมาเป็นการหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่นิยามโดยชัดแจ้ง แต่ในบางครั้งเราอาจจะต้องหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย เช่น

พิจารณาสมการ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ จะเห็นว่าเราสามารถเขียน z เป็นฟังก์ชันของ x และ y ได้สองแบบคือ $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ และ $z = -\sqrt{4-x^2-y^2}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยชัดแจ้ง โดยการหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $z = f(x,y)$ เทียบกับ x ซึ่งนิยามโดยปริยาย จะได้

$$\frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial x} + \frac{\partial z^2}{\partial x} = \frac{\partial 4}{\partial x}$$

$$2x + 0 + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

บทที่ 3 แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ของหลายตัวแปร

ทฤษฎี 3.15	สมมติ $F(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ย่อยได้ และสมการ $F(x,y)=0$ นิยามโดย y เป็นฟังก์ชันของ x และหาอนุพันธ์เทียบกับ x ได้ แล้ว ณ ทุกจุด ที่ $F_y \neq 0$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} \quad \dots\dots\dots(3.21)$ ดูรูป 3.77 ก.
ตัวอย่าง 3.101	จงหา $\frac{dy}{dx}$ จากสมการ $x^2 + xy + y^2 - 4 = 0$ โดยทฤษฎี 3.15 วิธีทำ ในที่นี้ ให้ $F(x,y) = x^2 + xy + y^2$ จากสมการ (3.21) จะได้ $\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy + y^2)}{\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy + y^2)} \\ &= -\frac{(2x + y)}{x + 2y} \quad \square \end{aligned}$
ทฤษฎี 3.16	สมมติ $F(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ย่อยได้และสมการ $F(x,y,z)=0$ นิยามโดย z เป็นฟังก์ชันของ x และ y และหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x และ y ได้ แล้ว ณ ทุกจุดที่ $F_z \neq 0$ จะได้ $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \dots\dots\dots(3.22)$ และ $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} = -\frac{F_y}{F_z} \quad \dots\dots\dots(3.23)$
 ก.  ข. รูป 3.77	

ตัวอย่าง 3.102

กำหนดให้สมการ $x^2y^2z^3 + zx \sin(y) = 5$ นิยาม z เป็นฟังก์ชันของ x และ y

โดยปริยาย จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}$ และ $\frac{\partial z}{\partial y}$

วิธีทำ 1 จาก $x^2y^2z^3 + zx \sin(y) = 5$

จัดรูปใหม่ จะได้ $x^2y^2z^3 + zx \sin(y) - 5 = 0$

ให้ $F(x, y, z) = x^2y^2z^3 + zx \sin(y) - 5$

จะได้ $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2z^3 + z \sin(y)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2yz^3 + zx \cos(y)$,

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3x^2y^2z^2 + x \sin(y)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2xy^2z^3 + z \sin(y)}{3x^2y^2z^2 + x \sin(y)}$$

$$\text{และ} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x^2yz^3 + zx \cos(y)}{3x^2y^2z^2 + x \sin(y)}$$

วิธีทำ 2 จากสมการ $x^2y^2z^3 + zx \sin(y) = 5$

หาอนุพันธ์ย่อยของ z โดยปริยายเทียบกับ x โดยถือว่า y เทียบเสมือนเป็นค่าคงตัว ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2z^3 + zx \sin(y)) &= \frac{\partial 5}{\partial x} \\ y^2 \left(3x^2z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2xz^2 \right) + \sin(y) \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= 0 \\ (3x^2y^2z^2 + x \sin(y)) \frac{\partial z}{\partial x} &= -2xy^2z^3 - z \sin(y) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy^2z^3 + z \sin(y)}{3x^2y^2z^2 + x \sin(y)}$$

หาอนุพันธ์ย่อยของ z โดยปริยายเทียบกับ y โดยถือว่า x เปรียบเสมือนเป็นค่าคงตัว ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2z^3 + zx \sin(y)) &= \frac{\partial 5}{\partial y} \\ x^2 \left(3y^2z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 2yz^3 \right) + x \left(z \cos(y) + \sin(y) \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned}$$

3.7 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ และการประยุกต์

(Relative Maxima Minima Absolute Maxima and Minima and Its Application)

ใน Series 1 เราคงศึกษาเรื่องค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดรวมถึงการประยุกต์ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรมาแล้ว ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันของสองตัวแปรรวมถึงการประยุกต์ เราจะเริ่มศึกษานิยามและทฤษฎีบทของฟังก์ชันสองตัวแปรเกี่ยวกับค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ดังนี้

นิยาม 3.26

ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรซึ่งมีโดเมน D และ (x_0, y_0) เป็นจุดภายในของ D ถ้ามี $r > 0$ ที่ทำให้ $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ สำหรับทุกจุด (x, y) ใน $B((x_0, y_0); r) \cap D$ เราจะกล่าวว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (Relative Maximum) ที่จุด (x_0, y_0) และค่าสูงสุดสัมพัทธ์มีค่าเท่ากับ $f(x_0, y_0)$ และเรียกจุด (x_0, y_0) ว่าจุดสูงสุดสัมพัทธ์ ของ f บน D

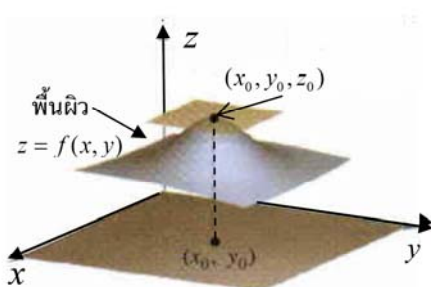
ถ้า $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ ทุกจุด (x, y) ใน D เราจะกล่าวว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (Absolute Maximum) ที่จุด (x_0, y_0) และค่าสูงสุดสัมบูรณ์มีค่าเท่ากับ $f(x_0, y_0)$ และเรียกจุด (x_0, y_0) ว่า จุดสูงสุดสัมบูรณ์ ของ f บน D

นิยาม 3.27

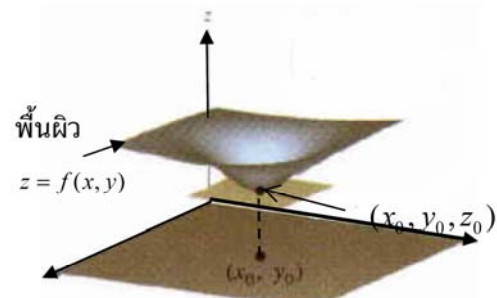
ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรซึ่งมีโดเมน D และ (x_0, y_0) เป็นจุดภายในของ D ถ้ามี $r > 0$ ที่ทำให้ $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ สำหรับทุกจุด (x, y) ใน $B((x_0, y_0); r) \cap D$ เราจะกล่าวว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (Relative Minimum) ที่จุด (x_0, y_0) และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์มีค่าเท่ากับ $f(x_0, y_0)$ และเรียกจุด (x_0, y_0) ว่าจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ของ f บน D

ถ้า $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ ทุกจุด (x, y) ใน D เราจะกล่าวว่า f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (Absolute Minimum) ที่จุด (x_0, y_0) และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์มีค่าเท่ากับ $f(x_0, y_0)$ และเรียกจุด (x_0, y_0) ว่า จุดต่ำสุดสัมบูรณ์ ของ f บน D

ในรูป 3.77 แสดงค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

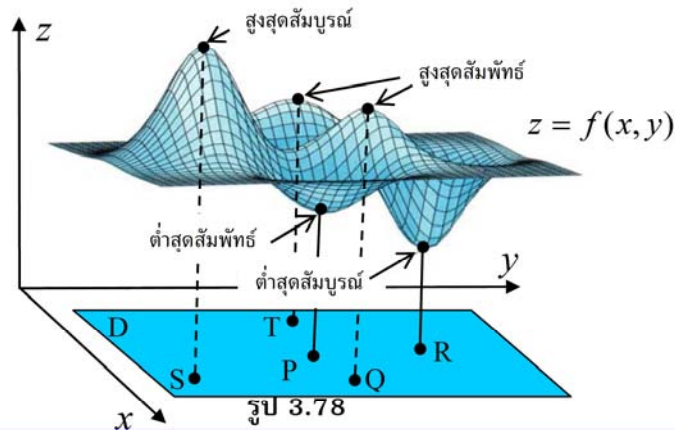


ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f



รูป 3.77 ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

บทที่ 3 แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ของหลายตัวแปร



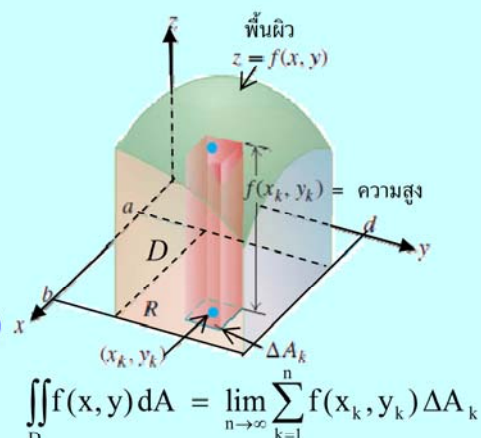
รูป 3.78

	พิจารณากกราฟของ $z = f(x, y)$ ในรูป 3.78 จะเห็นว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด Q จุด S และ T, f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด P และจุด R, f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่จุด S และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่จุด R
หมายเหตุ	1. ถ้า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด (x_0, y_0) แล้วเราจะกล่าวว่า f มี ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (Relative Extremum) ที่จุด (x_0, y_0) โดยจะเรียก (x_0, y_0) ว่า ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ f และเรียดจุด (x_0, y_0) ว่าจุดสุดขีดสัมพัทธ์ของ f 2. ถ้า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่จุด (x_0, y_0) แล้วเราจะกล่าวว่า f มี ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ (Absolute Extremum) ที่จุด (x_0, y_0) โดยจะเรียก (x_0, y_0) ว่า ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f และเรียดจุด (x_0, y_0) ว่า จุดสุดขีดสัมบูรณ์ของ f
ข้อสังเกต	ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์แต่ค่าสุดขีดสัมพัทธ์บางค่าอาจจะไม่เป็นค่าสุดขีดสัมบูรณ์ ต่อไปเราจะพิจารณาหาจุดภายในโดเมนที่ซึ่งฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ สมมติว่าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด (x_0, y_0) เนื่องจากกราฟของ $z = f(x, y)$ เป็นพื้นผิวในปริภูมิสามมิติ เมื่อเราตัดพื้นผิวด้วยระนาบ $x = x_0$ จะได้ รอยตัดเป็นเส้นโค้ง C_2 มีค่าสูงสุด (ดูรูป 3.79) และ C_2 เป็นกราฟของฟังก์ชัน $z = f(x_0, y)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร y ดังนั้น โดยอาศัยความรู้จากฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร จะได้ว่า ถ้าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C ที่จุด (x_0, y_0) มีค่าแล้ว ค่าความชันจะต้องเป็นศูนย์ นั่นคือ อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y ที่จุด (x_0, y_0) เป็นศูนย์ หรือ $f_y(x_0, y_0) = 0$ ในทำนองเดียวกันถ้าตัดพื้นผิวด้วยระนาบ $y = y_0$ จะได้รอยตัดเป็นเส้นโค้ง C_1 ซึ่งมีจุด (x_0, y_0) เป็นจุดที่ค่าของฟังก์ชันบน C_1 มีค่าสูงสุดดูรูป 3.80 และ C_1 เป็นกราฟของฟังก์ชัน $z = f(x, y_0)$

บทที่ 4

อินทิกรัลสองชั้นและประยุกต์

(Double Integrals and It's Applications)



ใน Series 1 เราได้ศึกษาอินทิกรัลของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร ซึ่งอาจจะเรียกว่าเป็นอินทิกรัลชั้นเดียว โดยอาศัยแนวความคิดจากอินทิกรัลของฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปร เราสามารถนิยามอินทิกรัลหลายชั้น หรือปริพันธ์ของฟังก์ชันของหลายตัวแปรได้ แต่ในที่นี้เราจะศึกษา เฉพาะอินทิกรัลสองชั้นและอินทิกรัลสามชั้นเท่านั้น เนื่องจากเราสามารถวาดกราฟหรือพื้นผิวของฟังก์ชันสองตัวแปรและสามตัวแปรให้เห็นเป็นรูปธรรม ซึ่งทำให้นักศึกษาเข้าใจยิ่งขึ้น เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจอย่างต่อเนื่อง จึงขอทบทวนอินทิกรัลของฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรก่อน ดังนี้

ให้ f เป็นฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรที่มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$

แบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยด้วยจุด $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ โดยที่

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

เลือก x_i^* เป็นจุดใดๆ ในช่วงย่อย $[x_{i-1}, x_i]$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, n$

ให้
$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

โดยที่ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ เป็นความกว้างของช่วงย่อย $[x_{i-1}, x_i]$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, n$

เราเรียก S_n ว่า ผลบวกรีมันน์ (Riemann Sum) ของ f บนช่วง $[a, b]$ ในการแบ่งช่วง

$[a, b]$ นี้ ถ้าเราแบ่งในลักษณะที่ เมื่อจำนวนช่วงย่อย n มีค่ามากขึ้นและเข้าสู่อินฟินิตี้

จะทำให้ขนาดความกว้างของแต่ละช่วงย่อยเล็กลงและเข้าหาศูนย์ กล่าวคือ เมื่อ $n \rightarrow \infty$

แล้ว $\Delta x_i \rightarrow 0$ และถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ มีค่าเพียงค่าเดียว สำหรับทุกๆ การแบ่งช่วง $[a, b]$

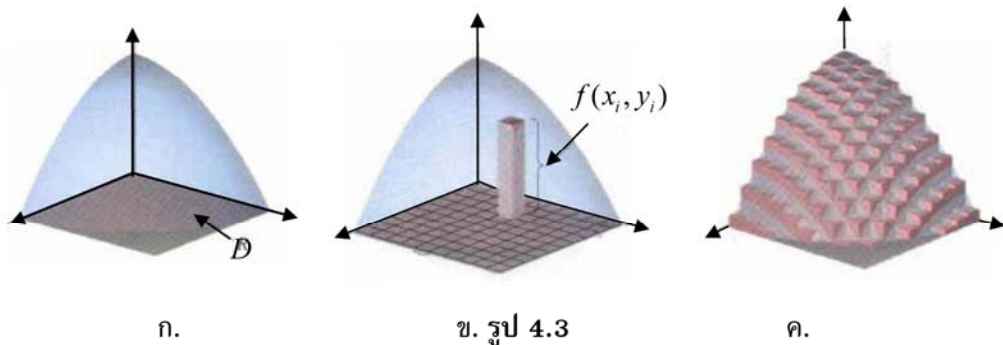
ดังกล่าว และทุกๆ วิธีเลือกจุด x_i^* ในช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ เราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่หา

อินทิกรัลได้ (Integrable Function) บน $[a, b]$ และเราจะเรียก ค่าลิมิตที่หาได้ ว่า

อินทิกรัล(Integral) ของ f บน $[a, b]$ และเขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x) dx$

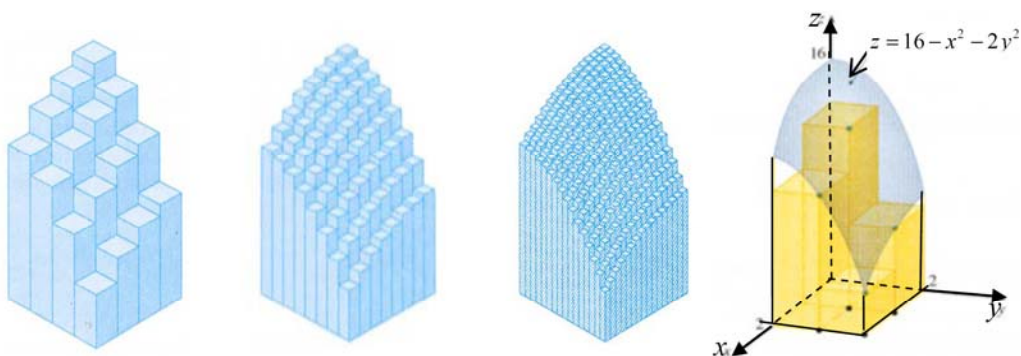
บทที่ 4 อินทิกรัลสองชั้นและประยุกต์

ข้อสังเกต	1. ถ้า $f(x,y) \geq 0$ ทุก (x,y) ใน D ดังรูป 4.3 แล้วจะเห็นว่า $f(x_k, y_k) \Delta A_k$ คือ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยซึ่งสูง $f(x_k, y_k)$ บนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อย D_k ดังนั้น ผลบวกรีมันด์ S_n ก็คือ ผลบวกของปริมาตรรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยทั้งหมดบน D_k ทุก $k = 1, 2, 3, \dots, n$ เราจึงได้ว่า $\iint_D f(x,y) dA$ ก็คือ ปริมาตรของทรงตันซึ่งอยู่ใต้พื้นผิว $z = f(x,y)$ บน D นั่นเอง นั่นคือ $\text{ปริมาตร } V = \iint_D f(x,y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k \quad \dots\dots(4.3)$
-----------	---



2. ในรูป 4.4 แสดงการประมาณค่าปริมาตรของฟังก์ชัน $f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2 > 0$ บน D ที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก จะเห็นว่า รูป 4.4 เราใช้ $n = 4$ จะได้ ปริมาตรโดยประมาณ $V \approx 41.5$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่าปริมาตรโดยประมาณ เมื่อ $n = 8$ จะได้ ปริมาตรโดยประมาณ $V \approx 44.875$ ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $n = 16$ จะได้ปริมาตรโดยประมาณ $V \approx 46.46875$ และปริมาตรโดยประมาณ มีค่ามากยิ่งขึ้น เมื่อ $n \rightarrow \infty$ จะได้

$$\text{ปริมาตรค่าจริงของ } f \text{ บน } D = \iint_D f(x,y) dA = 48 \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$



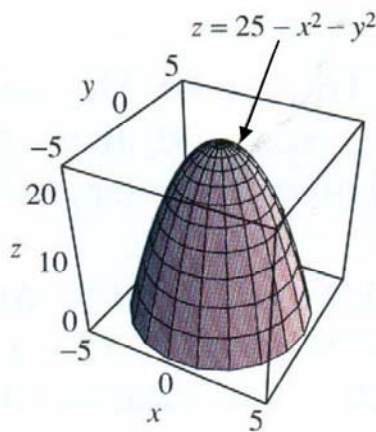
รูป 4.4 ปริมาตรของรูปทรงตันโดยประมาณของรูปทรงตันจะเข้าใกล้ค่าจริงมากขึ้น เมื่อ n มีค่ามากขึ้น

4.3 การหาพื้นที่และปริมาตร (Area and Volume)

ในการประยุกต์ของอินทิกรัลจำกัดเขต ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรที่สำคัญเรื่องหนึ่งคือ การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ ในทำนองเดียวกัน การประยุกต์ของอินทิกรัลสองชั้น ของ $z = f(x, y) \geq 0$ สำหรับทุก (x, y) ในบริเวณ R คือปริมาตรของทรงตันที่อยู่ใต้พื้นผิว $z = f(x, y)$ และอยู่เหนือ R เช่น ปริมาตรของทรงตันที่ปิดด้านบนด้วย พื้นผิวพาราโบลอยด์ $z = 25 - x^2 - y^2$ และอยู่เหนือระนาบ xy รูป 4.51 เราสามารถ แทนปริมาตรทรงตันนี้ด้วย $\iint_R (25 - x^2 - y^2) dA$ เมื่อเราหาค่าอินทิกรัลนี้ด้วยอินทิกรัล ช้อนบน R ดังได้ศึกษามาแล้วในหัวข้อ 4.2 ค่าที่อินทิเกรตได้ คือ ค่าปริมาตรของทรง ตัน นั้นเอง และถ้า $f(x, y) = 1$ สำหรับ ทุก (x, y) ใน R แล้ว

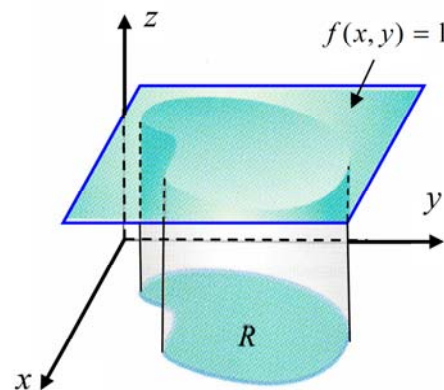
$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_R 1 dA \text{ มีค่าเท่ากับพื้นที่ของ } R \quad \text{รูป 4.52}$$

Generated by Maple



ทรงตัน S มีพื้นที่ฐาน $R = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 25\}$
และความสูง $z = 25 - x^2 - y^2$

รูป 4.51



พื้นที่ R มีพื้นที่ฐาน R
และความสูง $f(x, y) = 1$

รูป 4.52

ตัวอย่าง 4.38

จงหาปริมาตรของปริซึม (Prism) ซึ่งฐานอยู่บนสามเหลี่ยมในระนาบ xy ล้อมรอบ โดยแกน x เส้นตรง $y = x$ และเส้นตรง $x = 1$ ด้านบนปิดล้อมด้วยระนาบ $z = 3 - x - y$

วิธีทำ1 เริ่มต้น วาดทรงตัน S ที่กำหนดให้ ดังรูป 4.53ก. จะเห็นว่าทรงตันนี้ อยู่ ภายใต้ระนาบ $z = 3 - x - y$ และ

บทที่ 4 อินทิกรัลสองชั้นและประยุกต์

ตัวอย่าง 4.39

จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่อยู่ภายใต้พื้นผิวพาราโบลอยด์ $z = 8 - 2x^2 - y^2$ และอยู่เหนือระนาบ xy ในจุดภาคที่ 1

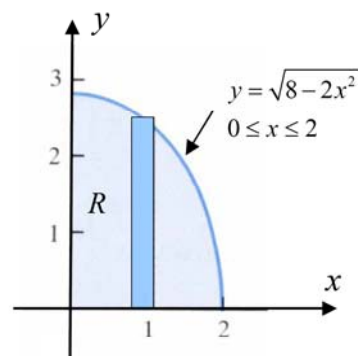
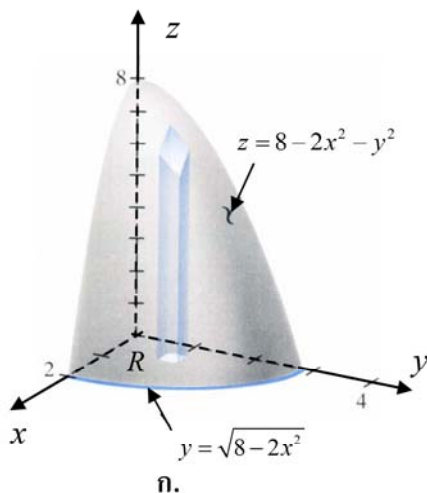
วิธีทำ เริ่มต้นวาดทรงตัน S ที่กำหนดให้แสดงในรูป 4.54ก. จะเห็นว่าทรงตันนี้อยู่ภายใต้พื้นผิว $z = 8 - 2x^2 - y^2$ และ อยู่เหนือบริเวณ R ในระนาบ xy ซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x = 0, y = 0$ และเส้นโค้งวงรี $2x^2 + y^2 = 8$ ดังรูป 4.54ข. โดยการพิจารณาบริเวณ R เป็นบริเวณแบบที่ 1 ดังนั้น

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรทรงตัน } V &= \iint_R (8 - 2x^2 - y^2) dA = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{8-2x^2}} (8 - 2x^2 - y^2) dy dx \\ &= \int_0^2 \left[(8 - 2x^2)y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{8-2x^2}} dx \\ &= \int_0^2 \frac{2}{3} (8 - 2x^2)^{3/2} dx \end{aligned}$$

ให้ $x = 2 \sin \theta$ จะได้ $dx = 2 \cos \theta d\theta$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} 16\sqrt{2} \cos^3 \theta (2 \cos \theta d\theta) \\ &= \frac{64\sqrt{2}}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta (2 \cos \theta) d\theta = \frac{64\sqrt{2}}{3} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + 2 \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{3} \int_0^{\pi/2} (1 + 4 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta = 4\sqrt{2}\pi \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย} \end{aligned}$$

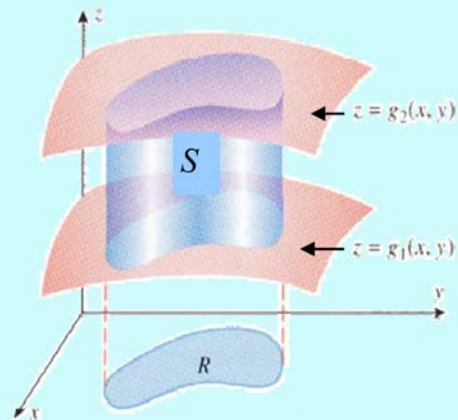
ใช้เทคนิคการอินทิเกรตในเรื่องการเปลี่ยนตัวแปรเป็นฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ
 $x = 0 \rightarrow \theta = 0$
 $x = 2 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$
 $\int \cos^4 \theta \cdot d\theta$
 ใช้สูตร Cos กำลังเลขคู่



ข. บริเวณรูปแบบที่ 1

รูป 4.54

บทที่ 5 อินทิกรัลสามชั้นและ การประยุกต์ (Triple Integral and its Applications)



$$\iiint_S f(x, y, z) \, dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] \, dA$$

ในหัวข้อนี้เราสามารถขยายแนวความคิดอินทิกรัลสามชั้นจากบทที่ 4 ได้ นั่นคืออินทิกรัลสามชั้นของฟังก์ชันสามตัวแปรสามารถนิยามได้โดยอาศัยหลักการเดียวกันกับอินทิกรัลของฟังก์ชันของสองตัวแปร ซึ่งเราจะเริ่มต้นด้วยการพิจารณาอินทิกรัลสามชั้นบนทรงตันสี่เหลี่ยมมุมฉาก

$$\begin{aligned} \text{ให้ } D &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \\ &= \{(x, y, z) \mid a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\} \end{aligned}$$

นั่นคือ D เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งปิดล้อมด้วยระนาบ $x=a_1, x=b_1, y=a_2, y=b_2, z=a_3$ และ $z=b_3$ ดูรูป 5.1

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนครอบคลุม D และ f มีขอบเขตบน D

แบ่ง D ออกเป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยๆ โดยการแบ่งช่วง $[a_1, b_1]$ ออกเป็น m ช่วงย่อยด้วยจุด $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ โดยที่

$$a_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b_1$$

แบ่งช่วง $[a_2, b_2]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยด้วยจุด $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ โดยที่

$$a_2 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = b_2$$

และแบ่งช่วง $[a_3, b_3]$ ออกเป็น p ช่วงย่อยด้วยจุด $z_0, z_1, z_2, \dots, z_p$ โดยที่

$$a_3 = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_p = b_3$$

$$\text{ให้ } D_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

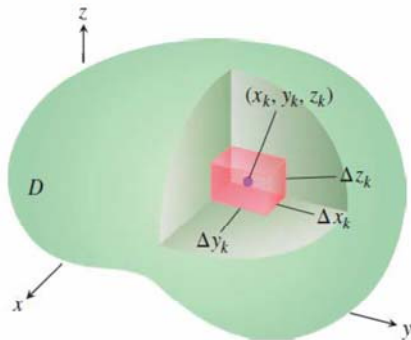
เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยที่ ijk ของ D ซึ่งมีปริมาตรเท่ากับ

$$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$$

เมื่อ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m$

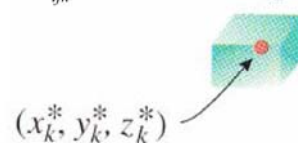
บทที่ 5 อินทิกรัลสามชั้นและการประยุกต์

	$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \quad j=1,2,\dots,n$ $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}, \quad k=1,2,\dots,p$ ให้ (x_i^*, y_j^*, z_k^*) เป็นจุดใดๆ ใน D_{ijk} ให้ $S_{mnp} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \Delta V_{ijk}$ เรียก S_{mnp} ว่า ผลบวกรีมันน์ของ f บน D ในการแบ่ง D เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยๆนี้ ถ้าเราแบ่งในลักษณะที่ความกว้าง ความยาว และความสูงของแต่ละทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยมีค่าเท่ากับศูนย์ เมื่อ m, n และ p มีค่ามากขึ้นและเข้าสู่นันต์ กล่าวคือ เมื่อ $m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ และ $p \rightarrow \infty$ แล้ว $\Delta x_i \rightarrow 0, \Delta y_j \rightarrow 0$ และ $\Delta z_k \rightarrow 0$ สำหรับทุก $i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$ และ $k=1,2,\dots,p$ และถ้า $\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow \infty}} S_{mnp}$ มีเพียงค่าเดียว สำหรับ ทุกๆการแบ่ง D เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยดังกล่าว และทุกการเลือกจุด (x_i^*, y_j^*, z_k^*) ใน D_{ijk} แล้วเราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บน D และเรียกว่าค่าลิมิตที่ได้ว่า อินทิกรัลสามชั้น (Triple Integral) ของ f บน D หรือเรียกสั้นๆว่า อินทิกรัลของ f บน D cjt เขียนแทนด้วย $\iiint_D f(x,y,z) dV$ เรียก D ว่า โดเมนของการหาอินทิกรัลได้บน D
ก.	รูป 5.1 ข.
ข้อสังเกต	ค่าอินทิกรัลสามชั้นของ f บน D ก็คือ ค่าลิมิตของผลบวกทางพีชคณิตของผลคูณระหว่างค่าของฟังก์ชันจุดใดๆ ในทรงตันสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อย D_{ijk} กับปริมาตรของทรงตันสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อย นั้นเอง ดังนิยามต่อไปนี้



$$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

กล่องตันที่ D_{ijk} มีปริมาตร $= \Delta V_k$



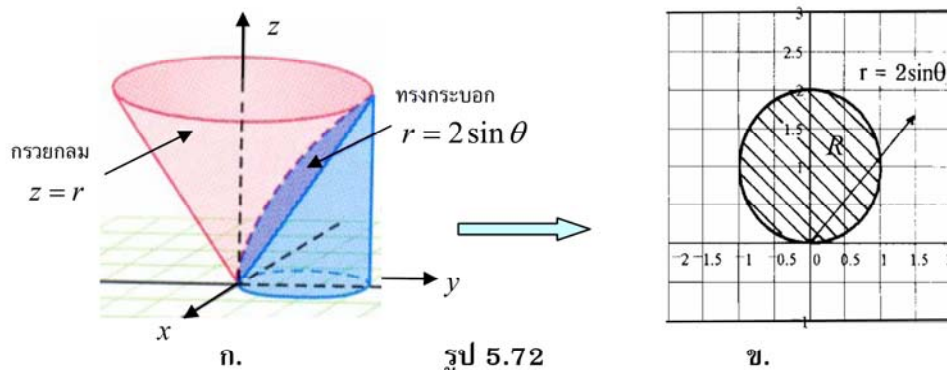
บทที่ 5 อินทิกรัลสามชั้นและการประยุกต์

นิยาม 5.1	ให้ $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งมีโดเมนครอบคลุม D และให้ f มีขอบเขตบน D แล้ว อินทิกรัลของ f บน D คือ $\iiint_D f(x,y,z) dV = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \Delta V_{ijk}$ (5.1)
หมายเหตุ	1. ถ้า $f(x,y,z)$ คือ ความหนาแน่นของวัตถุ D ที่จุด (x,y,z) ใดๆ จะได้ว่า $\iiint_D f(x,y,z) dV$ ก็คือ มวลของ D 2. ถ้า $f(x,y,z)=1$ ทุก $(x,y,z) \in D$ จะได้ $\iiint_D dV$ มีค่าเท่ากับ ปริมาตรของ D สำหรับเงื่อนไขเพียงพอที่ f จะหาอินทิกรัลได้ก็คล้ายกับฟังก์ชันของสองตัวแปร ดังสรุปในทฤษฎีบทต่อไปนี้
ทฤษฎี 5.1	ให้ $f:D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $D = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$ ถ้า f ต่อเนื่องบน D แล้ว จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บน D
ทฤษฎี 5.2	คุณสมบัติของอินทิกรัลสามชั้น $\iiint_D cf(x,y,z) dV = c \iiint_D f(x,y,z) dV$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว $\iiint_D [f(x,y,z) + g(x,y,z)] dV = \iiint_D f(x,y,z) dV + \iiint_D g(x,y,z) dV$ $\iiint_D [f(x,y,z) - g(x,y,z)] dV = \iiint_D f(x,y,z) dV - \iiint_D g(x,y,z) dV$ - ถ้าเราแบ่ง D ออกเป็นสองส่วนย่อย D_1 และ D_2 จะได้ว่า $\iiint_D f(x,y,z) dV = \iiint_{D_1} f(x,y,z) dV + \iiint_{D_2} f(x,y,z) dV$ สำหรับการคำนวณค่า $\iiint_D f(x,y,z) dV$ นั้น ถ้าเราทำโดยการหาปริมาตรของผลบวกปริมาตรก็คงไม่ค่อยจะสะดวก ดังนั้นเราจะพิจารณาค่าอินทิกรัลสามชั้นโดยใช้การหาอินทิกรัลซ้อนแทนในลักษณะเดียวกันกับที่ทำในอินทิกรัลสองชั้น กล่าวคือ เราจะหาอินทิกรัลย่อยจำกัดเขตเทียบกับตัวแปรที่ละตัวเช่น ถ้าหาอินทิกรัลเทียบกับ z ก่อนโดยถือว่า x และ y เป็นค่าคงตัว จะได้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันของ x และ y กล่าวคือ $\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z) dz = g(x,y)$

บทที่ 5 อินทิกรัลสามชั้นและการประยุกต์

	6. อินทิกรัลซ้อนของ f เทียบกับตัวแปร z, y และ x ตามลำดับ เขียนแทนด้วย $\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz dy dx$ โดยทั่วไปค่าอินทิกรัลซ้อนของ f เทียบกับตัวแปรต่างๆในลำดับที่ต่างกัน ไม่จำเป็นต้องมีค่าเท่ากัน แต่สำหรับในกรณีที่มีบริเวณของการหาอินทิกรัล D เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก และ f เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้ อินทิกรัลซ้อนนี้มีค่าเท่ากับอินทิกรัลสามชั้นของ f บน D ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้
ทฤษฎี 5.3	ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บน D เมื่อ $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่า $\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz dy dx \quad \dots\dots\dots(5.2)$ และเท่ากับอินทิกรัลซ้อนอีก 5 แบบ ที่มีลำดับของการหาอินทิกรัลต่างกัน
ตัวอย่าง 5.1	จงหาค่า $\int_1^2 \int_{-1}^3 \int_0^1 (4x - 2y + 2z) dz dy dx$ วิธีทำ $\int_1^2 \int_{-1}^3 \int_0^1 (4x - 2y + 2z) dz dy dx = \int_1^2 \int_{-1}^3 [(4x - 2y)z + z^2]_{z=0}^{z=1} dy dx$ $= \int_1^2 \int_{-1}^3 (4x - 2y + 1) dy dx$ $= \int_1^2 [(4x + 1)y - y^2]_{y=-1}^{y=3} dx$ $= \int_1^2 (16x - 4) dx$ $= [8x^2 - 4x]_1^2$ $= 20$ □

บทที่ 5 อินทิกรัลสามชั้นและการประยุกต์



รูป 5.72

ตัวอย่าง 5.41

กำหนดให้ S เป็นบริเวณที่ล้อมด้วยระนาบ $z = 0$ เหนือทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ และด้านข้างด้วยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ ดังรูป 5.73 จงเขียนอินทิกรัลสามชั้นในระบบทรงกระบอกซึ่งแทนค่าปริมาตร S โดยลำดับการอินทิเกรตในรูปแบบต่อไปนี้

- 1) $dzdrd\theta$ 2) $drdzd\theta$ 3) $d\theta dzdr$

วิธีทำ เขียนบริเวณการอินทิเกรต Q และภาพฉายในระนาบต่างๆ ดังรูป 5.73

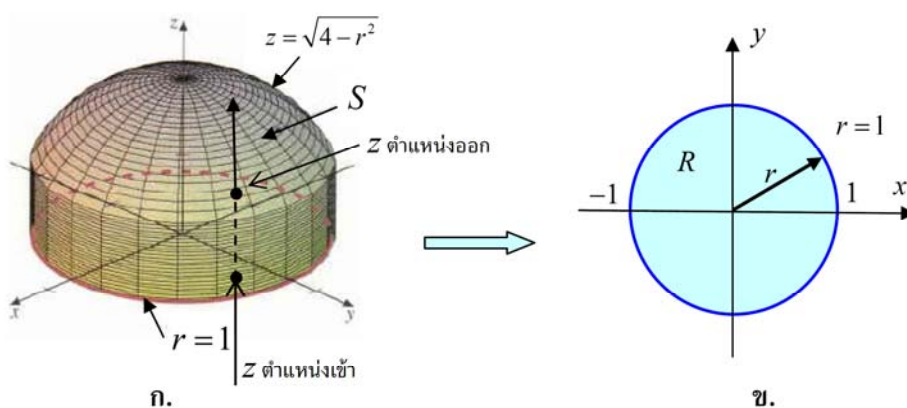
1. $V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r dz dr d\theta$ (ภาพฉายบนระนาบ xy เป็น)

2. $V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^1 r dr dz d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{3}}^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} r dr dz d\theta$

3. $V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} \int_0^{2\pi} r d\theta dz dr$



Generated by Maple



รูป 5.73

ตัวอย่าง 5.42

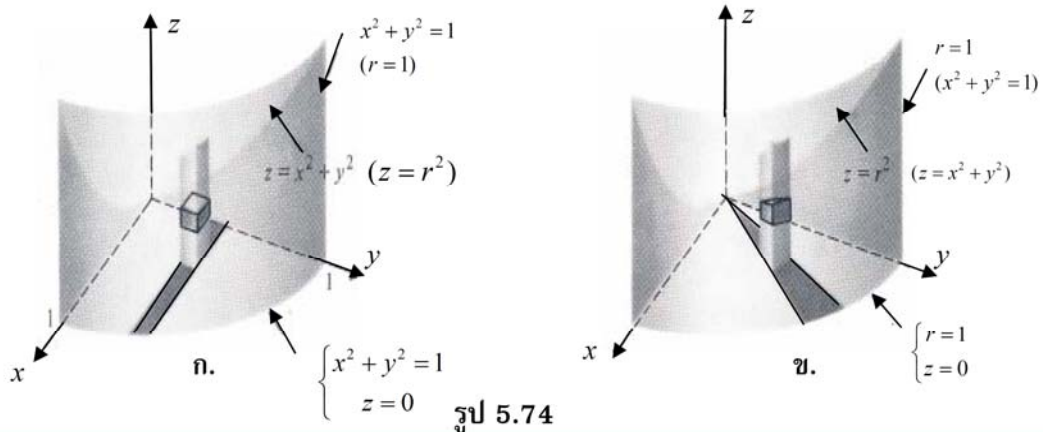
จงใช้ระบบพิกัดทรงกระบอกหาค่าของ

$$\int_1^0 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{x^2+y^2} y^2 dz dx dy$$

วิธีทำ ในปัญหานี้การวาดบริเวณรูปทรงตันของการอินทิเกรตและภาพฉาย R บนระนาบ xy มีประโยชน์มากในการหาขีดจำกัด z, r และ θ จากขีดจำกัดของ z ของการอินทิเกรตนี้จะได้พื้นผิวด้านบนของรูปทรงตัน Q เป็นรูปพาราโบลอยด์ $z = x^2 + y^2$ และพื้นผิวด้านล่างเป็นระนาบ $xy (z = 0)$ จากขีดจำกัดของ x และ y ของการอินทิเกรตจะได้ภาพฉาย R เป็นบริเวณในระนาบ xy ล้อมรอบด้วยแกน x แกน y และส่วนของวงกลม $x = \sqrt{1-y^2}$ ดังรูป 5.74 เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{x^2+y^2} y^2 dz dx dy &= \iiint_S y^2 dV = \iiint_S (r \sin \theta)^2 dV \\ &= \iint_R \left[\int_0^{r^2} r^2 \sin^2 \theta dz \right] dV \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{r^2} r^3 \sin^2 \theta dz dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^5 \sin^2 \theta dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{6} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{1}{12} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{24} \end{aligned}$$

□



รูป 5.74

บทที่ 5 อินทิกรัลสามชั้นและการประยุกต์

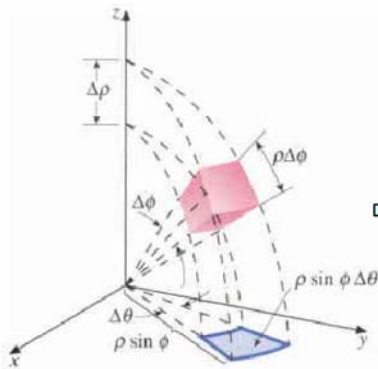
เนื่องจาก $0 \leq \phi \leq \pi$ จะได้ $\sin \phi \geq 0$ ดังนั้นจะได้ว่า $\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} \right| = \rho^2 \sin \phi$ จะเห็นว่า $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = 0$ เมื่อ $\rho = 0$ หรือ $\phi = 0, \pi$ นั่นคือ $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = 0$ บนบริเวณที่มีปริมาตรเป็นศูนย์

เราจะได้สูตรของการหาอินทิกรัลสามชั้นเมื่อเปลี่ยนตัวแปรจาก x, y, z ไปเป็นตัวแปร ρ, θ, ϕ ดังนี้

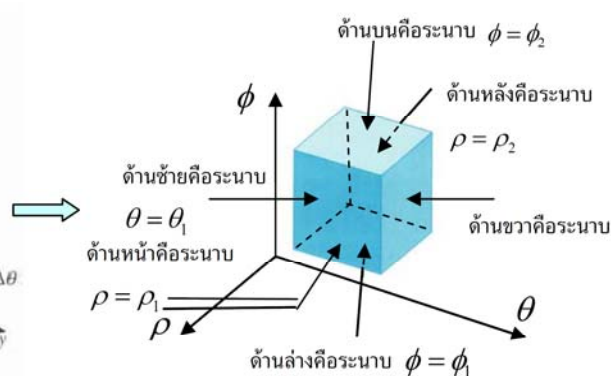
$$\iiint_S f(x,y,z) dV_{xyz} = \iiint_T f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi dV_{\rho\theta\phi}$$

เมื่อ $T = \{(\rho, \theta, \phi) | (x, y, z) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \in S\}$ เนื่องจากเรานิยามอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดฉากดังนั้น T จึงเป็นเซตในระบบพิกัดฉาก

ในกรณีที่ S เป็นทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = \rho_1^2$ ทรงกลม, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho_2^2$, กรวย $z = (\cot \phi_1) \sqrt{x^2 + y^2}$, กรวย $z = (\cot \phi_2) \sqrt{x^2 + y^2}$, ระนาบ $y = (\tan \theta_1)x$ และระนาบ $y = (\tan \theta_2)x$ ดังรูปที่ 5.79



รูปที่ 5.76



รูปที่ 5.77

ถ้าเราจะหาค่าอินทิกรัลสามชั้น $\iiint_S f(x,y,z) dV$ ในรูปอินทิกรัลซ้อนในปริภูมิ xyz จะกระทำได้ลำบากมากแต่ถ้าเราเปลี่ยนตัวแปรจาก x, y, z ไปเป็น ρ, θ, ϕ ด้วยการแทนความสัมพันธ์

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

และ $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \tan \phi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$

จะได้

บทที่ 5 อินทิกรัลสามชั้นและการประยุกต์

	1. ทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = \rho_1^2$ เปลี่ยนเป็น $\rho^2 = \rho_1^2$ หรือ $\rho = \rho_1$ นั่นคือระนาบ $\rho = \rho_1$ ในทำนองเดียวกันทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = \rho_2^2$ จะเปลี่ยนเป็นระนาบ $\rho = \rho_2$ 2. กรวย $z = (\cot \phi_1)\sqrt{x^2 + y^2}$ เปลี่ยนเป็น $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \tan \phi_1$ หรือ $\tan \phi = \tan \phi_1$ หรือ $\phi = \phi_1$ นั่นคือ ระนาบ $\phi = \phi_1$ 3. กรวย $z = (\cot \phi_2)\sqrt{x^2 + y^2}$ จะเปลี่ยนเป็นระนาบ $\phi = \phi_2$ 4. ระนาบ $y = (\tan \theta_1)x$ จะเปลี่ยนเป็น $\frac{y}{x} = \tan \theta_1$ หรือ $\tan \theta = \tan \theta_1$ หรือ $\theta = \theta_1$ นั่นคือ ระนาบ $\theta = \theta_1$ ในการทำนองเดียวกันระนาบ $y = (\tan \theta_2)x$ จะเปลี่ยนเป็น ระนาบ $\theta = \theta_2$ จะได้ว่าทรงตัน S ในปริภูมิ xyz จะถูกเปลี่ยนเป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก T ในปริภูมิ $\rho\theta\phi$ ดังรูป 5.77 ดังนั้น $T = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2, \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2\}$ และ $\begin{aligned} \iiint_S f(x, y, z) dV_{xyz} &= \iiint_T f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi dV_{\rho\theta\phi} \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \end{aligned}$
ข้อสังเกต	การหาค่าอินทิกรัลสามชั้นของ $f(x, y, z)$ บนทรงตัน S ในปริภูมิ xyz จะทำได้สะดวกและง่ายขึ้นเมื่อเปลี่ยนไปหาค่าปริภูมิ $\rho\theta\phi$ ถ้าหากว่า S ซึ่งเป็นบริเวณของการหาอินทิกรัลนั้นล้อมรอบด้วยทรงกลม(หรือส่วนของทรงกลม)และกรวย(หรือส่วนของกรวย)ที่มีแกน z เป็นแกนของรูปนอจากนี้ถ้า $f(x, y, z)$ มีพจน์ $(x^2 + y^2 + z^2)^n$ เป็นส่วนประกอบซึ่งเมื่อเปลี่ยนเป็นพจน์ในระบบพิกัด $\rho\theta\phi$ จะได้ $(x^2 + y^2 + z^2)^n = \rho^{2n}$ จะทำให้การหาอินทิกรัลง่ายขึ้นด้วยในปริภูมิ $\rho\theta\phi$ เช่นเดียวกับการเปลี่ยนตัวแปรในระบบพิกัดทรงกระบอกการหาค่าอินทิกรัลสามชั้นในปริภูมิ $\rho\theta\phi$ ได้นั้นเราจำเป็นต้องเขียนกราฟแสดงทรงตัน T ในปริภูมิ $\rho\theta\phi$ เพื่อกำหนดค่าลิมิตของอินทิกรัลซ้อน แต่บางครั้งการเขียนกราฟแสดงทรงตัน T ไม่อาจทำได้โดยง่ายเพื่อหลีกเลี่ยงความยุ่งยากดังกล่าว เราจะอาศัยการพิจารณาพิกัด (ρ, θ, ϕ) ในอีกลักษณะหนึ่ง ซึ่งไม่ใช่ในระบบพิกัดฉากแต่จะเรียกว่าระบบพิกัดทรงกลม(Spherical Coordinate System)ดังนี้

บทที่ 5 อินทิกรัลสามชั้นและการประยุกต์

ให้ P เป็นจุดใดๆในปริภูมิสามมิติซึ่งมีพิกัดในระบบพิกัดฉากเป็น (x, y, z)

ให้ ρ คือขนาดของ $\overline{OP}$ หรือระยะจากจุด O ถึงจุด P

θ คือมุมที่ภาพฉายของ $\overline{OP}$ บนระนาบ xy ทำกับแกน x บวก

ϕ คือมุมที่ $\overline{OP}$ ทำกับแกน z บวก

เราจะกำหนดให้จุด P มีพิกัดในระบบพิกัดทรงกลมเป็น (ρ, θ, ϕ) จากรูป 5.78 โดยมีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x, y, z ในระบบพิกัดฉากกับตัวแปร ρ, θ, ϕ ในระบบพิกัดทรงกลมเหมือนที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นนั้นคือ

$$x = x(\rho, \theta, \phi) = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = y(\rho, \theta, \phi) = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = z(\rho, \theta, \phi) = \rho \cos \phi$$

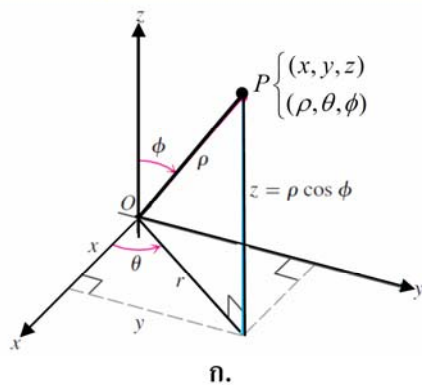
และ

$$\rho = \rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

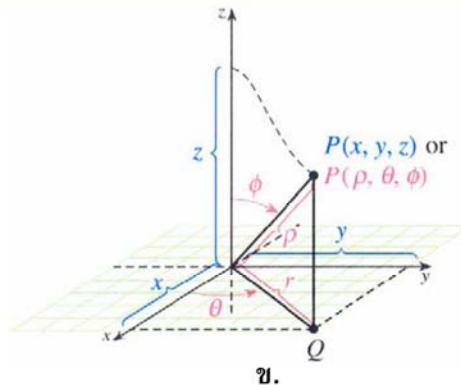
$$\theta = \theta(x, y, z) = \arctan \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$$

$$\phi = \phi(x, y, z) = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

โดยมีเงื่อนไขสำหรับ ρ, θ, ϕ ก็คือ $\rho \geq 0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$ โดยที่ $\theta_0 = 0$ หรือ $-\frac{\pi}{2}$ และ $0 \leq \phi \leq \pi$ ด้วยความสัมพันธ์ดังกล่าวทำให้เราสามารถเปลี่ยนสมการในระบบพิกัดฉากไปเป็นสมการในระบบพิกัดทรงกลมหรือสมการในระบบพิกัดทรงกลมไปเป็นสมการในระบบพิกัดฉากได้



ก.



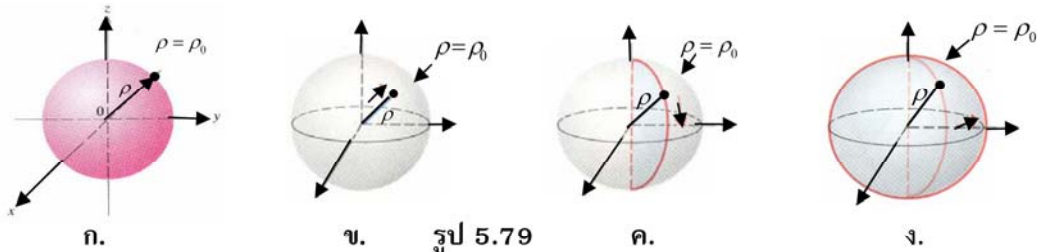
ข.

รูป 5.78

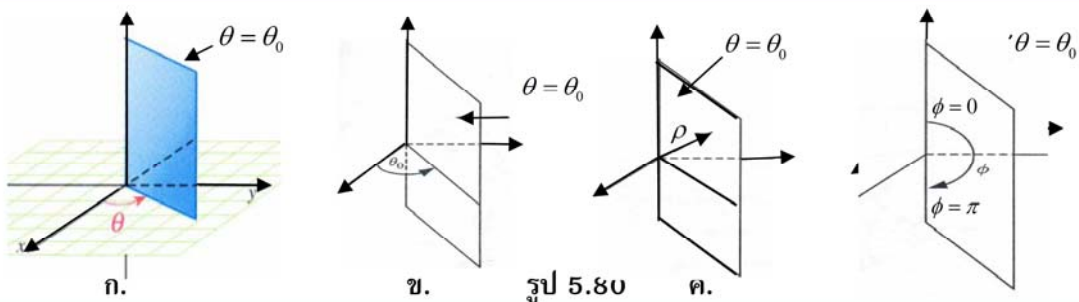
บทที่ 5 อินทิกรัลสามชั้นและการประยุกต์

ตัวอย่างของสมการและพื้นผิวในระบบพิกัดทรงกลม

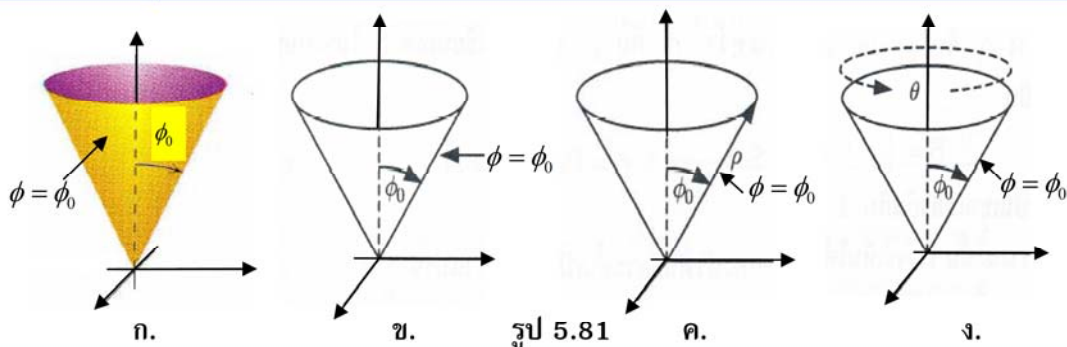
1. สมการ $\rho = \rho_0$ เป็นสมการของทรงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและมีรัศมีเท่ากับ ρ_0 ดังรูป 5.79 จะเห็นว่าในขณะที่ ϕ แปรค่าจาก 0 ถึง π และ θ แปรค่าจาก 0 ถึง 2π นั้น ρ มีค่าคงที่เท่ากับ ρ_0 ตลอดเวลา



2. สมการ $\theta = \theta_0$ เป็นสมการของส่วนของระนาบซึ่งมีแกน z เป็นขอบและระนาบทำมุม θ_0 กับแกน x บวก ดังรูป 5.80 จะเห็นว่าในขณะที่ ϕ แปรค่าจาก 0 ถึง π และ ρ มีค่าจาก 0 และเพิ่มขึ้นได้อย่างไม่มีที่สิ้นสุดนั้น θ มีค่าคงที่เท่ากับ θ_0 ตลอดเวลา



3. สมการ $\phi = \phi_0$ เป็นสมการของครึ่งกรวยซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดและมีตัวก่อกำเนิดทำมุม ϕ_0 กับแกน z บวก ดังรูป 5.81 จะเห็นว่าในขณะที่ θ แปรค่าจาก 0 ถึง 2π และ ρ มีค่าจาก 0 และเพิ่มขึ้นได้อย่างไม่มีที่สิ้นสุดนั้น ϕ มีค่าคงที่เท่ากับ ϕ_0 ตลอดเวลา

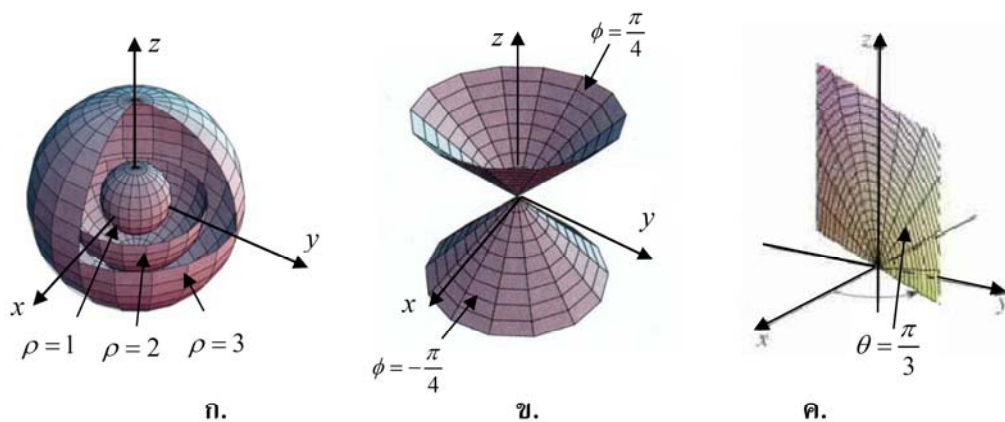


บทที่ 5 อินทิกรัลสามชั้นและการประยุกต์

4. สมการ $\rho = 1, \rho = 2$ และ $\rho = 3$ แทนทรงกลมจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดมีรัศมี 1 หน่วย , 2 หน่วย และ 3 หน่วยตามลำดับรูป 5.82 ก.

5. สมการ $\phi = \frac{\pi}{4}$ และ $\phi = -\frac{\pi}{4}$ แทนกรวยกลมมีจุดยอดที่จุดกำเนิดและแกนของกรวยจะยาวไปตามแนวแกน z โดยที่ผิวของกรวยทำมุมกับแกน z เท่ากับ $\frac{\pi}{4}$ และ $-\frac{\pi}{4}$ ตามลำดับรูป 5.82 ข.

6. สมการ $\theta = \frac{\pi}{3}$ แทนระนาบที่ตั้งฉากกับระนาบ xy และทำมุมกับแกน x เท่ากับ $\frac{\pi}{3}$ รูป 5.82 ค.



รูป 5.82

Generated by Maple

ในกรณีที่ S เป็นทรงตันซึ่งล้อมรอบด้วยทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = \rho_1^2$, ทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = \rho_2^2$, กรวย $z = (\cot \phi_1)\sqrt{x^2 + y^2}$, กรวย $z = (\cot \phi_2)\sqrt{x^2 + y^2}$, ระนาบ $y = (\tan \theta_1)x$ และระนาบ $y = (\tan \theta_2)x$ ดังที่กล่าวมาข้างต้นเมื่อเราเปลี่ยนสมการต่างๆเหล่านี้เป็นสมการในระบบพิกัดทรงกลมจะได้ว่า

ทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = \rho_1^2$ จะเปลี่ยนเป็น ทรงกลม $\rho = \rho_1$

ทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = \rho_2^2$ จะเปลี่ยนเป็น ทรงกลม $\rho = \rho_2$

กรวย $z = (\cot \phi_1)\sqrt{x^2 + y^2}$ จะเปลี่ยนเป็น กรวย $\phi = \phi_1$

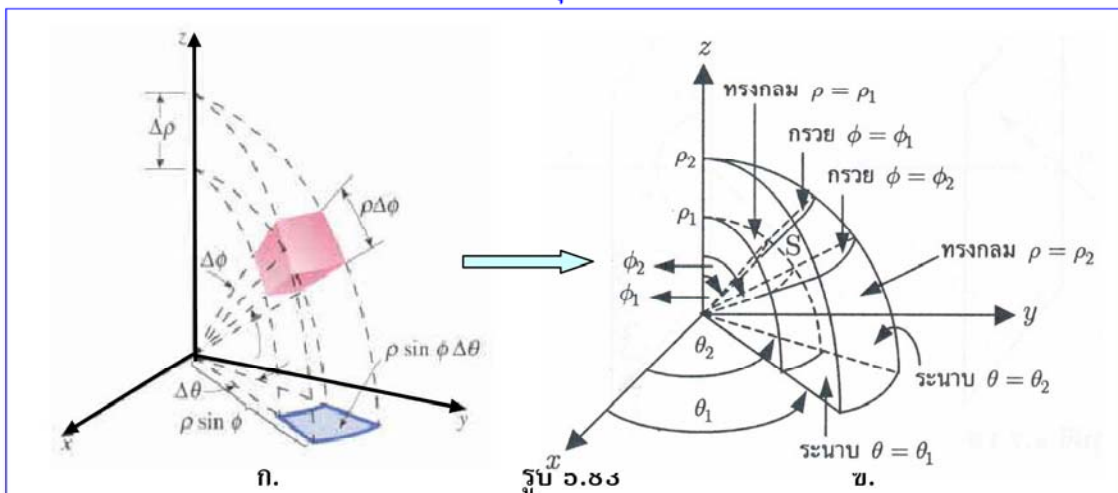
กรวย $z = (\cot \phi_2)\sqrt{x^2 + y^2}$ จะเปลี่ยนเป็น กรวย $\phi = \phi_2$

ระนาบ $y = (\tan \theta_1)x$ จะเปลี่ยนเป็น ระนาบ $\theta = \theta_1$

ระนาบ $y = (\tan \theta_2)x$ จะเปลี่ยนเป็น ระนาบ $\theta = \theta_2$

ดังรูป 5.83

บทที่ 5 อินทิกรัลสามชั้นและการประยุกต์



จากรูป 5.83 เมื่อพิจารณาขอบเขตของค่า ρ, θ, ϕ จะเห็นว่า θ มีค่าอยู่ระหว่าง θ_1 กับ θ_2 ส่วน ϕ จะมีค่าอยู่ระหว่าง ϕ_1 กับ ϕ_2 และ ρ จะมีค่าอยู่ระหว่าง ρ_1 กับ ρ_2 ซึ่งเราสามารถเขียนเซต S ในระบบพิกัดทรงกลมได้เป็น

$$S = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2, \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2\}$$

ซึ่งจะเห็นว่าเป็นเซตเดียวกันกับ T

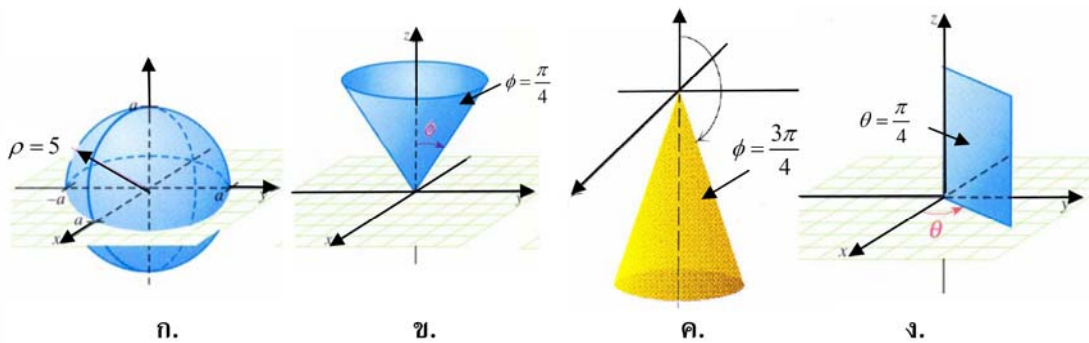
ดังนั้นเราจะเห็นได้ว่าการหาค่าของอินทิกรัลสามชั้นเมื่อต้องเปลี่ยนตัวแปร x, y, z จากไปเป็น ρ, θ, ϕ นั้นเราไม่จำเป็นต้องเขียนรูปแสดงทรงตัน T ซึ่งเป็นภาพของ S ภายใต้การเปลี่ยนตัวแปรข้างต้นเพื่อพิจารณาค่าลิมิตของ ρ, θ และ ϕ ของอินทิกรัลซ้อนก็ได้โดยเราสามารถพิจารณาค่าลิมิตของ ρ, θ และ ϕ ในอินทิกรัลซ้อนได้จากทรงตัน S หลังจากที่เราเปลี่ยนสมการของพื้นผิวที่ล้อมรอบทรงตัน S ให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกลมแล้วและเราสามารถเขียนเซตในระบบพิกัดทรงกลมได้ซึ่งจะเป็นเซตเดียวกันกับ T นั่นเอง ดังนั้นเราจึงอาจเรียกการเปลี่ยนตัวแปรของการหาอินทิกรัลสามชั้นจาก x, y, z ไปเป็น ρ, θ, ϕ ว่าเป็นการเปลี่ยนตัวแปรจากระบบพิกัดฉากไปเป็นระบบพิกัดทรงกลม

ตัวอย่างพื้นผิวในปริภูมิสามมิติและสมการในระบบพิกัดต่าง ๆ

พื้นผิว	ระบบพิกัดฉาก	ระบบพิกัดทรงกระบอก	ระบบพิกัดทรงกลม
ทรงกลม	$x^2 + y^2 + z^2 = 25$	$r^2 + z^2 = 5$	$\rho = 5$
กรวยกลม	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$z = r$	$\phi = \frac{\pi}{4}$
กรวยกลม	$z = -\sqrt{x^2 + y^2}$	$z = -r$	$\phi = \frac{3\pi}{4}$
ระนาบ	$\frac{y}{x} = 1$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	$\theta = \frac{\pi}{4}$

ดูรูป 5.84

บทที่ 5 อินทิกรัลสามชั้นและการประยุกต์



รูป 5.84

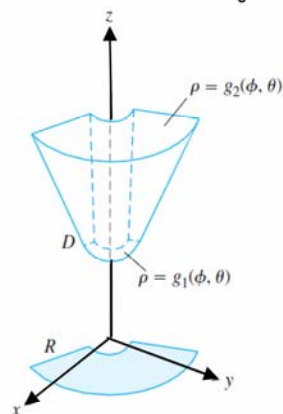
การใส่ขีดจำกัดของการอินทิเกรตในระบบทรงกลม

(How to Set the limit of Integration in Spherical Coordinates)

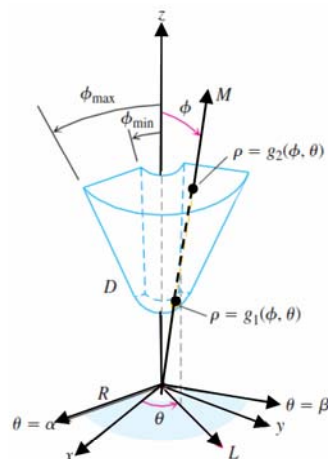
ในการคำนวณอินทิกรัลที่อยู่ในรูปของ

$$\iiint_S f(\rho, \theta, \phi) dV$$

ขั้นตอนที่ 1 เขียนกราฟของบริเวณ S ตามแนวของภาพฉาย R และกำหนดผิวโค้งที่ล้อมรอบบริเวณ S ดังแสดงในรูป 5.85



รูป 5.85



รูป 5.86

ขั้นตอนที่ 2 การใส่ขีดจำกัดของ ρ (ρ -limit of Integration) ลากเส้นตรงจาก M จุดกำเนิดทำมุม ϕ ในทิศทางที่เป็นบวกกับแกน z และในขณะเดียวกันลากภาพฉายของเส้นตรง M บนระนาบ xy เรียกว่า L (ภาพฉายของ M) เส้นตรง L ทำมุม θ กับแกน x ในทิศทางที่เป็นบวกในขณะที่ ρ เพิ่มขึ้น M เข้าสู่ S ที่ $\rho = g_1(\phi, \theta)$ และออกจาก S ที่ $\rho = g_2(\phi, \theta)$ จะได้ ขีดจำกัดของ ρ ตามต้องการ ดังแสดงในรูป 5.86

บทที่ 5 อินทิกรัลสามชั้นและการประยุกต์

ขั้นตอนที่ 3 การใส่ลิมิตของ θ (θ -limit of Integration) ลากเส้นตรง L กวาดไปบน R จะได้ θ เริ่มจาก α ถึง β จะได้ลิมิตของ θ ตามต้องการดูรูป 5.86

ขั้นตอนที่ 4 การใส่ลิมิตของ ϕ (ϕ -limit of Integration) สำหรับ θ ที่กำหนดให้ ณ ตำแหน่งใดๆ มุม ϕ ซึ่ง M ทำกับแกน z จาก $\phi = \phi_{\min}$ ถึง $\phi = \phi_{\max}$ จะได้ลิมิตของ ϕ ตามต้องการ ดูรูป 5.86 จะได้

$$\iiint_S f(\rho, \theta, \phi) dV = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{\phi=\phi_{\min}}^{\phi=\phi_{\max}} \int_{\rho=g_1(\phi, \theta)}^{\rho=g_2(\phi, \theta)} f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

การเปลี่ยนแปลงสมการในระบบพิกัดทรงกลมกับพิกัดทรงกระบอก

$r = \rho \sin \phi$, $z = \rho \cos \phi$, $\theta = \theta$ โดยที่ θ ในทั้งสองระบบจะเหมือนกัน

การเปลี่ยนแปลงอินทิกรัลสามชั้น

$$\iiint_S f(x, y, z) dV = \iiint_S f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \underbrace{\rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta}_{dV}$$

ในส่วนของ $f(x, y, z)$

แทน x ด้วย $\rho \sin \phi \cos \theta$

แทน y ด้วย $\rho \sin \phi \sin \theta$

แทน z ด้วย $\rho \cos \phi$

ในส่วนของ dV (ปริมาตรของทรงตันส่วนเล็กๆ)

พิกัดฉาก

พิกัดทรงกลม

พิกัดทรงกระบอก

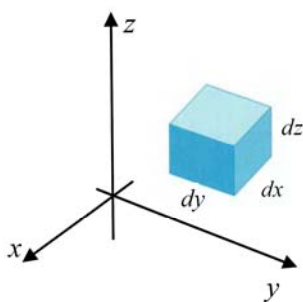
$$dz dy dx \longrightarrow \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \longrightarrow dz r dr d\theta$$

ดูรูป 5.87

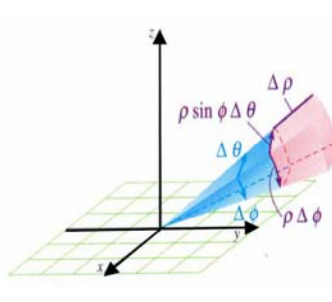
ระบบพิกัดฉาก

ระบบพิกัดทรงกลม

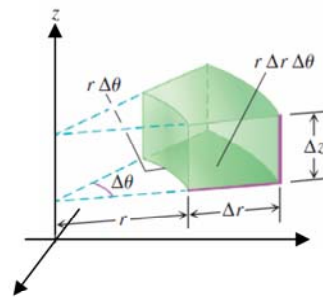
ระบบพิกัดทรงกระบอก



ก



ข



ค

รูป 5.87

บทที่ 5 อินทิกรัลสามชั้นและการประยุกต์

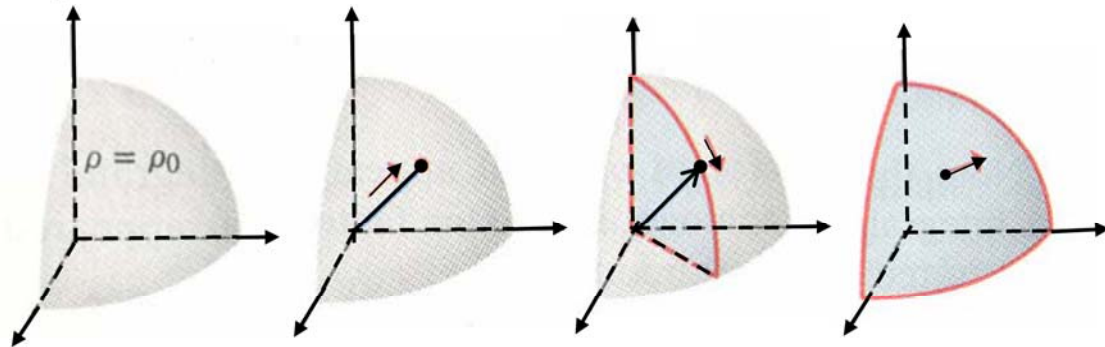
ต่อไปนี้เป็น การแสดงการหาปริมาตรของการอินทิเกรตบนรูปทรงตัน S บางรูปที่พบอยู่บ่อยๆ ในระบบพิกัดทรงกลม

รูปแบบที่ 1

ส่วนหนึ่งของทรงกลม $\rho = \rho_0$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\rho_0} f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

ในอัฐมภาคที่ 1



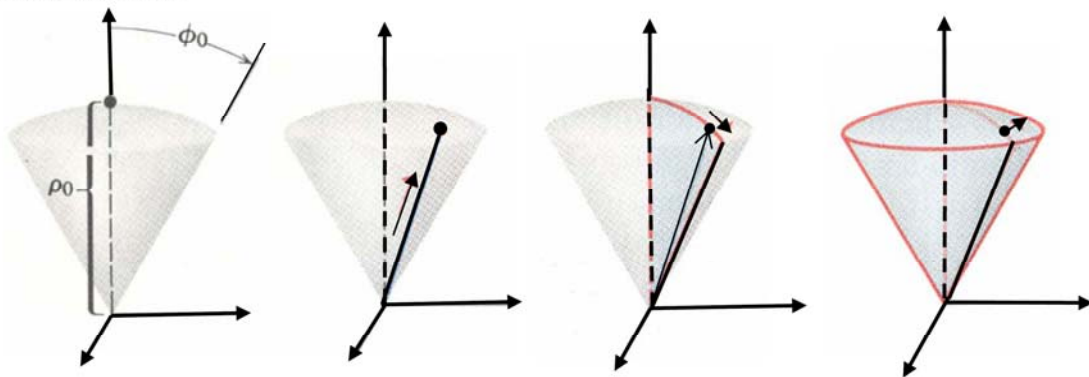
ρ เปลี่ยนจาก 0 ถึง ρ_0 , ϕ เปลี่ยนจาก 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$, θ เปลี่ยนจาก 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$
เมื่อ ϕ และ θ คงที่ เมื่อ θ คงที่

รูปแบบที่ 2

กรวยกลมรูปไอศกรีมตัน

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_0^{\rho_0} f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

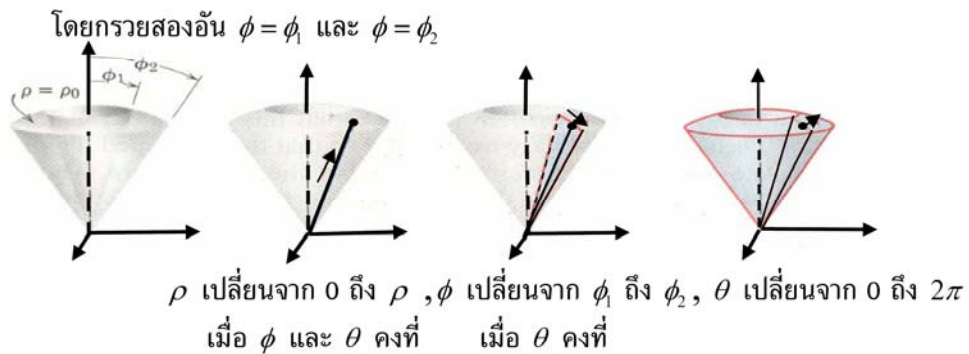
ซึ่งตัดจากทรงกลม



ρ เปลี่ยนจาก 0 ถึง ρ_0 , ϕ เปลี่ยนจาก ϕ_1 ถึง ϕ_2 , θ เปลี่ยนจาก 0 ถึง 2π
เมื่อ ϕ และ θ คงที่ เมื่อ θ คงที่

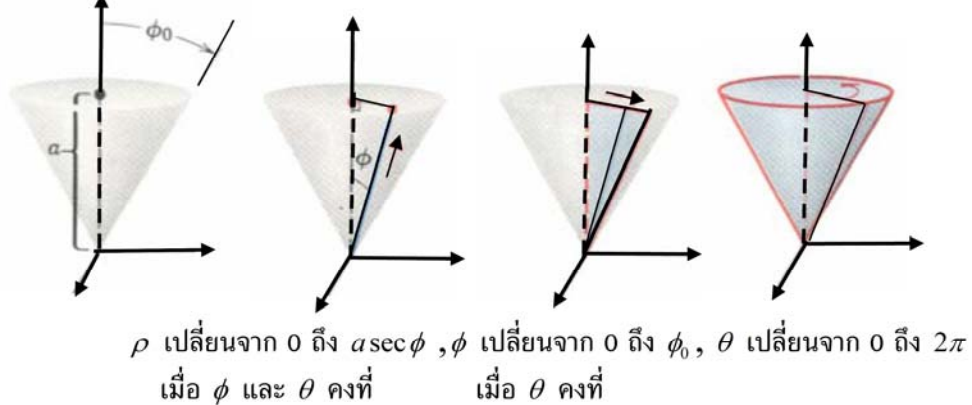
บทที่ 5 อินทิกรัลสามชั้นและการประยุกต์

รูปแบบที่ 3 รูปทรงตันนี้ตัดจากทรงกลม $\rho = \rho_0$, $I_3 = \int_0^{2\pi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_0^{\rho_0} f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$



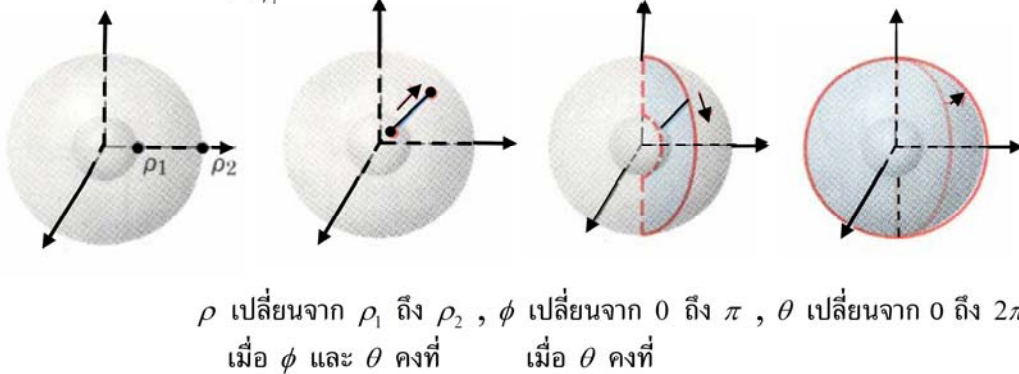
รูปแบบที่ 4 รูปทรงตันนี้ปิดด้านข้างกรวยกลม $\phi = \phi_0$ และ ด้านบนด้วยระนาบตามแนวนอน $z = a$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\phi_0} \int_0^{a \sec \phi} f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$



รูปแบบที่ 5 รูปทรงตันนี้อยู่ระหว่างทรงกลม $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$

$$I_5 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$



ตัวอย่าง 5.44

จงใช้ระบบพิกัดทรงกลมหาค่า $\iiint_S z dx dy dz$

เมื่อ S เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้านบนด้วยพื้นผิวทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ และด้านล่างด้วยพื้นผิวกรวยกลม $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $z \geq 0$ จะได้ $\rho \cos \phi \geq 0$ นั่นคือ $\phi \leq \frac{\pi}{2}$

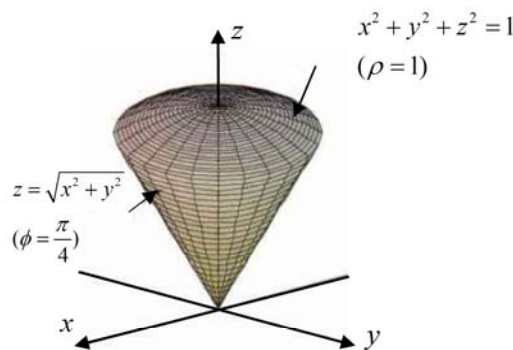
จาก $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ จะได้ $\rho \leq 1$ และ จาก $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ จะได้

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta} = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}$$

$$\text{หรือ } \rho \cos \phi = \rho \sin \phi$$

จะได้ $\tan \phi = 1$ หรือ $\phi = \frac{\pi}{4}$ ดูรูป 5.88

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \iiint_S z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 (\rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \phi \cos \phi \left[\int_0^1 \rho^3 d\rho \right] d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\phi d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} [-\cos 2\phi]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{16} [\theta]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$



รูป 5.88

Generated by Maple

บรรณานุกรม

1. Adam, Robert A. **Calculus 7th Edition**. Addison Wesley, U.S.A, 2009.
2. Anton, Bivens and Davis. **Calculus 9th Edition**. John Wiley & Sons, U.S.A, 2009.
3. Bahder, Thomas B. **Mathematica for Scientists and Engineers**. Addison Wesley, U.S.A, 1995.
4. Baipai, Mustoe Walker. **Engineering Mathematics 2nd Edition**. John Wiley, U.S.A, 1990.
5. Bradley and Smith. **Calculus 3rd Edition**. Prentice Hall, Inc. U.S.A, 1999.
6. Bradley and Smith. **Multivariable Calculus**. Prentice Hall, Inc. U.S.A, 1995.
7. Burgmeier, James. W. **Calculus with Applications**. McGraw-Hill, U.S.A, 1990.
8. Donnelly, Dinnis. **Mathcad for Introductory Physics**. Addison Wesley, U.S.A, 1992.
9. David, E. and Henry. **Calculus with Analytic Geometry, 5th Edition**. Prentice-Hall Inc. U.S.A, 1998.
10. Finney, Weir and Giordano. **Thomas' Calculus 11th Edition**. Addison-Wesley. U.S.A, 2005.
11. Holder, Defranza and Pasachoff. **Calculus 3rd Edition**. U.S.A, 1995.
12. Jeffrey, Alam. **Essentials of Engineering Mathematics**. Chapman & Hall, 1995.
13. James, Glyn. **Advanced Modern Engineering Mathematics 3rd Edition**. Prentice-Hall Inc. U.S.A, 2005.
14. Larson, Hostetler and Edwards. **Calculus 5th Edition**. D.C.Heath and Company. U.S.A, 1994.
15. Mizrahi and Sullivan. **Calculus & Analytic Geometry 3rd Edition**. Wadsworth Publishing Company. U.S.A, 1990.
16. Ostebee, Arnold. And Zorn, Porn. **Calculus**. Saunders College Publishing, New York, 1997.
17. Repka, Joe. **Calculus & Analytic Geometry**. Wm.C.Brown Publishers, U.S.A, 1994.
18. Salas, Hille and Etgen. **Calculus : One Variable 8th Edition**. John Wiley & Sons, U.S.A, 1999.
19. Smith, Cameron. **The Mathematica Graphics Guidebook**. Addison-Wesley. U.S.A, 1995.
20. Steward, James. **Calculus 7th Editon**. Thomson-Brooks/cole. Singapore, 2008.
21. Varberg and Purcell. **Calculus 7th Editon**. Prentice Hall International, Inc. U.S.A, 1997.