

★
SERIES 1

e-book : Series 1

DRIVING RANGE OF CALCULUS

ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์

THEORY AND PROBLEMS

คณิตศาสตร์

วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์

MATHEMATICS OF ENGINEERS AND SCIENTISTS

FREE!
CALCULUS CONCEPT
MAPS



อนุพันธ์และการประยุกต์

THE DERIVATIVE AND ITS APPLICATIONS

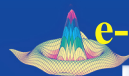
- ✓ สรุปลูตรนิยาม ทฤษฎี และตัวอย่างประกอบ
- ✓ 589 ตัวอย่างโจทย์พร้อมเฉลยโดยละเอียด
- ✓ 1612 โจทย์ปัญหาพร้อมคำตอบ
- ✓ 478 กราฟโดยโปรแกรม Mathcad & Mathematica

รองศาสตราจารย์ ศรีบุตร แววจริญ

รองศาสตราจารย์ ดร.ชนศักดิ์ บำยเกื้อยง

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ



ประวัติผู้แต่ง



รองศาสตราจารย์ ศรีบุตร แวเจริญ



รองศาสตราจารย์ ดร.ชนศักดิ์ น้ายเที่ยง

การศึกษา

- กศ.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยม มศว.บางเขน
- วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (นักเรียนทุน U.D.C.)

- กศ.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยม มศว.พิษณุโลก
- วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (นักเรียนทุน U.D.C.)
- ค.ด. (อุดมศึกษา), Cognate : สถิติ-วิจัย, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประสบการณ์

- หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
- รองคณบดีฝ่ายวิชาการ

- หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
- รองคณบดีฝ่ายวิชาการ, ฝ่ายพัฒนา, ฝ่ายกิจการนักศึกษา
- รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ

ปัจจุบัน

- ดำรงตำแหน่งรองศาสตราจารย์ ระดับ 9 ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ (มจพ.)

ผลงานตำราวิชาการร่วมกัน

- SERIES 1 อนุพันธ์และการประยุกต์
- SERIES 2 อินทิกรัลและการประยุกต์
- SERIES 3 แคลคูลัสหลายตัวแปร
- SERIES 4 การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์

- SERIES 5 สมการเชิงอนุพันธ์ 1
- SERIES 6 สมการเชิงอนุพันธ์ 2 และการแปลงลาปลาซ
- SERIES 7 เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ 2 มิติ, 3 มิติ
- SERIES 8 เมตริกซ์และพีชคณิตเชิงเส้น

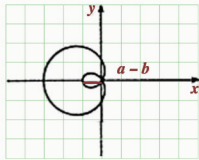
ผลงานวิจัย

- สื่อการเรียนการสอนสำหรับวิชาแคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ใน 3 มิติ
- Computer-assisted instruction (CAI) in Calculus
- สื่อการเรียนการสอนสำหรับ ปริพันธ์ของฟังก์ชัน 1: ความหมายของปริพันธ์จำกัดเขต ปริยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต
- Adomian Decomposition Method for Solving a Non-Linear Shallow Water Tsunami Model of Coupled Partial Differential Equations
- Development of a Mathematical Model of the Inshore Tsunami Wave Equations by Lax-Wendroff Numerical Method

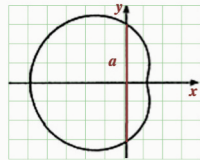
- Elliptic Number และเส้นรอบวงของวงรี
- Elliptic Number and Approximation Function
- การทดสอบการเข้าสู่ของอนุกรมโดยใช้คอมพิวเตอร์
- The Development of The Prerequisite Model in Basic Mathematics Course for Science and Technology Undergraduate Curricular by Using Concept Maps
- การใช้คอมพิวเตอร์สร้างฟังก์ชันไมโครสโคป

รูปแบบของกราฟในระบบเชิงขั้ว (Polar Form)

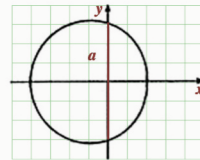
LIMACONS $r = b \pm a \cos \theta$ หรือ $r = b \pm a \sin \theta$



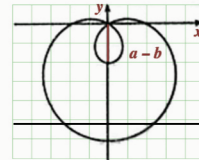
$r = b - a \cos \theta, \frac{b}{a} < 1$
(inner loop)



$r = b - a \cos \theta, 1 < \frac{b}{a} < 2$
(dimple)

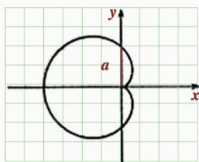


$r = b - a \cos \theta, \frac{b}{a} \geq 2$
(convex)

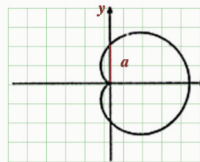


$r = b - a \sin \theta, \frac{b}{a} < 1$
(หมุน 90°)

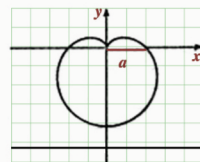
CARDIOIDS $r = a(1 \pm \cos \theta)$ และ $r = a(1 \pm \sin \theta)$ หรือ Limacons ซึ่ง $a = b$



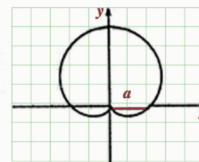
$r = a - a \cos \theta$



$r = a + a \cos \theta$
(หมุน 180°)



$r = a - a \sin \theta$
(หมุน 90°)



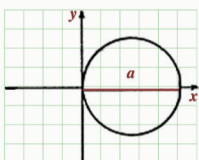
$r = a + a \sin \theta$
(หมุน 270°)

ROSE CURVES

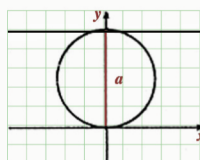
$r = a \cos n\theta$ หรือ $r = a \sin n\theta$

ถ้า n เป็นเลขคี่จะมี n กลีบ

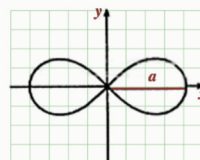
ถ้า n เป็นเลขคู่จะมี $2n$ กลีบ



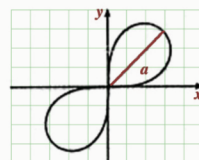
$r = a \cos \theta$
(วงกลม, หนึ่งกลีบ)



$r = a \sin \theta$
(หมุน 90°)



$r^2 = a^2 \cos 2\theta$

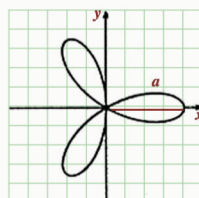


$r^2 = a^2 \sin 2\theta$
(หมุน 45°)

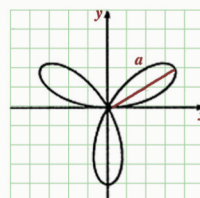
LEMNISCATES

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$ หรือ $r^2 = a^2 \sin 2\theta$

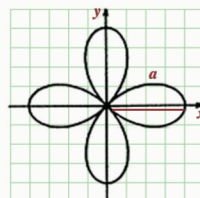
(2 Loops)



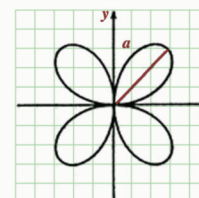
$r = a \cos 3\theta$
(3 กลีบ)



$r = a \sin 3\theta$
(หมุน 30°)

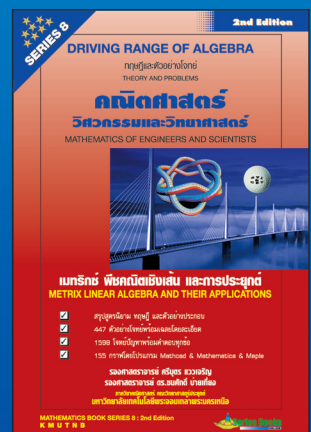
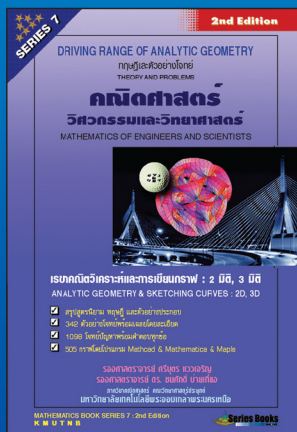
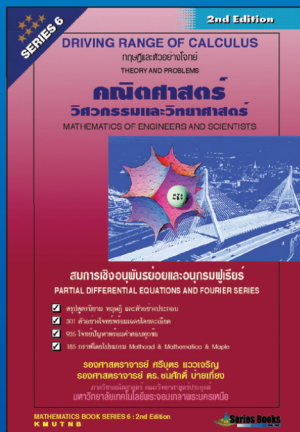
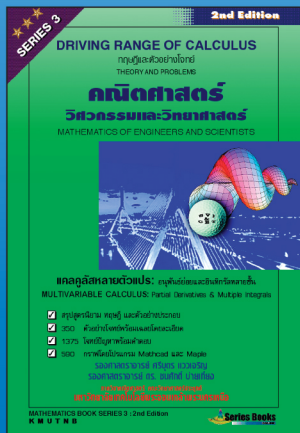
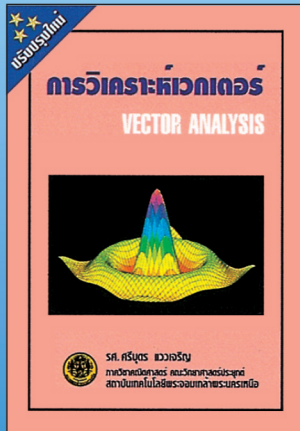


$r = a \cos 2\theta$
(4 กลีบ)



$r = a \sin 2\theta$
(หมุน 45°)

ผลงานของอาจารย์ผู้เขียนทั้งสองท่าน



SERIES 1, 2, 3 และ 7 เหมาะสำหรับนิสิต นักศึกษา ปีที่ 1
SERIES 4, 5, 6 และ 8 เหมาะสำหรับนิสิต นักศึกษา ปีที่ 2

ISBN : 978-616-590-421-6

สงวนลิขสิทธิ์ในประเทศไทย ตาม พ.ร.บ. ลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2521

ห้ามลอกเลียนไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ นอกจากได้รับอนุญาต

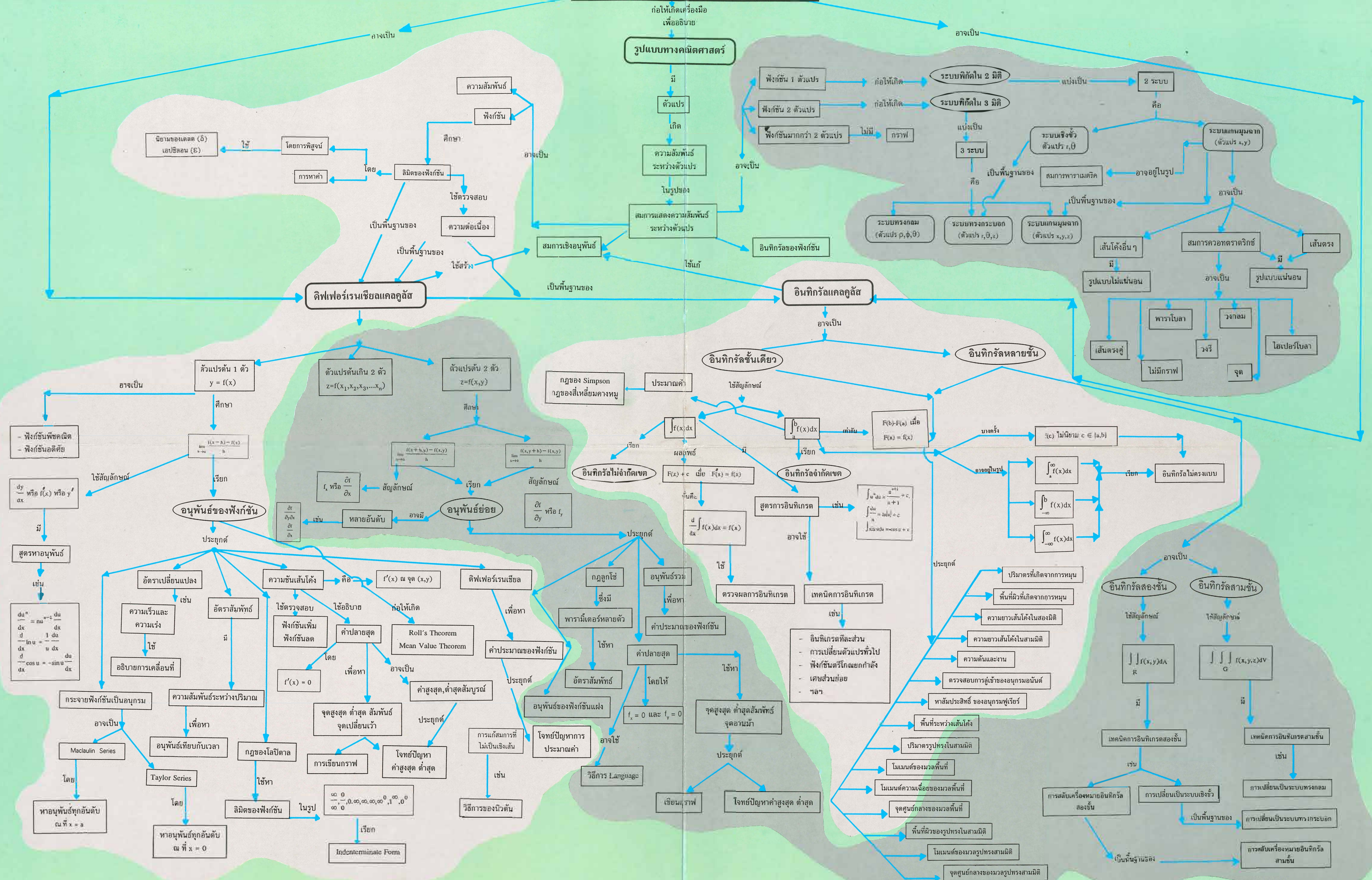
<http://www.kmutnb.ac.th>



9786165904216

อนุพันธ์และการประยุกต์

299.- (7.99 \$)



สูตรอนุพันธ์
(TABLE OF DERIVATIVES)

1. $\frac{d}{dx} c = 0$, c เป็นค่าคงที่
2. $\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
3. $\frac{d}{dx} (u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d}{dx} (uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$, $y = f(u)$, $u = g(x)$
7. $\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$
8. $\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$
9. $\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
10. $\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$
11. $\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
12. $\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$
13. $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
14. $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$
15. $\frac{d}{dx} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
16. $\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
17. $\frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
18. $\frac{d}{dx} \cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
19. $\frac{d}{dx} \cot^{-1} u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
20. $\frac{d}{dx} \csc^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
21. $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$
22. $\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u} \log_a e \frac{du}{dx}$
23. $\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$
24. $\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$
25. $\frac{d}{dx} \tanh u = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$
26. $\frac{d}{dx} \coth u = -\operatorname{csc}^2 u \frac{du}{dx}$
27. $\frac{d}{dx} \operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$
28. $\frac{d}{dx} \operatorname{csc} h u = -\operatorname{csc} h u \coth u \frac{du}{dx}$
29. $\frac{d}{dx} \sinh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}$
30. $\frac{d}{dx} \cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
31. $\frac{d}{dx} \tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}$

สูตรทั่วไป
(GENERAL FORMULAS)

1. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
2. $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$, c เป็นค่าคงที่
3. $\int u dv = uv - \int v du$ (IBP)

สูตรที่จำเป็น
(ESSENTIAL FORMULAS)

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C$
3. $\int e^u du = e^u + C$
4. $\int \sin u du = -\cos u + C$
5. $\int \cos u du = \sin u + C$
6. $\int \tan u du = \ln |\sec u| + C$
7. $\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C$
8. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$
9. $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$
10. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + C$
11. $\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + C$
12. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1} u + C$

สูตรที่มีประโยชน์
(USEFUL FORMULAS)

13. $\int \cot u du = \ln |\sin u| + C$
14. $\int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + C$
15. $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$
16. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$
17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$, $a > 0$
18. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$, $a > 0$
19. $\int \sinh u du = \cosh u + C$
20. $\int \cosh u du = \sinh u + C$
21. $\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$
22. $\int \csc h^2 u du = -\coth u + C$
23. $\int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C$
24. $\int \operatorname{csc} h u \coth u du = -\operatorname{csc} h u + C$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{a+bu}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{a+bu}$)

40. $\int \sqrt{a+bu} du = \frac{2}{15b^3} (3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + C$
41. $\int u^a \sqrt{a+bu} du = \frac{2}{b(2n+3)} \left[u^a (a+bu)^{3/2} - na \int u^{a-1} \sqrt{a+bu} du \right]$
42. $\int \frac{u du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2} (bu-2a)\sqrt{a+bu} + C$
43. $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3} (8a^2+3b^2u^2-4abu)\sqrt{a+bu} + C$
44. $\int \frac{u^3 du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^2\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)} \int \frac{u^{n-1} du}{\sqrt{a+bu}}$
45. $\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}} \right| + C, a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-a}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, a < 0 \end{cases}$
46. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)} \int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$
47. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u} du = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$
48. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2} \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{u^2 \pm a^2}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{u^2 \pm a^2}$)

49. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
50. $\int u \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{1}{3} (u^2 \pm a^2)^{3/2} + C$
51. $\int u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 \pm a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
52. $\int \frac{u^3 du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{u^2 \pm a^2}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} - a^2 \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
53. $\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 \pm a^2} - a \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{u^2 \pm a^2}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{u^2 \pm a^2}$)

54. $\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
55. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
56. $\int \frac{u^3 du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
57. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 \pm a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{u + \sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} \right| + C$
58. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C$
59. $\int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} = \mp \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2 u} + C$
60. $\int (u^2 \pm a^2)^{3/2} du = \frac{u}{8} (2u^2 \pm 5a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
61. $\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \pm \frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{a^2 - u^2}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{a^2 - u^2}$)

62. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
63. $\int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
64. $\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$
65. $\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
66. $\int \frac{u^3 du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
67. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$
68. $\int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$

69. $\int (a^2 - u^2)^{3/2} du = \frac{u}{4} (a^2 - u^2)^{3/2} + \frac{3a^2}{8} u \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
70. $\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + C$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{2au - u^2}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{2au - u^2}$)

71. $\int \sqrt{2au - u^2} du = \frac{u-a}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
72. $\int u \sqrt{2au - u^2} du = \frac{2u^2 - au - 3a^2}{6} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
73. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u} du = \sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
74. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2} du = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
75. $\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
76. $\int \frac{u du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
77. $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u+3a)\sqrt{2au - u^2}}{2} + \frac{3a^2}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
78. $\int \frac{du}{u\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C$
79. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^n} du = \frac{(2au - u^2)^{3/2}}{(3-2n)u^{n-1}} + \frac{n-3}{(2n-3)a} \int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^{n-1}} du$, $n \neq \frac{3}{2}$
80. $\int \frac{u^n du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{u^{n-1}\sqrt{2au - u^2}}{n} + \frac{a(2n-1)}{n} \int \frac{u^{n-1} du}{\sqrt{2au - u^2}}$
81. $\int \frac{du}{u^3 \sqrt{2au - u^2}} = \frac{\sqrt{2au - u^2}}{a(1-2n)u^2} + \frac{n-1}{(2n-1)a} \int \frac{du}{u \sqrt{2au - u^2}}$
82. $\int \frac{u-a}{(2au - u^2)^{3/2}} du = \frac{u-a}{a^2 \sqrt{2au - u^2}} + C$
83. $\int \frac{u du}{(2au - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a\sqrt{2au - u^2}} + C$

อินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
(FORMS CONTAINING TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

84. $\int \sin^2 u du = \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} + C$
85. $\int \cos^2 u du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} + C$
86. $\int \tan^2 u du = \tan u - u + C$
87. $\int \cot^2 u du = -\cot u - u + C$
88. $\int \sec^3 u du = \frac{1}{2} \sec u \tan u + \frac{1}{2} \ln |\sec u + \tan u| + C$
89. $\int \csc^3 u du = -\frac{1}{2} \csc u \cot u + \frac{1}{2} \ln |\csc u - \cot u| + C$
90. $\int \sin^n u du = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u du$
91. $\int \cos^n u du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u du$
92. $\int \tan^n u du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u du$
93. $\int \cot^n u du = \frac{1}{n-1} \cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u du$
94. $\int \sec^n u du = \frac{1}{n-1} \tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u du$
95. $\int \csc^n u du = \frac{1}{n-1} \cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u du$
96. $\int \sin m u \sin n u du = \frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} + C$, $m^2 \neq n^2$
97. $\int \cos m u \cos n u du = \frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} + C$, $m^2 \neq n^2$
98. $\int \sin m u \cos n u du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C$, $m^2 \neq n^2$
99. $\int \sin u du = -\cos u + C$
100. $\int \cos u du = \sin u + C$

อินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
(FORMS CONTAINING INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

101. $\int u^2 \sin u du = 2u \sin u + (2-u^2) \cos u + C$
102. $\int u^2 \cos u du = 2u \cos u + (u^2-2) \sin u + C$
103. $\int u^a \sin u du = -u^a \cos u + n \int u^{n-1} \cos u du$
104. $\int u^a \cos u du = u^a \sin u - n \int u^{n-1} \sin u du$
105. $\int \sin^m u \cos^n u du = -\frac{\sin^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} u \cos^n u du$
 $= \frac{\sin^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m u \cos^{n-2} u du$
 ถ้า $m = -n$ ใช้สูตร 92 หรือ 93
106. $\int \sin^{-1} u du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$
107. $\int \cos^{-1} u du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$
108. $\int \tan^{-1} u du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C$
109. $\int u \sin^{-1} u du = \frac{2u^2-1}{4} \sin^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$
110. $\int u \cos^{-1} u du = \frac{2u^2-1}{4} \cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$
111. $\int u \tan^{-1} u du = \frac{u^2+1}{2} \tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$
112. $\int u^a \sin^{-1} u du = \frac{1}{n+1} \left(u^{n+1} \sin^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right)$, $n \neq -1$
113. $\int u^a \cos^{-1} u du = \frac{1}{n+1} \left(u^{n+1} \cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right)$, $n \neq -1$
114. $\int u^a \tan^{-1} u du = \frac{1}{n+1} \left(u^{n+1} \tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{1+u^2} \right)$, $n \neq -1$

อินทิกรัลของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม
(EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FORMS)

115. $\int u^a e^u du = \frac{1}{a+1} (au-1)e^{au} + C$
116. $\int u^a e^{au} du = \frac{1}{a} u^a e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{a-1} e^{au} du$
117. $\int \frac{e^u}{u^n} du = -\frac{e^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^u}{u^{n-1}} du$
118. $\int \ln u du = u \ln u - u + C$
119. $\int (\ln u)^n du = u(\ln u)^n - n \int (\ln u)^{n-1} du$
120. $\int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \left(\ln u - \frac{1}{n+1} \right) + C$
121. $\int \frac{(\ln u)^n}{u} du = \frac{(\ln u)^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
122. $\int \frac{du}{u \ln u} = \ln |\ln u| + C$
123. $\int u^m (\ln u)^n du = \frac{u^{m+1} (\ln u)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int u^m (\ln u)^{n-1} du$
124. $\int \frac{u^m}{(\ln u)^n} du = -\frac{u^{m+1}}{(n-1)(\ln u)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{u^m}{(\ln u)^{n-1}} du$
125. $\int e^{au} \sin bu du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2} (a \sin bu - b \cos bu) + C$
126. $\int e^{au} \cos bu du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2} (a \cos bu + b \sin bu) + C$

อินทิกรัลของไฮเพอร์โบลิกฟังก์ชัน
(FORMS CONTAINING HYPERBOLIC FUNCTIONS)

127. $\int \sinh u du = \cosh u + C$
128. $\int \cosh u du = \sinh u + C$
129. $\int \tanh u du = \ln \cosh u + C$

อินทิกรัลของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม
(EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FORMS)

130. $\int \coth u du = \ln |\sinh u| + C$
131. $\int \operatorname{sech} u du = \tan^{-1}(\sinh u) + C$
132. $\int \operatorname{csc} h u du = \ln \left| \frac{u}{2} \right| + C$
133. $\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$
134. $\int \operatorname{csc} h^2 u du = -\coth u + C$
135. $\int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C$
136. $\int \operatorname{csc} h u \coth u du = -\operatorname{csc} h u + C$
137. $\int \sinh^2 u du = \frac{\sinh 2u}{4} - \frac{u}{2} + C$
138. $\int \cosh^2 u du = \frac{\sinh 2u}{4} + \frac{u}{2} + C$
139. $\int \tanh^2 u du = u - \tanh u + C$
140. $\int \coth^2 u du = u - \coth u + C$
141. $\int u \sinh u du = u \cosh u - \sinh u + C$
142. $\int u \cosh u du = u \sinh u - \cosh u + C$
143. $\int u^n \sinh u du = u^n \cosh u - n \int u^{n-1} \cosh u du$
144. $\int u^n \cosh u du = u^n \sinh u - n \int u^{n-1} \sinh u du$

อินทิกรัลที่มีเทอม $(a+be^{mu})^{-1}$
(FORMS CONTAINING $(a+be^{mu})^{-1}$)

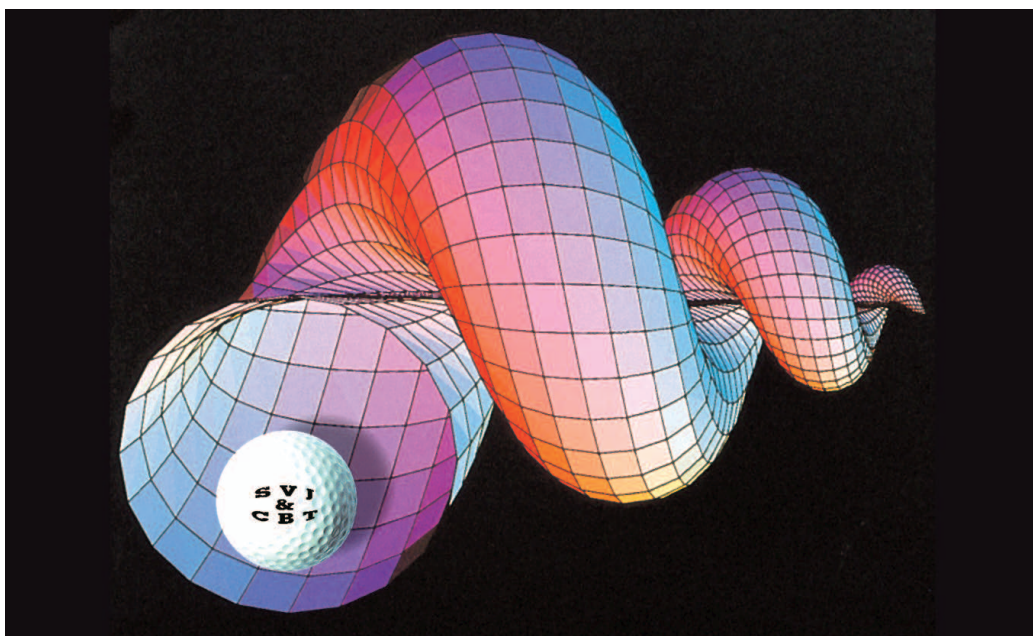
145. $\int \frac{dx}{1+e^x} = \ln \left(\frac{e^x}{1+e^x} \right) = x - \ln(1+e^x) + C$
146. $\int \frac{dx}{a+be^{mx}} = \frac{1}{am} \left[m - \ln(a+be^{mx}) \right] + C$
147. $\int \frac{e^{mx}}{a+be^{mx}} dx = \frac{1}{mb} \ln(a+be^{mx}) + C$



คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรและวิทยาศาสตร์
(MATHEMATICS OF ENGINEER AND SCIENTISTS)

Calculus: e-book:Series 1

อนุพันธ์และการประยุกต์
DERIVATIVES AND ITS APPLICATIONS



รวบรวมและเรียบเรียงโดย

รศ. ศรีบุตร แวเจริญ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

รศ.ดร. ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง

คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ราคา 299 บาท (7.99 USD)

คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรและวิทยาศาสตร์ (MATHEMATICS OF ENGINEER AND SCIENTISTS)

อนุพันธ์และการประยุกต์ DERIVATIVES AND ITS APPLICATIONS

Calculus: e-book:Series 1

ISBN 974-89995-4-8 สำหรับหนังสือ Series 1

ISBN (e-book) 978-616-590-421-6 สำหรับ e-book:Series1 อนุพันธ์และการประยุกต์
สงวนลิขสิทธิ์ในประเทศไทย พ.ร.บ.ลิขสิทธิ์ พศ. 2521

ห้ามลอกเลียนไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ นอกจากได้รับอนุญาต

วันวางจำหน่าย : 19-04-2022

ขนาดไฟล์ : 234 MB

จำนวนหน้า : 670 หน้า

ประเทศ : THAILAND

ประเภทไฟล์ : PDF

ภาษา : Thai

ออกแบบปกและ Artwork ทินพัฒน์ แวเจริญ ภาควิชาสถิติประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

รายละเอียดของผู้เขียนทั้งสองท่าน

จัดทำโดย

รศ.ศรีบุตร แวเจริญ และ รศ.ดร. ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง

ซื้อหนังสือ e-book:Series 1 เล่มนี้

ราคา 299 บาท (7.99 USD)

การสั่งซื้อ e-book:Series 1 สามารถติดต่อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาฯทุกสาขา

รศ. ศรีบุตร แวเจริญ

Tel. 081-904-1608

ID Line sribudh

E-mail : swr@kmutnb.ac.th

รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง

Tel. 081-908-5090

ID Line mala0928

E-mail : chanasak.b@op.kmutnb.ac.th

คำนำ

การเรียนรู้แคลคูลัสกับการเล่นกีฬามีลักษณะคล้ายกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งกีฬากอล์ฟ “ไทเกอร์ วูดส์” นักกอล์ฟสายเลือดลูกครึ่ง ไทย-อเมริกัน ดังระเบิดไปทั่วโลก ด้วยประวัติการเรียนและกีฬากอล์ฟอันเยี่ยมยอด เป็นแชมป์กอล์ฟเยาวชนของสหรัฐหลายสมัย หลังการก้าวเข้าสู่กอล์ฟอาชีพเพียงเวลาไม่กี่เดือน ก็สามารถคว้าแชมป์กอล์ฟรายการใหญ่ได้หลายรายการ ด้วยวัยเพียง 21 ปี ด้านการเรียน มีผลการเรียนดีเยี่ยมสามารถเข้าเรียนในมหาวิทยาลัย ซึ่งเป็นมหาวิทยาลัยท็อปเทนของสหรัฐ ผู้เขียนอยากนำทั้งสองสิ่งมาหล่อหลอมเข้าด้วยกัน เพื่อให้บัณฑิต นักศึกษา และผู้สนใจในวิชาแคลคูลัสได้มองภาพในอนาคตได้เห็นชัดเจนยิ่งขึ้น โดยนำกีฬากอล์ฟมาอธิบายเปรียบเทียบ หนังสือเล่มนี้ได้ตั้งชื่อว่า “ **สนามฝึกซ้อมวิชาแคลคูลัส** ” (Driving Range of Calculus) เช่นเดียวกับกีฬากอล์ฟซึ่งมี **สนามฝึกซ้อมกอล์ฟ** (Driving Range of Golf) ก่อนที่จะเข้าสนามฝึกซ้อมคงต้องศึกษานิยามทฤษฎี และคุณสมบัติต่างๆ จากห้องเรียนจนเข้าใจดีพอ แล้วจึงนำหนังสือเล่มนี้มาฝึกฝนให้เกิดความเข้าใจให้ดียิ่งขึ้น

หนังสือเล่มนี้ได้ใช้เทคโนโลยีสมัยใหม่ มาช่วยทำให้รูปแบบของหนังสือดีมีคุณค่ายิ่งขึ้น โดยใช้โปรแกรม **Mathcad** **Maple** และ **Mathematica** ซึ่งทำให้ผู้อ่านหนังสือเล่มนี้ สามารถมองเห็นโจทย์ปัญหานั้นๆ ได้เป็นรูปธรรมมากขึ้น

แคลคูลัสเป็นวิชาที่สำคัญวิชาหนึ่งของสาขาคณิตศาสตร์ และเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพัฒนานำไปใช้ประยุกต์ในสาขาวิชาต่างๆ ของนักวิทยาศาสตร์และวิศวกร ก่อนที่จะนำไปประยุกต์ ใช้ได้ดี นิสิตนักศึกษา จำเป็นต้องศึกษาวิชาพื้นฐานให้เข้าใจถ่องแท้ก่อน จากประสบการณ์ด้านการสอนมาเกือบ 40 ปี ในสถาบันแห่งนี้ และเป็นอาจารย์พิเศษมหาวิทยาลัยอีกหลายแห่ง จึงได้รวบรวมเขียนออกมาเป็น**แผนที่วิชาแคลคูลัสพื้นฐาน** (Calculus Concept Maps) ตามที่นำเสนอในปกหลังด้านในของหนังสือเล่มนี้นั้น ผู้เขียนได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น **e-Book:Series 1-8** โดยแต่ละ **Series** จะมีเนื้อหาความสัมพันธ์กันเกี่ยวข้องกันอยู่ตลอดเวลา ดังนั้น การศึกษาวิชาแคลคูลัสจำเป็นต้องมีพื้นฐานของคณิตศาสตร์ **e-Book:Series** ต้นๆ อยู่ตลอดเวลา

ทางด้านกีฬากอล์ฟนั้นผู้เขียนได้มีโอกาสรับการฝึกอบรมจากคุณครูกอล์ฟ **Bell Penny** (Head Professional-Class A C.P.G.A.) จากโรงเรียนการศึกษากอล์ฟไทย ซึ่งเป็นโรงเรียนกอล์ฟแห่งแรกของประเทศไทย เมื่อปี 1994 ทำให้ผู้เขียนได้เกิดแนวคิดที่จะนำทั้งสองเรื่องนี้ คือ แคลคูลัสและกอล์ฟมา

ผนวกเข้าด้วยกัน ซึ่งมีหลายๆสิ่งสามารถนำมาเปรียบเทียบให้นิสิต นักศึกษา ได้มองเห็นภาพการศึกษา แคลคูลัสได้ดียิ่งขึ้นในกีฬากอล์ฟนั้นเราแบ่งไฟท์ออกเป็น 3 ไฟท์ เรียงลำดับตามความสามารถได้ดังนี้ คือ ไฟท์ C มือใหม่ (Beginner) , ไฟท์ B มือสมัครเล่น (Amateur) , ไฟท์ A มืออาชีพ (Professional)

การเล่นกอล์ฟนั้น ในการออกรอบ 1 รอบ หรือตีจนครบ 18 หลุมนั้น ต้องใช้ความอดทนความพยายามมีจิตใจที่มุ่งมั่นการเล่นกอล์ฟจะต้องแก้ปัญหาเฉพาะหน้าตลอดเวลาและรูปแบบของปัญหานั้นเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอผู้เล่นต้องคิดแก้ปัญหาด้วยตัวเองบนพื้นฐานของประสบการณ์ที่มีอยู่ เมื่อถึงจุดหนึ่งผู้เล่นที่มีพื้นฐานและการฝึกซ้อมดีพอผู้เล่นจะสามารถแก้ปัญหาเฉพาะหน้าได้เสมอ โดยที่ผู้เล่นจะต้องนำปัจจัยหลายๆ อย่างมาช่วยในการคิดแก้ปัญหา

ในวิชาแคลคูลัสก็เช่นเดียวกัน เป็นวิชาที่ต้องใช้คณิตศาสตร์หลายๆ ด้านมาประกอบกัน เพื่อช่วยในการคิดแก้ปัญหา ผู้เขียนจึงได้เขียนปูพื้นตั้งแต่เริ่มต้น ตั้งแต่ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแต่เจาะลึกลงไปในแต่ละเรื่องมากกว่าเดิม นักศึกษาที่พื้นฐานยังไม่ดีพอจึงเปรียบเสมือนนักกอล์ฟมือใหม่ ต้องฝึกทำโจทย์ตั้งแต่ต้นในเรื่องพื้นฐานจนเกิดความเข้าใจก่อน จึงจะเริ่มศึกษา

ในเนื้อหาของวิชาแคลคูลัสได้ เมื่อผู้เรียนฝึกซ้อมจนเข้าใจแล้วจึงจะถือว่าอยู่ในระดับมือสมัครเล่น และนักศึกษาจะต้องทำการฝึกฝนต่อไปอีกจนเกิดความเข้าใจ จึงจะถือว่านักศึกษาจัดอยู่ในขั้นระดับมืออาชีพ จึงจะสามารถศึกษาในขั้นประยุกต์ได้ ในตำราชุดนี้เปรียบเสมือนสนามฝึกซ้อม มีโจทย์ตัวอย่างมากมายเพียงพอที่จะทำให้นักศึกษาพัฒนาตนเองอยู่ในขั้นมืออาชีพได้อย่างสบาย

หนังสือคณิตศาสตร์ วิศวกรรม Series 1 ก่อนที่จะทำเป็น e-book:Series 1 ได้ปรับปรุงมาแล้ว4ครั้ง โดยทำการปรับปรุงจากหนังสือคณิตศาสตร์ วิศวกรรมSeries1จะเน้นในเรื่องอนุพันธ์ และการประยุกต์ โดยปรับปรุงจากการจัดพิมพ์ครั้งแรกในปี 2541 มีการเพิ่มเนื้อหาและรูปภาพของฟังก์ชันอีกมากมาย รวมทั้งรูปเล่ม ตัวหนังสือเป็นสีน้ำเงินเพื่อให้ดูชัดเจนและสวยงามนอกจากนี้ผู้เขียนได้เพิ่มตัวอย่างพร้อมแสดงวิธีทำโดยละเอียดที่น่าสนใจจากเดิมรวมตัวอย่างโจทย์เป็น 589 ตัวอย่าง และเพิ่มโจทย์ปัญหาพร้อมคำเฉลย เป็น 1,612 ข้อ และใช้โปรแกรม Maple วาดกราฟ ทั้งหมดเป็น 478 รูป เพื่อให้นักศึกษาได้เห็นเป็นรูปธรรมนามธรรมยิ่งขึ้น และเกิดความเข้าใจลึกซึ้งโดยดูจากกราฟของฟังก์ชันจริง โดยเฉพาะอย่างยิ่งในส่วนเฉลยคำตอบเดิมได้ย่อหน้าให้เหลือ 50% ทำให้คำเฉลยดูไม่ชัดเจน ผู้เขียนได้ขยายเป็น 100% เพื่อให้ผู้อ่านได้ตรวจคำตอบได้สะดวกขึ้น จากการเพิ่มข้อมูลต่างๆ ทำให้จำนวนหน้าเพิ่มขึ้นอีกมากกว่าเดิม 560 หน้า เป็น 680 หน้า นักศึกษาได้ฝึกทบทวนเนื้อหาและทดลองทำแบบฝึกหัดในลักษณะต่างๆทำให้เกิด

ความรู้ความเข้าใจในทฤษฎีให้ต้องแท้ อันจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญต่อการเรียนการสอน และการทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพในอนาคต ถ้าจะให้หนังสือเล่มนี้เปรียบเทียบกับกีฬากอล์ฟผู้เขียนตั้งใจจะให้เป็นอย่างเดียวกับสนามฝึกซ้อมกอล์ฟ (Driving Range) ถ้าใครเข้าสนามฝึกซ้อมมากก็จะทำให้พัฒนาดียิ่งขึ้น แล้วจะส่งผลให้นิสิต-นักศึกษา ข้อสอบกลางภาค (Midterm) และสอบปลายภาค (Final) ด้วยความมั่นใจ เช่นเดียวกับนักกอล์ฟที่มีความพร้อม และมีความเชื่อมั่นที่ลงสนามแข่งขัน และได้รับรางวัลให้กับตนเองในที่สุด

ผู้เขียนขอกราบขอบคุณ คุณครู-อาจารย์ ทุกท่าน ตั้งแต่ประถมจนถึงมหาวิทยาลัยที่ได้ประสิทธิภาพให้ ขอกราบขอบคุณทุกท่านที่ได้ให้การสนับสนุนหนังสือตั้งแต่ **e-book:Series 1** ถึง **e-book:Series 8** ขอขอบคุณเพื่อนร่วมงานทุกคนที่ได้คอยให้กำลังใจและให้คำแนะนำด้วยดีมาตลอด ขอขอบคุณคุณฉัตรสุมาลย์ ลากเวธิ ที่ทุ่มเทช่วยพิมพ์ต้นฉบับให้เป็นอย่างดีและขอบคุณนักศึกษาของภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ได้ช่วยตรวจต้นฉบับให้เป็นอย่างดี และที่สำคัญที่สุดขอขอบคุณและขอใจ ภรรยา และลูกๆ ของผู้เขียนทั้งสอง: คุณยุพิน แวเวจริญ ลูกแพรวและลูกเพชร คุณวงษ์เดือน บ่ายเที่ยง ลูกต๋มและลูกดี ที่ได้ให้กำลังใจในการเขียนมาตลอดและเป็นผู้อยู่เบื้องหลังของความสำเร็จในการจัดทำ นี้

หนังสือ **e-book:Series 1** อนุพันธ์และการประยุกต์ ปรับปรุงใหม่เล่มนี้จะไม่สามารเกิดขึ้นได้ ถ้าไม่มีทีมงานของคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ ในภาควิชาคณิตศาสตร์และนักศึกษาของภาควิชาคณิตศาสตร์ทั้งในอดีตและปัจจุบัน ดังเช่น นส.อุมารัตนเทพี (MA12) ที่ช่วยพิมพ์ต้นฉบับและช่วยคำนวณคำตอบและวาดกราฟของคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยโปรแกรม Maple นายเวกิน พุทธิระโชติ (MA14) ที่ช่วยตรวจต้นฉบับอย่างละเอียดทุกบท นส. บุญผา จิตรโสม (MA20) ที่ทุ่มเทเวลาช่วยพิมพ์ต้นฉบับให้เป็นอย่างดียิ่งท้ายสุดนี้ขอขอบใจ นาย ทินพัฒน์ แวเวจริญ (AS 23) ของ มจพ. (KMUTNB) ที่ช่วยออกแบบปก และ Artwork ของ **e-book:Series 1** เล่มนี้ทั้งหมด

ผู้เขียนหวังว่าหนังสือประกอบการเรียนเล่มนี้ คงจะเป็นประโยชน์ต่อนิสิต นักศึกษา ในสถาบันอุดมศึกษาต่างๆ บ้างตามสมควร หากพบข้อบกพร่องที่ควรแก้ไขในหนังสือเล่มนี้ กรุณาเสนอแนะให้ผู้เขียนทราบด้วย จักเป็นพระคุณยิ่ง ขอให้แฟนพันธ์แท้และผู้สนใจคอยติดตาม **e-book:Series 2** ต่อไป

คุณความดีและคุณประโยชน์ทั้งหลายทั้งปวง ขอมอบให้บิดา – มารดา ครู-อาจารย์ ของผู้เขียนทั้งสอง

รศ. ศรีบุตร แวเวจริญ

รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง

คำนิยม

ท่านผู้ค้นหนังสือ e-book:Series 1 เล่มนี้ทุกท่าน ผมเป็นคนหนึ่งที่ได้ใกล้ชิดและเห็นการทำงาน แนวความคิดและการทำหนังสือของรองศาสตราจารย์ศรีบุตร แวเจริญ และ รองศาสตราจารย์ ดร.ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง มาโดยตลอด ท่านทั้งสองได้เขียนหนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ e-book:Series ออกมา 8 เล่ม อย่างต่อเนื่องและมีการปรับปรุงเนื้อหาใหม่ในหนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ทั้ง 8 เล่ม โดยมีการเพิ่มเติมรูปภาพประกอบโจทย์ปัญหาให้เห็นเป็นรูปธรรมและนำเอาโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ Maple , Mathcad มาช่วยในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์

ผมเห็นความมุ่งมั่น ตั้งใจของท่านอาจารย์ทั้งสองท่าน คือความสำเร็จที่ยิ่งใหญ่ ที่จะช่วยประเทศไทย แก้ปัญหาการขาดแคลนหนังสือ จากจุดเริ่มต้นดังกล่าว ท่านตั้งใจจะทำหนังสือ e-book:Series 1 เพื่อศิษย์ ทำให้หนังสือไม่เพียงใช้เรียนในชั้นเรียนแต่กลับใช้เรียนเสมือนบนเว็บที่มีรูปภาพ 4 สี คำอธิบายและโปรแกรมครบทุกส่วน ทำให้ผู้เรียนขยายวงกว้างจากนักเรียนในชั้นเรียน สู่ นักเรียนนอกชั้นเรียนหลายสาขา อาชีพ ตอบสนองต่อยุทธศาสตร์ การพัฒนาประเทศด้านการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ เกิดการเรียนรู้ที่สนับสนุนต่อสังคม การมีการเรียนรู้อย่างต่อเนื่องตลอดชีวิต

นับเป็นภาระกิจของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มจพ.ที่ต้องผลิตหนังสือและตำราวิชาการเป็นบริการความรู้แก่สังคม ตามปรัชญาของมหาวิทยาลัยที่ว่า “พัฒนาคน พัฒนาศาสตร์และเทคโนโลยี” และในฐานะของผู้บริหารภาควิชาคณิตศาสตร์ ต้องขอขอบคุณอาจารย์ทั้งสองท่านที่ปรับปรุงหนังสือ Series 1 อนุพันธ์และการประยุกต์ เป็น e-book:Series 1 อนุพันธ์และการประยุกต์ (คณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์) ซึ่งนับเป็นบริการด้านสติปัญญาอีกเล่มหนึ่งที่ภาควิชาคณิตศาสตร์ภูมิใจมอบให้แก่สังคม

ขอบคุณครับ



รองศาสตราจารย์ ดร.เสนอ คุณประเสริฐ

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

แถมฟรี

e-book:Series 1 เล่มนี้ ผู้เขียนได้มอบแผ่นพับขนาด A3 รูป 4 สีสวยงามจำนวน

2 แผ่นที่จะเป็นประโยชน์กับนักศึกษาและผู้สนใจวิชา CALCULAS เป็นอย่างดี

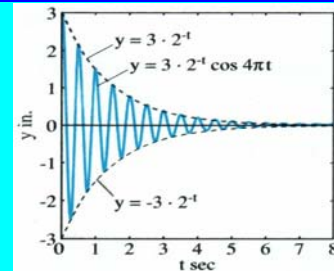
1. CALCULUS CONCEPT MAPS

2. FORMULA TABLES OF DERIVATIVES AND INTEGRALS

สารบัญ Series 1

บทที่ 1

บทนำ (INTRODUCTION)



1.1 แคลคูลัสคืออะไร (What is Calculus)

1-102

สัญลักษณ์และสูตรจากคณิตศาสตร์มูลฐาน

(Notation and Formulus from Elementary Mathematics)

1.3 การหาคำตอบของอสมการ (Solving Inequalities)

1.4 ระนาบพิกัด ; เรขาคณิตวิเคราะห์

(Coordinate Plane ; Analytic Geometry)

1.5 ฟังก์ชัน (Functions)

1.6 ฟังก์ชันมูลฐาน (The Elementary Functions)

1.7 ผลรวมของฟังก์ชัน (Combination of Functions)

1.8 ฟังก์ชันผกผัน (Inverse of Functions)

1.9 ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

(Exponential and Logarithmic Functions)

1.10 ฟังก์ชันของจำนวนเต็มที่ยิ่งใหญ่และน้อยที่สุด

(The Greatest and The Least Integer Functions)

1.11 ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกและฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน

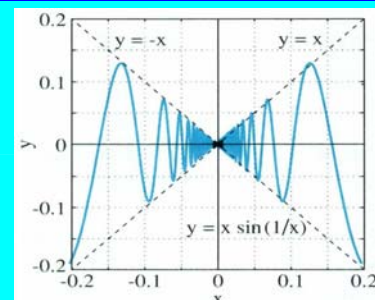
(Hyperbolic and Inverse Hyperbolic Functions)

1.12 อุปนัยทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction)

บทที่ 2

ลิมิตและความต่อเนื่อง

(LIMITS AND CONTINUITY)



2.1 แนวความคิดของลิมิต (The Idea of Limit)

103-237

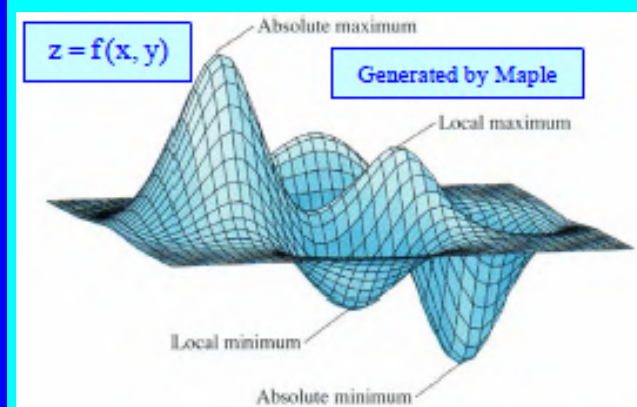
2.2 นิยามของลิมิต (Definition of Limit)

2.3 กฎของการหาลิมิต (Rules for Finding Limits)

- 2.4 ลิมิตที่อนันต์และเส้นกำกับ
(Infinite Limits , Limits at Infinity ,Vertical and Horizontal Asymptotes)
- 2.5 ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
(Limit of Trigonometric Functions)
- 2.6 ความต่อเนื่อง (Continuity)
- 2.7 ทฤษฎีเกี่ยวกับความต่อเนื่อง
(Theorem for Continuous Functions)

บทที่ 3

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (DERIVATIVES)



- 3.1 นิยามของอนุพันธ์
(Definition of Derivatives) 238-448
- 3.2 กฎการหาอนุพันธ์
(Differentiation Rules)
- 3.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
(Higher Order Derivatives)
- 3.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
(Derivatives of Trigonometric Functions)
- 3.5 กฎลูกโซ่
(The Chain Rule)
- 3.6 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม
(Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions)
- 3.7 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณผกผัน
(Derivatives of Inverse Trigonometric Functions)
- 3.8 อนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกและฟังก์ชันผกผัน
(Derivatives of Hyperbolic and Inverse Hyperbolic Functions)
- 3.9 การหาอนุพันธ์โดยปริยาย
(Implicit Differentiation)

3.10 ความชันของเส้นโค้งที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริม
(Slope of Parametric Equations)

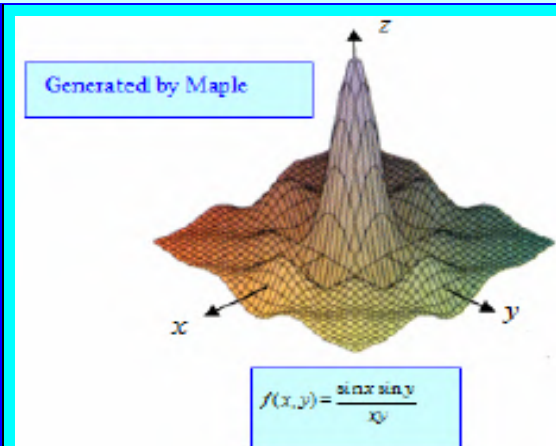
3.11 รูปแบบยังไม่กำหนดและกฎของโลปีตาล
(Indeterminate Forms and L'Hopital's Rule)

3.12 ระเบียบวิธีของนิวตัน
(Newton's Method)

3.13 ผลต่างอนุพันธ์
(Differential)

บทที่ 4

การประยุกต์ของอนุพันธ์ (Application of Derivatives)



4.1 อัตราการเปลี่ยนแปลง การเคลื่อนที่เชิงเส้นตรง , ความเร็ว , ความเร่ง
(Rate of Change , Linear Motion , Velocity and Acceleration)

449-608

4.2 ความชันของเส้นสัมผัส , สมการเส้นสัมผัส , สมการเส้นปกติ
และมุมตัดกันของเส้นโค้งสองเส้น
(Slope of a Tangent Line , Tangent Line , Normal Line
and Angle Between Two Curves)

4.3 อัตราสัมพันธ์ (Related Rates)

4.4 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด (Maximum and Minimum Value) การประยุกต์
ค่าสูงสุด และค่าต่ำสุด (Application of Maximum and Minimum Value)

4.5 ผลต่างอนุพันธ์ (Differential)

เฉลยแบบฝึกหัด (Solution)

609-679

บรรณานุกรม

บทที่ 1

บทนำ

(Introduction)

เป็นนักคณิตศาสตร์
 ครึ่ง Swiss- German
 เป็นคนแรกที่ได้ศึกษา
 ฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก
 อย่างละเอียด มีชีวิต
 ในช่วง 1728 - 1777
 เขาเป็นคนหนึ่ง
 ที่ทำงานของ Euler



JOHNN HEINRICH LAMBERT

Calculus!

a system

for making

calculations

about

quantities

which are

continually

changing

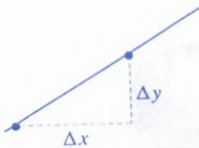
* 1.1 แคลคูลัสคืออะไร (What is Calculus?) *

แคลคูลัส เป็นระบบในการคำนวณปริมาณซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง ในศตวรรษที่ผ่านมาคำว่า “Calcularre” จะหมายถึง การคำนวณ (to comput) หรือการประมาณหรือคาดการณ์เหตุการณ์ที่อยู่ในลักษณะเสี่ยง (to rocken) สำหรับนักคณิตศาสตร์ นักวิทยาศาสตร์ในปัจจุบัน คำว่า Calculus เป็นคณิตศาสตร์มูลฐาน (พีชคณิต เรขาคณิต ตรีโกณมิติ) ที่เสริมโดยกระบวนการของลิมิต (Limit Process)

แคลคูลัสเป็นแนวคิดที่เริ่มต้นจากคณิตศาสตร์มูลฐานและขยายความคิดไปยังสถานการณ์ต่างๆ ไปต่อเป็นตัวอย่างเปรียบเทียบ การขยายแนวคิดจากคณิตศาสตร์พื้นฐานไปเป็นแคลคูลัสสามารถแสดงให้เห็นได้ดังตารางเปรียบเทียบต่อไปนี้

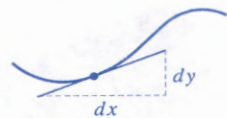
คณิตศาสตร์มูลฐาน (Elementary Mathematics)

แคลคูลัส (Calculus)



ความชันของเส้นตรง

$$y = mx + c$$



ความชันของเส้นโค้ง

$$y = f(x)$$



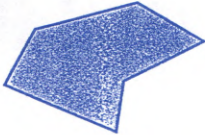
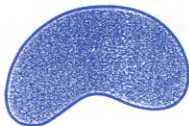
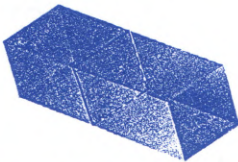
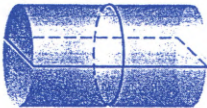
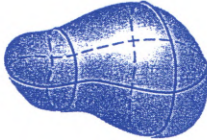
เส้นสัมผัสของวงกลม

(Tangent Line to a Circle)



เส้นสัมผัสของเส้นโค้งทั่วไป

(Tangent Line to a General Curve)

คณิตศาสตร์มูลฐาน (Elementary Mathematics)	แคลคูลัส (Calculus)
 ความเร็วเฉลี่ย (Average Velocity) ความเร่งเฉลี่ย (Average Acceleration)	 ความเร็วชั่วขณะ (Instantaneous Velocity) ความเร่งชั่วขณะ (Instantaneous Acceleration)
 พื้นที่ของบริเวณปิดล้อมรอบด้วยส่วนของเส้นตรง (Area of a Region bounded by Line Segments)	 พื้นที่ของบริเวณปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง (Area of a Region bounded by Curves)
$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S$ ผลรวมของหมู่ของจำนวนจำกัด (Sum of a Finite Collection of Numbers)	$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = S$ ผลรวมของอนุกรมอนันต์ (Sum of an Infinite Series)
 ความยาวของส่วนของเส้นตรง (Length of a Line Segment)	 ความยาวของส่วนของเส้นโค้ง (Length of a Curve)
 ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก (Volume of a Rectangular Solid)	 ปริมาตรของรูปทรงตันที่เส้นโค้งเป็นขอบ (Volume of a Solid with a Curved Boundary)
 พื้นที่ผิวของทรงกระบอก (Surface Area of a Cylinder)	 พื้นที่ผิวของรูปทรงตันทั่วไป (Surface Area of a more General Solid)

คณิตศาสตร์มูลฐาน (Elementary Mathematics)

แคลคูลัส (Calculus)



ระนาบสัมผัสของทรงกลม
(Tangent Plane to a Sphere)



ระนาบสัมผัสของพื้นผิวทั่วไป
(Tangent Plane to a more General Surface)



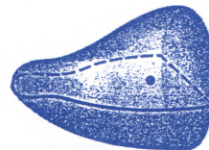
การเคลื่อนที่ตามแนวเส้นตรงด้วยความเร็วคงที่
(Motion along a Straight Line with a Constant Velocity)



การเคลื่อนที่ตามส่วนของเส้นโค้งด้วยความเร็วแปรผัน
(Motion along a curved Parth with Varying Velocity)



จุดศูนย์กลางของทรงกลม
(Center of a Sphere)



จุดศูนย์กลางของมวลของรูปทรงตันทั่วไป
(Center of Gravity of a More General Solid)

อย่างไรก็ตาม เราได้ยกย่องและให้เครดิตกับบุคคล 2 ท่านที่ถือได้ว่าเป็นผู้เริ่มต้นแนวคิดเกี่ยวกับแคลคูลัส ได้แก่ Sir Isaac Newton (1642-1727) ซึ่งเป็นชาวอังกฤษได้เริ่มต้นศึกษา เมื่อ คศ. 1665 และส่งผลงานตีพิมพ์ เมื่อ คศ. 1672 แต่ได้รับการตีพิมพ์ เมื่อ คศ. 1736 (9 ปี หลังจากที่ท่านเสียชีวิต) และอีกท่านหนึ่งได้แก่ Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) เริ่มต้นศึกษาเมื่อ คศ. 1673 หลังนิติน 8 ปี และในปี คศ. 1675 เขาได้เป็นคนกำหนดสัญลักษณ์ dx และ $\int$ งานของท่านได้รับการตีพิมพ์ เมื่อ คศ. 1684 และ 1686

❖ 1.2 สัญลักษณ์และสูตรจากคณิตศาสตร์มูลฐาน ❖

(Notation and Formulas From Elementary Mathematics)

	เซต (Sets) เซต หมายถึง หมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกันอย่างแจ่มชัด สิ่งของแต่ละสิ่งประกอบกันเข้าเป็นเซตใดเซตหนึ่ง เรียกว่า สมาชิก (Elements or Members of the Set) อักษรตัวใหญ่ A, B, C, . . . ใช้แทนสัญลักษณ์เซตและใช้อักษรตัวพิมพ์เล็ก a, b, c, . . . แทนสัญลักษณ์สมาชิกของเซต
สัญลักษณ์	1. $x \in A$ x อยู่ในเซต A 2. $x \notin A$ x ไม่อยู่ในเซต A 3. $\{x \mid p\}$ เซตของ x ทั้งหมดซึ่งมีคุณสมบัติ p เช่น $A = \{x \mid x \text{ เป็นสระในภาษาอังกฤษ} \} = \{a, e, i, o, u\}$ 4. $A \subseteq B$ A เป็นสับเซตของ B 5. $A \cup B$ ส่วนรวมของ A และ B (The Union of A and B) $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$ 6. $A \cap B$ ส่วนร่วมของ A และ B (The Intersection of A and B) $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$ 7. $\emptyset$ เซตว่าง (The Empty Set) หมายถึง เซตที่ไม่มีสมาชิกใดๆ เป็นสมาชิกของเซตนั้นเลย
จำนวนจริงและเส้นจำนวนจริง (Real Numbers and The Real Line)	
ในส่วนนี้จะทบทวนจำนวนจริง อสมการ ช่วงและค่าสัมบูรณ์ เราศึกษาแคลคูลัสบนฐานคุณสมบัติของระบบจำนวนจริง ระบบจำนวนจริงประกอบด้วยเซตของจำนวนจริง รวมถึงการกระทำเลขคณิต ; บวก , ลบ , คูณ , หาร และรวมถึงคุณสมบัติต่างๆ ซึ่งจะกล่าวโดยสรุปดังต่อไปนี้ เราแบ่งแยกจำนวนจริง (R) ออกเป็นประเภท ๆ (Classification) ดังนี้ จำนวนธรรมชาติหรือจำนวนเต็มบวก $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ (Natural Numbers or Positive Integers) จำนวนเต็ม (Integers) $I = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ จำนวนตรรกยะ (Rational Numbers) $Q = \{x \mid x = \frac{p}{q} \text{ เมื่อ } p, q \text{ เป็นจำนวนเต็มและ } q \neq 0\}$	

บทที่ 2

PETER GUSTOV DITRICHLET

การพัฒนา calculus ในระยะ
เริ่มแรก การนิยามความหมาย
ของฟังก์ชันยังมีข้อจำกัด เช่น
Dirichlet function จะไม่อยู่
ในนิยามในระยะแรก ความ
หมายของ ฟังก์ชันจึงถูกพัฒนา
ขึ้นใหม่ โดย Peter Gustov
Dirichlet ซึ่งเป็นนักคณิต-
ศาสตร์ ชาวเยอรมันมีชีวิตอยู่
ในช่วง ค.ศ. 1805-1859



ลิมิตและความต่อเนื่อง (Limit and Continuity)

ลิมิตเป็นหัวใจสำคัญของแคลคูลัส ดังคำกล่าวที่ว่า “ถ้าไม่มีลิมิต แคลคูลัสคงจะ
เกิดขึ้นไม่ได้ เราจะพบว่าทุกๆ สัญลักษณ์เชิงเดี่ยว (Single Notation) ของแคลคูลัส มี
สัญลักษณ์ลิมิตในแง่ใดแง่หนึ่งอยู่เสมอ เช่น

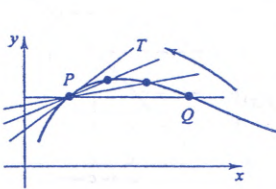
ความเร็วชั่วขณะ เป็นลิมิตของความเร็วเฉลี่ย

ความชันของเส้นโค้ง เป็นลิมิตของความชันของส่วนของเส้นตรง ดังรูป 2.1

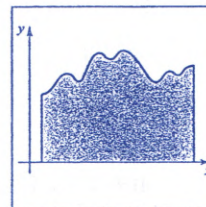
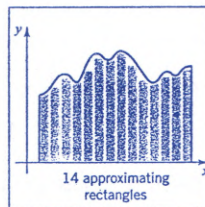
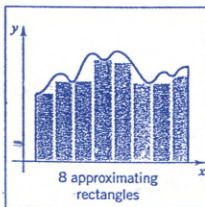
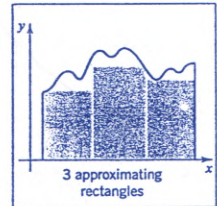
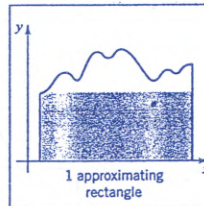
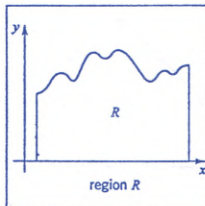
ความยาวของเส้นโค้ง เป็นลิมิตของความยาวเป็นเส้นทางของรูปหลายเหลี่ยม

ผลรวมของอนุกรมอนันต์ เป็นลิมิตของอนุกรมจำกัด

พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง เป็นลิมิตของผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุม
ฉากที่ใช้ในการประมาณ ดังรูป 2.2



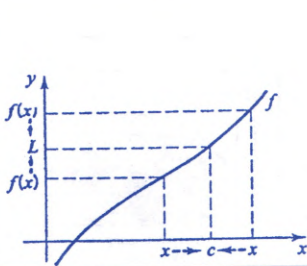
รูป 2.1



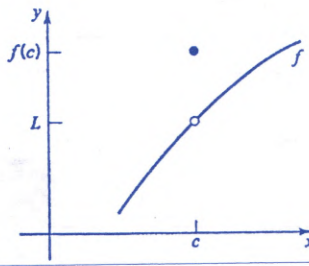
รูป 2.2

2.1 แนวคิดเกี่ยวกับลิมิต (The Idea of Limit)

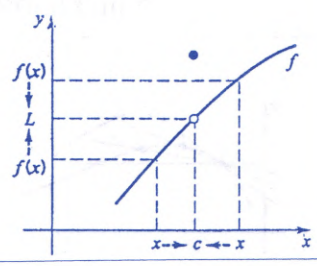
นิยาม 2.1 Informal Definition of Limit	กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน และ c เป็นค่าคงที่ซึ่งทำให้ f นิยาม ณ ค่า x บริเวณใกล้ๆ c แต่ไม่จำเป็นต้องนิยาม ณ x ที่ c ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้ค่าคงที่ L สำหรับทุกๆ x ที่เข้าใกล้ c เราจะกล่าวว่า L เป็นลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ c และจะเขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ 2.1
ข้อสังเกต	1. จากนิยามแนวคิดเกี่ยวกับลิมิตอาจจะแสดงออกมาโดยกราฟได้ ดังเช่นรูปที่ 2.3 เส้นโค้งแทนกราฟของฟังก์ชัน f จำนวนคงที่ c ปากกวนแกน x ลิมิต L ปากกวนแกน y ขณะที่ x เข้าใกล้ c ตามแกน x จะพบว่า $f(x)$ เข้าใกล้ L ตามแกน y 2. ในการคำนวณค่าลิมิต เมื่อ x เข้าใกล้ c ไม่จำเป็นต้องนิยามที่ c (หาค่าได้ที่ c) เนื่องจากเราคำนึงแต่เพียงว่า ค่าของฟังก์ชัน f มีค่าอย่างไร เมื่อ x ใกล้ๆ c เท่านั้น ดังแสดงในรูป 2.4 กราฟของ f ขาดตอนที่ c ถึงอย่างไรก็ตามก็ยังสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ดังรูป 2.5



รูป 2.3

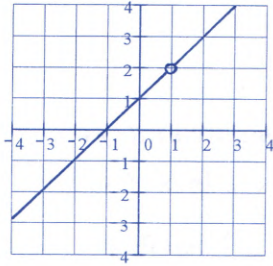


รูป 2.4

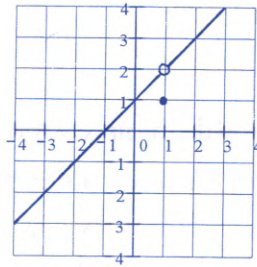


รูป 2.5

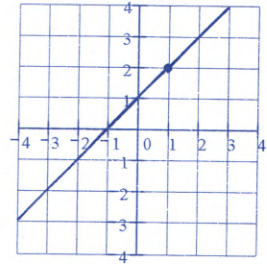
ตัวอย่าง 2.1 The Limit values does not depend on how the function is defined at c	กำหนดให้ $(1) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ $(2) g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ $(3) h(x) = x + 1$ มีกราฟดังแสดงในรูป 2.6 ก-ค จากทั้งสามรูป เราพบว่า $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$ □
---	---



รูป 2.6 ก.



รูป 2.6 ข.



รูป 2.6 ค.

ตัวอย่าง 2.2

Limit may fail
to exist

จงพิจารณาลักษณะของลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ $x \rightarrow 0$

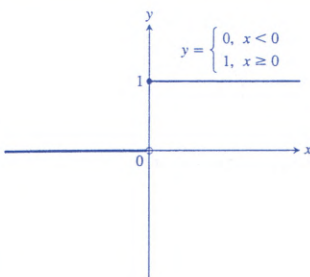
$$(1) U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2) g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (3) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

ดังแสดงในรูป 2.7 ก-ค

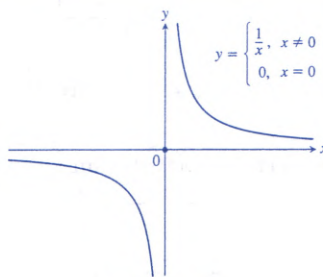
วิธีทำ (1) $U(x)$ ไม่มีลิมิต เมื่อ $x \rightarrow 0$ เพราะว่า ค่าของ $U(x)$ มีการกระโดดที่ $x = 0$ อยู่ 2 ค่า คือ 0 และ 1 ดังรูป 2.7.ก.

วิธีทำ (2) $g(x)$ ไม่มีลิมิต เมื่อ $x \rightarrow 0$ เพราะว่าค่าสัมบูรณ์ของ $g(x)$ มีค่ามากขึ้นอย่างไม่จำกัด เมื่อ $x \rightarrow 0$ โดยไม่เข้าใกล้ค่าจำนวนจริงใดๆ เลย ดังรูป 2.7.ข.

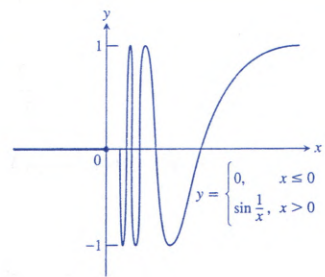
วิธีทำ (3) $f(x)$ ไม่มีลิมิต เมื่อ $x \rightarrow 0$ เพราะว่าค่าของฟังก์ชันมีการแกว่งอยู่ระหว่าง +1 และ -1 ทุกๆ ช่วงเปิด ซึ่งมี 0 อยู่ในช่วงเปิดนั้น ค่าของฟังก์ชันจะไม่เข้าสู่จำนวนเพียงจำนวนเดียว ดังรูป 2.7.ค. □



ก.



รูป 2.7 ข.



ค.

ตัวอย่าง 2.3

กำหนดให้ $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ และให้ $c = 2$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$

ถ้า x เข้าใกล้ 2 แล้ว $2x^2$ เข้าใกล้ 8 , $3x$ เข้าใกล้ 6 และ $2x^2 - 3x + 5$ เข้าใกล้ $8 - 6 + 5 = 7$ ดังรูป 2.8 □

ตัวอย่าง 2.4

จงพิจารณาลักษณะของลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ $x \rightarrow 3$ และค่าของฟังก์ชัน f ที่ $x = 3$

เมื่อ $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

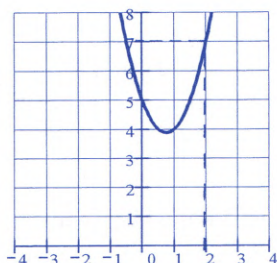
วิธีทำ ค่าของฟังก์ชัน f หาค่าไม่ได้ เมื่อ $x = 3$ เพราะว่าที่จุดนี้ค่าของ $f(x)$ อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ แต่ฟังก์ชัน f หาค่าได้ทุก ๆ จำนวน $x \neq 3$ ถ้าเราพิจารณา x เข้าใกล้ค่า 3 จะได้ว่า

เมื่อ $x \neq 3$ $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$ จะเข้าใกล้ $3 + 3 = 6$

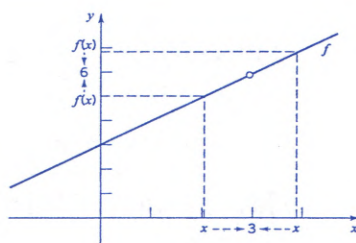
ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ ดังรูป 2.9



$(2x^2) - 3x + 5$



รูป 2.8



รูป 2.9

ตัวอย่าง 2.5

จงพิจารณาลักษณะของลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ $x \rightarrow 1$ เมื่อ $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

วิธีทำ ค่าของฟังก์ชัน f หาค่าไม่ได้ เมื่อ $x = 1$ เพราะว่าที่จุดนี้ค่าของ $f(x)$ อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ แต่ฟังก์ชัน f หาค่าได้ทุก ๆ จำนวน $x \neq 1$ ถ้าเราพิจารณา x เข้าใกล้ค่า 1 จะได้ว่า

$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1, (x \neq 1)$

และ $\frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$ จะเข้าใกล้ $1^2 + 1 + 1 = 3$

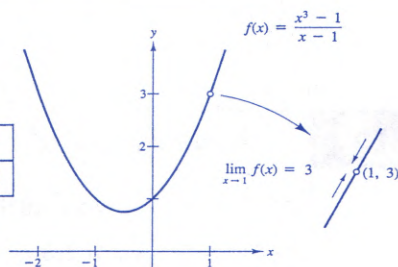
ดังแสดงค่า $f(x)$ ในตาราง 2.1 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$ ดังรูป 2.10



x เข้าใกล้ 1 ทางซ้าย					x เข้าใกล้ 1 ทางขวา				
x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
f(x)	2.313	2.71	2.97	2.997	?	3.003	3.03	3.31	3.813



ตาราง 2.1



รูป 2.10

บทที่ 3

การหาอนุพันธ์

(Differentiation)

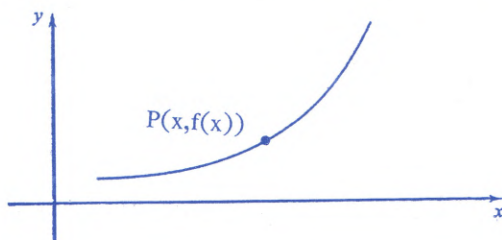
การพัฒนา calculus ในระยะเริ่มแรก การนิยามความหมายของฟังก์ชันยังมีข้อจำกัด เช่น Dirichlet function จะไม่อยู่ในนิยามในระยะแรก ความหมายของ ฟังก์ชันจึงถูกพัฒนาขึ้นใหม่ โดย Peter Gustav Dirichlet ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ ชาวเยอรมันมีชีวิตอยู่ในช่วง ค.ศ. 1805-1859



LEONHARD EULER

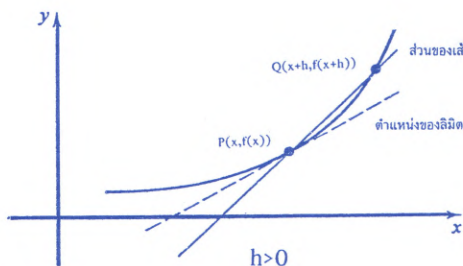
3.1 อนุพันธ์ (The Derivative)

เราเริ่มศึกษาฟังก์ชัน f ซึ่งมีกราฟดังแสดงในรูป 3.1 เราเลือกจุด $P(x, f(x))$ มีคำถามว่าจะมีเส้นตรงที่เรียกว่าเส้นสัมผัสของกราฟที่จุดนี้หรือไม่

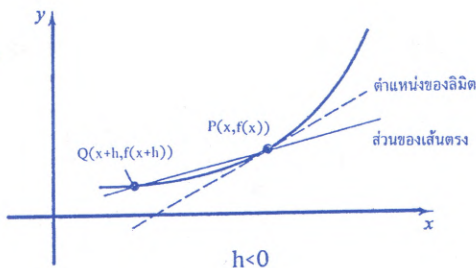


รูป 3.1

คำตอบของปัญหานี้ เราเลือกจำนวนน้อย ๆ $h \neq 0$ และบนกราฟเราลงจุด $Q(x+h, f(x+h))$ เป็นจุดอีกจุดหนึ่ง แล้วเราลากส่วนของเส้นตรงผ่านจุด P และ Q ในรูป 3.2.ก. แสดงสถานะของส่วนของเส้นตรง PQ เมื่อ $h > 0$ และในรูป 3.2.ข. แสดงสถานะของส่วนของเส้นตรง PQ เมื่อ $h < 0$



ก.



ข.

รูป 3.2

ขณะที่ h เข้าใกล้ศูนย์ทางขวา ($h \rightarrow 0^+$) ในรูป 3.2.ก ส่วนของเส้นตรง PQ เข้าใกล้เส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด P และในทำนองเดียวกันขณะที่ h เข้าใกล้ศูนย์ทางซ้าย ($h \rightarrow 0^-$) ส่วนของเส้นตรง PQ ก็เข้าใกล้เส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด P เส้นตรงที่ลิมิตนี้เข้าใกล้เราเรียกว่า เส้นสัมผัสกับกราฟ ณ จุด $P(x, f(x))$

เพราะว่าเส้นตรง PQ มีความชัน

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

เราสามารถคาดหวังว่าเส้นสัมผัสซึ่งเป็นสถานะที่ลิมิตของเส้นตรง PQ ลู่เข้ามีความชัน

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

ขณะที่สมการ (3.1) เป็นเครื่องวัดความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(x, f(x))$ และ $(x+h, f(x+h))$ สมการ (3.2) ก็เป็นเครื่องวัดความชันของกราฟที่ $(x, f(x))$ และเราเรียก ความชันของกราฟ (Slope of The Graph) ข้อสังเกตที่สำคัญในที่นี้ x เป็นจุดคงที่ในโดเมนของ f และในเทอม $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ นี้ h เป็นตัวแปรค่า

อนุพันธ์และการหาอนุพันธ์ (Derivative and Differentiation)

ในบทนำ เราพูดถึงเส้นสัมผัสและให้รูปเรขาคณิตแทนลิมิตของรูป

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ต่อไปนี่เราเริ่มศึกษาตามระบบทางคณิตศาสตร์ว่าอะไรที่นักคณิตศาสตร์เรียกว่าทฤษฎีของการหาอนุพันธ์

นิยาม 3.1

ฟังก์ชัน f จะเรียกว่า หาอนุพันธ์ได้ที่ x (Differentiable at x) ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ หาค่าได้ ถ้าลิมิตหาค่าได้ เราเรียกว่าอนุพันธ์ของ } f \text{ ที่ } x$$

(Derivative at x) และเขียนแทนด้วย $f'(x)$

สัญลักษณ์

อนุพันธ์ของ f ที่ x ในบางครั้งเราใช้ $\frac{dy}{dx}$, y' , $\frac{d}{dx}[f(x)]$, $D_x[y]$ แทน $f'(x)$ และ

ใช้ $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ หรือ $f'(x_0)$ แทน อนุพันธ์ของ f ที่ $x = x_0$ นั่นคือ

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

	ในทางเรขาคณิต $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ คือความชันของกราฟที่จุด $(x, f(x))$ เส้นตรงที่ผ่านจุด $(x, f(x))$ ซึ่งมีความชัน $f'(x)$ นี้เราเรียกว่า เส้นสัมผัสกับกราฟของ f ที่ $(x, f(x))$ และเส้นตรงนี้เป็นเส้นที่ประมาณที่ดีที่สุดของกราฟของ f ที่ใกล้จุด $(x, f(x))$
--	--

ความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ในลักษณะต่าง ๆ กัน

	ฟังก์ชัน	อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
1	เส้นโค้ง $y = f(x)$	$f'(x)$ คือ ความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด $(x, f(x))$
2	สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ $S = S(t)$	$S'(t)$ แทนความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใดๆ แทนด้วย $V(t)$ นั่นคือ $V(t) = S'(t)$
3	สมการความเร็ว $V = V(t)$	$V'(t)$ แทนความเร่งของวัตถุ ณ เวลา t ใดๆ แทนด้วย $a(t)$ นั่นคือ $a(t) = V'(t) = S''(t)$
4	สมการการเจริญเติบโตของเชื้อราเทียบกับเวลา t ใดๆ $G = f(t)$	$f'(t)$ หมายถึง อัตราการเจริญเติบโตของเชื้อรา ณ เวลา t ใดๆ

อนุพันธ์ของฟังก์ชันเป็นหัวใจสำคัญทางคณิตศาสตร์ประยุกต์ เพื่อใช้กับสาขาวิชาต่างๆ โดยเฉพาะในสาขาวิศวกรรมศาสตร์, วิทยาศาสตร์, แพทย์ศาสตร์, บริหารธุรกิจ, เศรษฐศาสตร์ เป็นต้น ดังนั้น เราจึงพยายามหาสูตรของอนุพันธ์ของฟังก์ชันมาตรฐานเบื้องต้น รวมถึงเทคนิคการหาอนุพันธ์ในรูปแบบต่างๆ ในที่นี้ เราพิจารณาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันบางตัวอย่างโดยใช้นิยาม

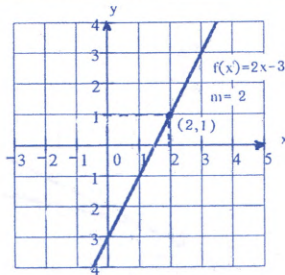
ตัวอย่าง 3.1 จงหาความชันของกราฟ $f(x) = 2x - 3$ ที่จุด $(2, 1)$

The Slope of The Graph of a Linear Function

วิธีทำ หาความชันของกราฟของ f เมื่อ $c = 2$ เราสามารถประยุกต์นิยามของความชันของเส้นสัมผัสได้ดังนี้

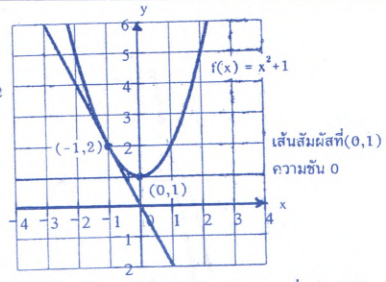
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(2+h) - 3] - [2(2) - 3]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 2h - 3 - 4 + 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 = 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความชันของ f ที่ $(2, 1)$ คือ $m = 2$ ดังแสดงในรูป 3.3



รูป 3.3

เส้นสัมผัส
ที่ $(-1, 2)$
ความชัน -2



รูป 3.4 ความชันของ f ที่จุดใดๆ คือ $m = 2x$

ตัวอย่าง 3.2

จงหาความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟของ $f(x) = x^2 + 1$ ที่จุด $(0, 1)$ และ $(-1, 2)$

ดังแสดงในรูป 3.4

Tangent Line to

The Graph of
Nonlinear
Function

วิธีทำ ให้ $(x, f(x))$ เป็นจุดใดๆ บนกราฟของ f ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสที่ $(x, f(x))$ คือ

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((x+h)^2 + 1) - (x^2 + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

ดังนั้น ความชันที่จุดใดๆ $(x, f(x))$ บนกราฟของ f คือ $m = 2x$ ที่จุด $(0, 1)$

ความชันคือ $m = 2(0) = 0$ และที่จุด $(-1, 2)$ ความชันคือ $m = 2(-1) = -2$

ดูรูป 3.4



ตัวอย่าง 3.3

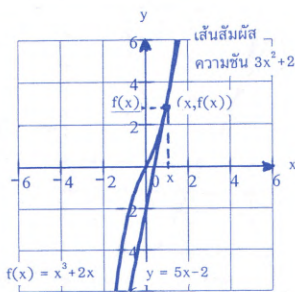
จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = x^3 + 2x$

Finding The
Derivative by
The Limit
Process

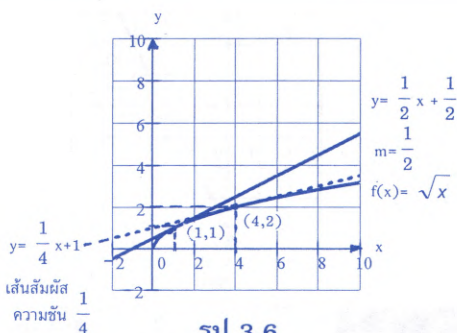
$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^3 + 2(x+h)] - (x^3 + 2x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2x + 2h - x^3 - 2x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[3x^2 + 3xh + h^2 + 2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [3x^2 + 3xh + h^2 + 2] = 3x^2 + 2 \end{aligned}$$

ในรูป 3.5 แสดงกราฟของ $f(x) = x^3 + 2x$ และ $f'(x)$ ที่จุด $(x, f(x))$





รูป 3.5



รูป 3.6

ตัวอย่าง 3.4

Using The
Derivative to
Find The Slope
at a Point

จงหา $f'(x)$ ของ $f(x) = \sqrt{x}$ แล้ว หาคความชันของกราฟของ f ที่จุด $(1,1)$ และ $(4,2)$ พร้อมทั้งพิจารณาลักษณะของ f ที่จุด $(0,0)$

วิธีทำ ใช้วิธีการหาลิมิตของผลหาร เช่นเดียวกับในหัวข้อ 2.3

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \right) \left(\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

ที่จุด $(1,1)$, ความชัน คือ $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

ที่จุด $(4,2)$, ความชัน คือ $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

และที่จุด $(0,0)$, ความชันหาค่าไม่ได้ เพราะว่า ลิมิตของ $f'(x)$ ขณะที่ $x \rightarrow 0^+$ เป็น $+\infty$ ดังนั้น กราฟของ f มีเส้นกำกับแนวตั้งที่จุด $(0,0)$ ดูรูป 3.6 □

หมายเหตุ

มีปัญหาในการประยุกต์มากมายที่ใช้ตัวแปรอื่น นอกจากตัวแปร x ที่แกนตัวแปรอิสระ (Independent Variable) ดังตัวอย่าง 3.5

ตัวอย่าง 3.5

Finding The
Derivative of a
Function

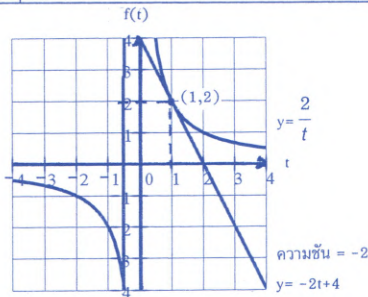
จงหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร t สำหรับฟังก์ชัน $y = \frac{2}{t}$ พร้อมทั้งหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด $(1,2)$

วิธีทำ พิจารณา $y = f(t)$ เราจะได้นิยามของอนุพันธ์ดังนี้

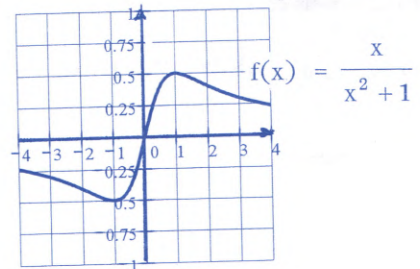
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{t+h} - \frac{2}{t}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2t - 2(t+h)}{t(t+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{ht(t+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{t(t+h)} = -\frac{2}{t^2}\end{aligned}$$

ที่จุด $(1,2)$ มีความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ $m = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=1} = -\frac{2}{(1)^2} = -2$

จากสูตรการหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,2)$ และมีความชัน $m = -2$ จะได้สมการเส้นสัมผัสคือ $y-2 = (-2)(t-1)$ หรือ $y = -2t+4$ และมีกราฟดังแสดงในรูป 3.7



รูป 3.7



รูป 3.8

หมายเหตุ

ในตำราหลายเล่มใช้สัญลักษณ์จำนวนน้อยๆ ที่เข้าใกล้ศูนย์ ($h \rightarrow 0$) เป็น $\Delta x \rightarrow 0$ ดังนั้นนิยามอนุพันธ์ของ $y = f(x)$ เขียนอีกแบบหนึ่งเป็น $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.6

Finding The
Derivative by
The Limit
Process

จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ โดยใช้นิยามของอนุพันธ์

วิธีทำ $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x + \Delta x}{(x + \Delta x)^2 + 1} - \frac{x}{x^2 + 1}}{\Delta x}$

3.9 การหาอนุพันธ์โดยปริยาย (Implicit Differentiation)

ฟังก์ชันชัดเจนและฟังก์ชันโดยปริยาย (Explicit and Implicit Functions)

ในหัวข้อก่อนหน้านี้ ฟังก์ชันส่วนมากเราเขียนอยู่ในรูป ฟังก์ชันชัดเจน (Explicit Function) ตัวอย่างเช่น $y = 3x^2 - 5$ ตัวแปร y เขียนเป็นฟังก์ชันของ x อย่างชัดเจน อย่างไรก็ตาม ยังมีฟังก์ชันอีกมากมายที่เขียนในรูปสมการ ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน $y = \frac{1}{x}$ นิยามโดยปริยายโดยสมการ $xy = 1$ เราเรียกสมการในรูป $g(x,y) = 0$ นี้ว่า ฟังก์ชันโดยปริยาย (Implicit Function) สมมติเราต้องการหา $\frac{dy}{dx}$ ในสมการนี้ สำหรับสมการนี้เราสามารถเขียน y เป็นฟังก์ชันชัดเจนของ x ได้ แล้วหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

รูปโดยปริยาย (Implicit Form)	รูปชัดเจน (Explicit Form)	อนุพันธ์ (Derivative)
$xy = 1$	$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

ยุทธวิธีในการหาอนุพันธ์ของต้น เราจำเป็นต้องจัด y ในเทอมของ x ให้ได้เสียก่อน กล่าวคือ ต้องจัดให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันชัดเจนก่อนนั่นเอง เราไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้เมื่อมีบางสมการที่ไม่สามารถเขียน y ในเทอมของ x หรือถ้าเขียนได้ก็มีความยุ่งยากมาก เช่น $x^2 - 2y^3 + 4y = 2$ สำหรับการหาอนุพันธ์ของสมการนี้ เราสามารถใช้การหาอนุพันธ์โดยปริยาย (Implicit Differentiation) ได้

ในการหาอนุพันธ์โดยปริยายของฟังก์ชันเขียนในรูปสมการ $g(x,y) = 0$ เราต้องตระหนักแก้ไขเสมอว่าเป็นการหาอนุพันธ์เทียบกับ x นั่นก็หมายความว่า เมื่อเราหาอนุพันธ์ของเทอมที่มีเฉพาะตัวแปร x อย่างเดียว เราสามารถหาอนุพันธ์แบบปกติทั่วไปที่เราเคยศึกษามา แต่เมื่อเราหาอนุพันธ์ในเทอมที่มี y เราต้องประยุกต์กฎลูกโซ่ (Chain Rule) เพราะว่า เราสมมติให้ y นิยามโดยปริยายของฟังก์ชันของ x เช่น $\frac{d}{dx}[y^3] = 3y^2 \frac{dy}{dx}$ หรือ $\frac{d}{dx}[x^2 y^3] = x^3 \left(3y^2 \frac{dy}{dx} \right) + y^3 (2x)$ เป็นต้น

ตัวอย่าง 3.143

Differentiating
with Respect
to x

1. $\frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$ ตัวแปร x อย่างเดียวกันใช้สูตรยกกำลัง
ตัวแปรอย่างเดียวกัน

2. $\frac{d}{dx}[y^3] = \frac{d}{dx}[y^3] = 3y^2 \frac{dy}{dx} = 3y^2 \frac{dy}{dx}$ ตัวแปรต่างกันใช้กฎลูกโซ่
ตัวแปรต่างกัน

3. $\frac{d}{dx}[x^4 + 3y] = 4x^3 + 3 \frac{dy}{dx}$ กฎลูกโซ่ : $\frac{d}{dx}[3y] = 3y'$

4. $\frac{d}{dx}[xy^2] = x \frac{d}{dx}[y^2] + y^2 \frac{d}{dx}[x]$ สูตรผลคูณ
 $= x \left(2y \frac{dy}{dx} \right) + y^2 (1)$ กฎลูกโซ่
 $= 2xy \frac{dy}{dx} + y^2$ จัดรูป



การหาอนุพันธ์โดยปริยาย (Implicit Differentiation)

Guidelines for
Implicit
Differentiation

กำหนดสมการ $g(x, y) = 0$ โดยมีตัวแปร x และ y สมมติว่า y หาอนุพันธ์ของ x ได้
เราสามารถหา $\frac{dy}{dx}$ ได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการที่กำหนดให้เทียบกับ x
2. เก็บรวบรวมทุกเทอมที่มี $\frac{dy}{dx}$ มาไว้ทางซ้ายมือของสมการ และย้ายเทอมที่เหลือทั้งหมดไปไว้ทางขวามือของสมการ
3. แยกตัวประกอบ $\frac{dy}{dx}$ ออกจากเทอมทางซ้ายของสมการ
4. แก้สมการหา $\frac{dy}{dx}$ โดยการหาทั้งสองข้างของสมการด้วยตัวประกอบทางซ้ายมือ
ไม่มีเทอม $\frac{dy}{dx}$

ตัวอย่าง 3.144

จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของ $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$

วิธีทำ 1 หาอนุพันธ์ทั้งสองของสมการเทียบกับ x

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} [y^3 + y^2 - 5y - x^2] &= \frac{d}{dx} [-4] \\ \frac{d}{dx} [y^3] + \frac{d}{dx} [y^2] - \frac{d}{dx} [5y] - \frac{d}{dx} [x^2] &= \frac{d}{dx} [-4] \\ 3y^2 \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} - 5 \frac{dy}{dx} - 2x &= 0\end{aligned}$$

วิธีทำ 2 เก็บรวบรวมทุกเทอมที่มี $\frac{dy}{dx}$ ไว้ทางซ้ายของสมการ

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} - 5 \frac{dy}{dx} = 2x$$

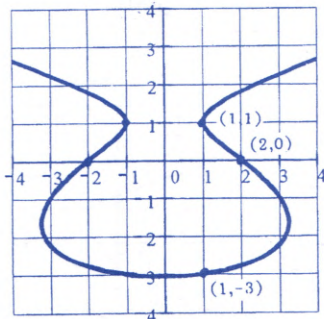
วิธีทำ 3 แยกตัวประกอบ $\frac{dy}{dx}$ ออกจากเทอมทางซ้ายของสมการ

$$\frac{dy}{dx} (3y^2 + 2y - 5) = 2x$$

วิธีทำ 4 แก่สมการหา $\frac{dy}{dx}$ โดยการหาทั้งสองข้างของสมการด้วย $(3y^2 + 2y - 5)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

รูป 3.32

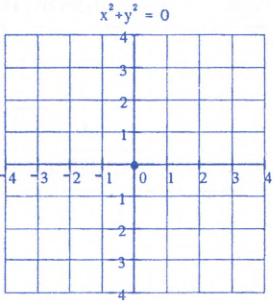
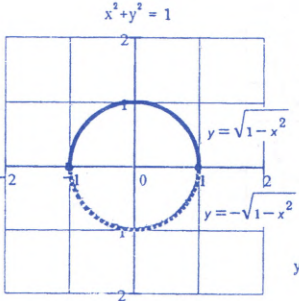
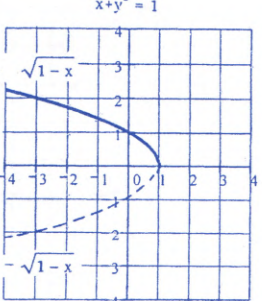


$$y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$$

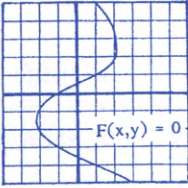
รูป 3.32

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

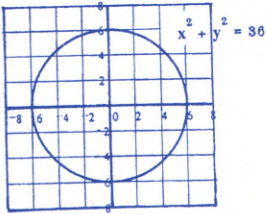
จุดบนกราฟ	ความชันของกราฟ
(2, 0)	-4/5
(1, -3)	1/8
$x = 0$	0
(1, 1)	หาค่าไม่ได้

	มันจะไม่มีคามหมายในการหา $\frac{dy}{dx}$ ในสมการซึ่งไม่มีจุดคำตอบ ตัวอย่างเช่น $x^2 + y^2 = -4$ ไม่มีจุดคำตอบ อย่างไรก็ตามถ้าส่วนโค้งของกราฟสามารถแทนฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้แล้ว $\frac{dy}{dx}$ จะแทนความชันของทุก ๆ จุดบนส่วนโค้ง ฟังก์ชันจะหาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุดต่อไปนี้ 1. จุดซึ่งเส้นสัมผัสเป็นแนวขนานกับแกน y และ 2. จุดซึ่งฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง
ตัวอย่าง 3.145	ถ้าเป็นไปได้ แสดงกราฟของสมการโดยฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ก. $x^2 + y^2 = 0$ ข. $x^2 + y^2 = 1$ ค. $x + y^2 = 1$
Representing a Graph by Differentiable Functions	วิธีทำ ก. กราฟของสมการ $x^2 + y^2 = 0$ เป็นจุด ๆ เดียวคือ จุด $(0,0)$ ดังนั้น มันไม่นิยาม y เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ของ x ได้ วิธีทำ ข. กราฟของสมการ $x^2 + y^2 = 1$ เป็นวงกลมหนึ่งหน่วย จุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ ครึ่งวงกลมซีกบนกำหนดโดยฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ $y = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1$ และครึ่งวงกลมซีกล่างกำหนดโดยฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ $y = -\sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1$ ที่จุด $(-1,0)$ และ $(0,1)$ ความชันของกราฟหาค่าไม่ได้ วิธีทำ ค. ครึ่งซีกบนของพาราโบลาที่กำหนดโดยฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ $y = \sqrt{1 - x}, \quad x < 1$ และครึ่งซีกล่างของพาราโบลา กำหนดโดยฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ $y = -\sqrt{1 - x}, \quad x < 1$ ที่จุด $(1,0)$ ความชันของกราฟหาค่าไม่ได้ ดูรูป 3.33 □
 ก.  รูป 3.33 ข.  ค.	

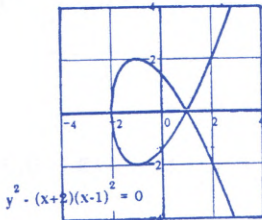
ตัวอย่าง 3.146	ให้ y เป็นฟังก์ชันของ x กำหนดโดยสมการ $x^2 + y^2 = 36$
	จงหา $\frac{dy}{dx}$ โดย 1. จัด y ในรูปฟังก์ชันชัดเจน 2. การหาอนุพันธ์โดยปริยาย
สูตรผลบวก และผลต่าง $\frac{du^2}{dx} = 2u \frac{du}{dx}$	วิธีทำ 1 สมการ $x^2 + y^2 = 36$ เป็นวงกลมรัศมี 6 หน่วย จุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ ครึ่งวงกลมซีกบนกำหนดโดยฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้
	$y = \sqrt{36 - x^2}, \quad -6 < x < 6$
	จะได้ $\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[(36 - x^2)^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2}(36 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(36 - x^2) \\ &= \frac{1}{2}(36 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{36 - x^2}} = -\frac{x}{y} \end{aligned}$
	ครึ่งวงกลมซีกล่าง กำหนดโดยฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้
	$y = -\sqrt{36 - x^2}, \quad -6 < x < 6$ จะได้ $\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[-(36 - x^2)^{\frac{1}{2}}] = -\frac{1}{2}(36 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(36 - x^2) \\ &= -\frac{1}{2}(36 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{36 - x^2}} = -\frac{x}{y} \end{aligned}$
หมายเหตุ	วิธีทำ 2 หาอนุพันธ์โดยปริยาย (Implicit differentiation)
	ถ้าเรามีกราฟซึ่งเป็นตัวแทนของสมการ $g(x,y) = 0$ เราสามารถตรวจสอบได้โดยการลากเส้นตรงขนานกับแกน y ให้ตัดเส้นกราฟนั้น ถ้าไม่มีเส้นใดตัดกราฟเกินหนึ่งครั้ง แสดงว่าเป็นกราฟของฟังก์ชันชัดเจน ดูกราฟตัวอย่างต่อไปนี้



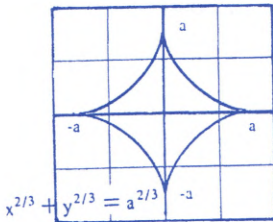
กราฟของฟังก์ชันขัดแย้ง



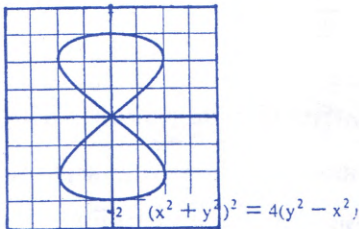
กราฟของวงกลมรัศมี 6 หน่วย



ฟังก์ชันโดยปริยาย

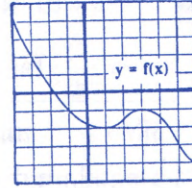


ฟังก์ชันโดยปริยาย

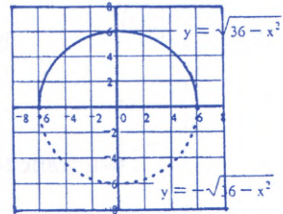


ฟังก์ชันโดยปริยาย

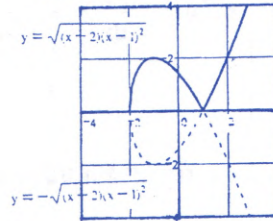
Generated by Mathcad



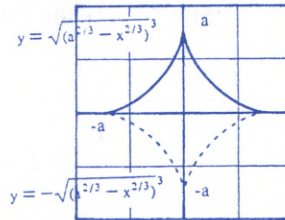
กราฟของฟังก์ชันโดยปริยาย



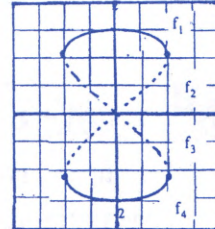
จัดเป็นฟังก์ชันขัดแย้งได้



จัดเป็นฟังก์ชันขัดแย้งได้



จัดเป็นฟังก์ชันขัดแย้งได้



จัดเป็นฟังก์ชันขัดแย้งได้ 4 เส้น

แต่รูปสมการมีความซับซ้อน

บทที่ 4

การประยุกต์ของอนุพันธ์

(Applications of Derivative)

ทั้ง Leibniz และ Newton ต่างก็ถือว่าเป็นผู้เริ่มต้นคิดค้นวิชาแคลคูลัส สำหรับ Leibniz เองถือว่าเป็นผู้ที่พยายามขยายแนวคิดให้กว้างขวางขึ้นโดยการพัฒนา ทฤษฎีและสัญลักษณ์ต่างๆขึ้นอย่างเป็นทางการเขาได้ใช้เวลาในการคิดค้นและเลือกใช้สัญลักษณ์ที่เหมาะสมสำหรับข้อค้นพบที่ใหม่ๆ



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

4.1 อัตราการเปลี่ยนแปลง การเคลื่อนที่เชิงเส้นตรง , ความเร็ว , ความเร่ง (Rate of Change , Linear Motion , Velocity and Acceleration)

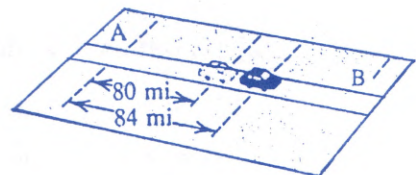
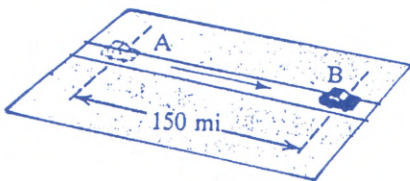
4.1.1 ในวิชาแคลคูลัสเราสนใจการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรหนึ่งที่เกิดขึ้น เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอีกตัวหนึ่งสิ่งที่ต้องการศึกษาคือ อัตรา (Rate) ที่ตัวแปรตามเปลี่ยนแปลงไป โดยเทียบกับตัวแปรอิสระ เช่น ความเร็วของรถยนต์เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทาง ความเร่งของรถยนต์เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว กำลัง (Power) เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของงาน (Work) เป็นต้น

โดยทั่วไปอัตราการเปลี่ยนแปลงไม่จำเป็นต้องเทียบกับเวลา t เท่านั้น เช่น การเปลี่ยนแปลงของกระแสไฟฟ้าเทียบกับความต่างศักย์ , อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเครียด (Strain) ของวัสดุเทียบกับความเค้น (Stress) เป็นต้น

ถ้าให้ ΔI แทนส่วนที่เปลี่ยนแปลง (Increment) ของกระแสไฟฟ้า I เมื่อความต่างศักย์ E เปลี่ยนแปลงจาก E_0 ไปยัง $E_0 + \Delta E$ เรียก ΔE ว่าส่วนที่เปลี่ยนแปลงของ E_0 ดังนั้น $\frac{\Delta I}{\Delta E}$ แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของ I เทียบกับ E ในช่วง E_0

$$\text{ถึง } E_0 + \Delta E \text{ ถ้า } \lim_{\Delta E \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta E} = \lim_{\Delta E \rightarrow 0} \frac{I(E_0 + \Delta E) - I(E_0)}{\Delta E}$$

หาค่าได้ เรากล่าวว่า $\lim_{\Delta E \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta E}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ I ที่ E_0

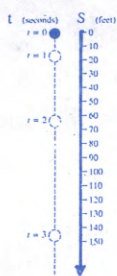


	สำหรับฟังก์ชันทั่วไป ในที่นี้ให้ y เป็นตัวแปรตามและ x เป็นตัวแปรอิสระ ก. ถ้าให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x โดย x เป็นตัวแปรอิสระ, y เป็นตัวแปรตาม ให้ Δx เป็นส่วนที่เปลี่ยนของ x จาก x ไป $x + \Delta x$ และ Δy เป็นส่วนที่เปลี่ยนของ y โดย $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ จะได้ว่า 1. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ย (Average Rate of Change) ของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + \Delta x$ 2. $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะที่ x ใด ๆ ข. ถ้า $S = S(t)$ เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่ของวัตถุตามแนวเส้นตรง และเป็นฟังก์ชันของเวลา t แล้ว เรียก S ว่า ฟังก์ชันตำแหน่ง (Position Function) ของวัตถุนั้น จะได้ว่า 1. $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$ เป็นความเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วงเวลา t ถึง $t + \Delta t$ 2. $v = \frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$ เป็นความเร็ว (ชั่วขณะ) ที่เวลา t ใด ๆ 3. $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ เป็นความเร่งเฉลี่ยของวัตถุช่วงเวลา t ถึง $t + \Delta t$ 4. $a = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ เป็นความเร่ง (ชั่วขณะ) ที่เวลา t ใด ๆ 5. อัตราความเร็ว (Speed) $= \left \frac{dS}{dt} \right = v(t)$ 6. อัตราความเร่ง $= \left \frac{d^2 S}{dt^2} \right = \left \frac{dv}{dt} \right = a(t)$
สรุป การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง	
	การเคลื่อนที่ของอนุภาค P ตามแนวเส้นตรงอธิบายได้ด้วยฟังก์ชัน $S = S(t)$ เมื่อ $t > 0$ แทนเวลาและ S แทนระยะทางของจุด P จากจุดตรึงอยู่กับที่ O ในวิธีการเคลื่อนที่แนวเส้นตรง ความเร็วของ P ขณะเวลา t ใด ๆ คือ $v(t) = \frac{ds}{dt}$ ถ้า $v > 0$, P กำลังเคลื่อนที่ไปในทิศทางเดียวกับการเพิ่มขึ้นของ S ถ้า $v < 0$, P กำลังเคลื่อนที่ไปในทิศทางเดียวกับการลดลงของ S ถ้า $v = 0$, P อยู่ในสภาพหยุดนิ่ง หรือกำลังกลับทิศทาง

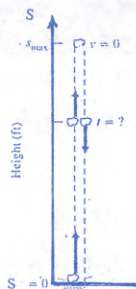
	ความเร่งของ P ขณะเวลา t ใด ๆ คือ $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ ถ้า $a(t) > 0$, v เพิ่มขึ้น ถ้า $a(t) < 0$, v ลดลง ถ้า $v(t)$ และ $a(t)$ มีเครื่องหมายเดียวกัน อัตราเร็วของ P เพิ่มขึ้น ถ้า $v(t)$ และ $a(t)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม อัตราเร็วของ P ลดลง
หมายเหตุ	1. ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ แล้ว $a = 0$ 2. สำหรับระยะไกลที่สุดและใกล้ที่สุดจากจุดเริ่มต้น 0 จะได้ว่า $\frac{ds}{dt} = 0$ ($v = 0$) 3. สำหรับความเร็วสูงสุดและความเร็วต่ำสุด จะได้ว่า $\frac{dv}{dt} = 0$ ($a = 0$)
การเคลื่อนที่ตามแนวดิ่งอย่างอิสระ (Free Fall)	
S มีหน่วยเป็นฟุต S มีหน่วยเป็นเมตร	การเคลื่อนที่ตามแนวดิ่งอย่างอิสระ หมายถึง การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ตกลงมาจากสภาพหยุดนิ่ง เนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกเพียงอย่างเดียว หรือวัตถุที่ถูกโยนขึ้นข้างบน หรือปล่อยลงข้างล่างตรง ๆ ตามแนวดิ่ง ดังรูป 4.1 กำหนด $S(t)$ แทนระยะทางจากพื้นโลก ถึงวัตถุหนึ่งเมื่อเวลาผ่านไป t วินาที ถ้า $S = 0$ หมายถึงระดับพื้นผิวโลก ดูรูป 4.1 จากการทดลองได้สมการความสัมพันธ์ระหว่าง S และ T ดังต่อไปนี้ $S = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{.....(1)}$ เมื่อ g เป็นแรงดึงดูดของโลก มีค่า 2 ฟุต/วินาที² หรือ 9.8 เมตร/วินาที² ดังนั้น $S(t) = \frac{1}{2}(32)t^2 = 16t^2 \quad \text{.....(2)}$ หรือ $S(t) = \frac{1}{2}(9.8)t^2 = 4.9t^2 \quad \text{.....(3)}$ ถ้าวัตถุถูกโยนขึ้นไปตามแนวดิ่งด้วยความเร็วต้น v_0 และอยู่ห่างจากพื้นโลก S_0 จะได้สมการ $S(t) = S_0 + v_0t - 16t^2 \quad \text{.....(4)}$ เมื่อ S มีหน่วยเป็นฟุต และ t มีหน่วยเป็นวินาที หรือ $S(t) = S_0 + v_0t - 4.9t^2 \quad \text{.....(5)}$

	เมื่อ S มีหน่วยเป็นเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที ความเร็ว v ขณะเวลา t ใด ๆ หาได้จากสมการ (4) และ (5) ดังนี้
	$v(t) = v_0 - 32t \quad \text{.....(6)}$
หรือ	$v(t) = v_0 - 9.8t \quad \text{.....(7)}$

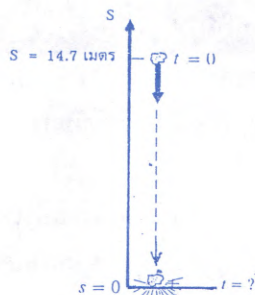
ตัวอย่าง 4.1	จงหาเวลาที่ลูกบอลถูกปล่อยลงมาได้ระยะ 14.7 เมตร
วิธีทำ จากสมการการเคลื่อนที่อย่างอิสระ (3) ที่ว่า $S = 4.9t^2$ ต้องการหา t เมื่อ $S = 14.7$ เมตร แทน $S = 14.7$ ในสมการ (1) จะได้ $14.7 = 4.9t^2$ หรือ $t^2 = \frac{14.7}{4.9}$ หรือ $t = \sqrt{3}$ วินาที แสดงว่าเมื่อเวลาผ่านไป $\sqrt{3} = 1.732$ วินาที ลูกบอลเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 14.7 เมตร □	



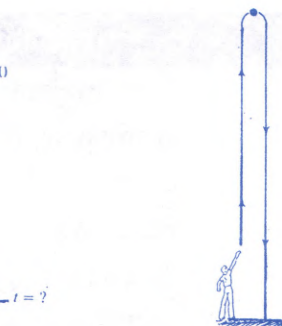
ก.



รูป 4.1



ข.



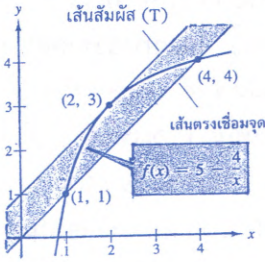
ค.

รูป 4.2

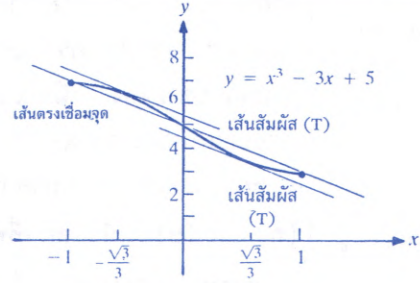
โจทย์ตัวอย่างเกี่ยวกับอัตราการเปลี่ยนแปลง

ตัวอย่าง 4.2	จงหาอัตราการเปลี่ยนของแรงดึงดูดระหว่างมวลของอนุภาค m กับอนุภาค M เทียบกับ x ซึ่งเป็นระยะทางระหว่างวัตถุทั้งสอง กำหนด ขนาดของแรงดึงดูดระหว่างอนุภาค m และ M คือ $F(x) = \frac{GmM}{x^2} \quad \text{เมื่อ } G \text{ เป็นค่าคงที่}$ วิธีทำ ในที่นี้แรงดึงดูด F เป็นฟังก์ชันของระยะทาง x ; $F = F(x)$ อัตราการเปลี่ยนของแรง F เทียบกับ x คือ $\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}$ หรือ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$ โดยที่ $F(x) = \frac{GmM}{x^2}$
---------------------	---

เส้นตรงที่ขนานกัน
จะมีความชันเท่ากัน



รูป 4.77



รูป 4.78

ตัวอย่าง 4.65

กำหนดให้ $y = x^3 - 3x + 5$ จงหาค่า c ที่เป็นไปได้ทั้งหมดบนช่วง $(-1, 1)$ ที่ทำให้ $f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$

วิธีทำ เพราะว่า $\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{3 - 7}{2} = -2$

เนื่องจาก f เป็นไปตามเงื่อนไข Mean Value Theorem บนช่วง $(-1, 1)$

ดังนั้น จะมี $c \in (-1, 1)$ ที่ทำให้ $f'(c) = -2$

เพราะว่า $f'(x) = 3x^2 - 3 = -2$ จะได้ $x^2 = \frac{1}{3}$ หรือ $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

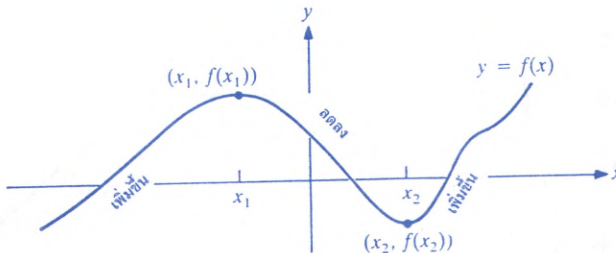
สำหรับในช่วง $(-1, 1)$ จึงได้ $c = \frac{-3}{\sqrt{3}}$ และ $\frac{3}{\sqrt{3}}$ สองค่า ดูรูป 4.78 $\square$

4.4.4 ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด และการตรวจสอบโดยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (Increasing and Decreasing Function and the First Derivative Test)

นิยาม 4.10

Increasing
and
Decreasing
Functions

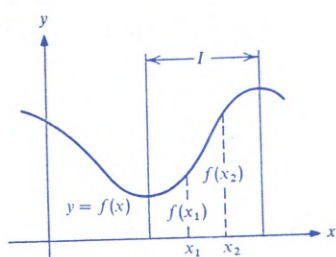
- (1) จะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (Increasing Function) บนช่วง I ถ้า สำหรับจำนวน x_1, x_2 ใดๆ ใน I ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$
- (2) จะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันลด (Decreasing Function) บนช่วง I ถ้า สำหรับจำนวน x_1, x_2 ใดๆ ช่วง I ดูรูป 4.79



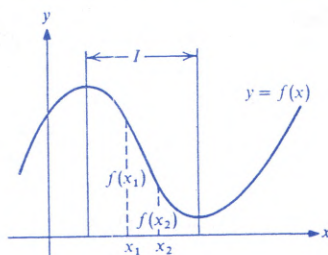
รูป 4.79

- ถ้า x มากขึ้นแล้ว f มากขึ้นด้วย f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
- ถ้า x มากขึ้นแล้ว f น้อยลงด้วย f เป็นฟังก์ชันลด

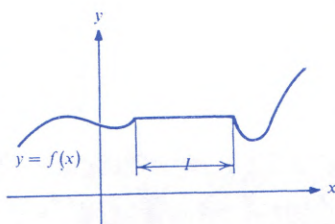
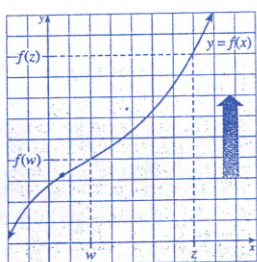
จากรูป 4.79 จะพบว่า ถ้าเรามองจากซ้ายไปขวาไปตามแนวของกราฟของฟังก์ชัน เราพบว่าบางช่วงของกราฟจะมีลักษณะเพิ่มขึ้น และบางช่วงลดลง กล่าวคือ f เพิ่มขึ้น ถ้าอยู่แถบซ้ายของ x เมื่อ x เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และลดเมื่ออยู่แถบขวาของ x_1 หรืออยู่แถบซ้ายของ x_2 ใน 100 หลังจากนั้น f จะเพิ่มขึ้น เมื่ออยู่แถบขวามือของ x_2 รูปแบบของการเพิ่ม หรือการลดจึงเป็นการพิจารณาจากซ้ายไปขวา ดูรูป 4.80 (ก) และ (ข) ถ้ามีบางช่วงที่ทำให้ f ไม่เพิ่มไม่ลด กล่าวคือเป็นค่าคงที่ (Constant) เราจะกล่าวว่า f มีความราบ (Horizontal) บนช่วงนั้น ดูรูป 4.80(ค)



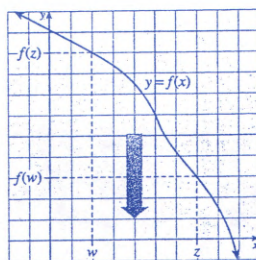
ก. f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม



ข. f เป็นฟังก์ชันลด

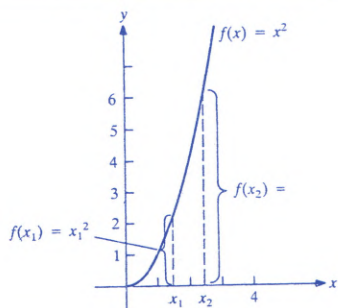


ค. f มีความราบ

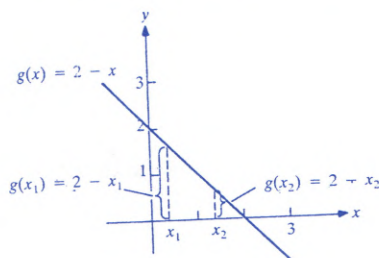


รูป 4.80 ค.

ตัวอย่างเช่น $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันบน $[0, \infty]$ เพราะว่า เมื่อ $0 \leq x_1 < x_2$ จะได้ $x_1^2 < x_2^2$ ดูรูป 4.81ก. ฟังก์ชัน $g(x) = 2 - x$ เป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty, \infty)$ เพราะ ดังนั้น เมื่อ $x_1 < x_2$ เราจะได้ว่า $2 - x_1 > 2 - x_2$ ดูรูป 4.81 ข.



ก.

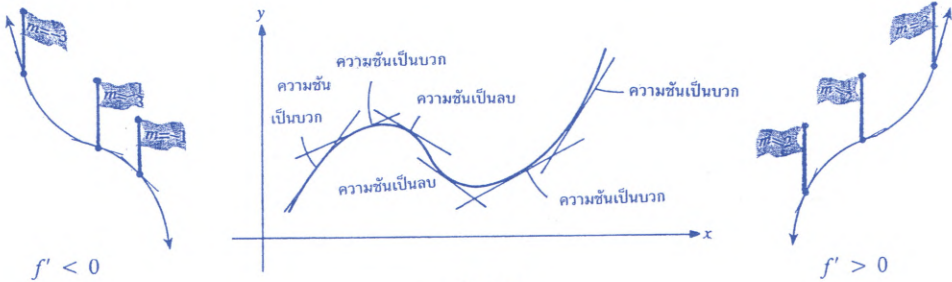


ข.

รูป 4.81

การทดสอบการเป็นฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด (Test for Increasing and decreasing Function)

จากรูป 4.82 เราจะพบว่าความชันของเส้นสัมผัสมีค่าเป็นบวก เมื่อ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและความชันของเส้นสัมผัสเป็นลบ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันลด แต่เนื่องจากความชันของเส้นสัมผัสของ f คือ $f'(x)$ จึงสรุปได้ว่า ถ้า $f'(x) > 0$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มและถ้า $f'(x) < 0$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันลด



รูป 4.82

ทฤษฎี 4.7

- กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a, b)
- (1) ถ้า $f'(x) > 0$ ตลอดช่วง (a, b) แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[a, b]$
 - (2) ถ้า $f'(x) < 0$ ตลอดช่วง (a, b) แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบน $[a, b]$
 - (3) ถ้า $f'(x) = 0$ ตลอดช่วง (a, b) แล้ว f เป็นฟังก์ชันคงที่

ตัวอย่าง 4.66

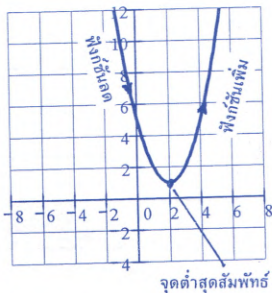
จงพิจารณาว่า $f(x) = x^2 - 4x + 5$ มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงบนช่วงใดบ้าง

วิธีทำ ขั้น 1 หาอนุพันธ์ $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 5) = 2x - 4$

ขั้น 2 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้น ถ้า $2(x - 2) > 0$ หรือ $x > 2$

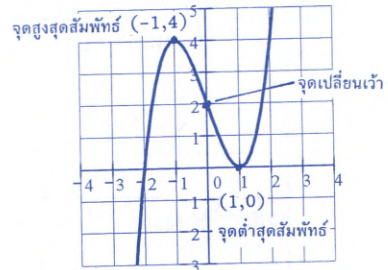
และ f เป็นฟังก์ชันลดลง ถ้า $2(x - 2) < 0$ หรือ $x < 2$

ดังนั้น $f(x)$ เพิ่มขึ้นบนช่วง $(2, \infty)$ ดูรูป 4.83



$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

รูป 4.83



$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

รูป 4.84

ตัวอย่าง 4.67

จงพิจารณาว่า $f(x) = x^3 - 3x + 2$ มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงบนช่วงใดบ้าง

วิธีทำ ขั้น 1 หาอนุพันธ์ $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x + 2) = 3x^2 - 3$
 $= 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$
 ขั้น 2 หาช่วงของ x ที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลดลง f เพิ่มขึ้น
 ถ้า $3(x-1)(x+1) > 0$ และ f ลดลง ถ้า $3(x-1)(x+1) = 0$
 พิจารณาเครื่องหมายของ $3(x-1)(x+1)$ จากตาราง 4.3 ดังนี้
 ตาราง 4.3

ช่วง	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
ตัวประกอบของ $f'(x)$			
3	+	+	+
$x - 1$	-	-	+
$x + 1$	-	-	+
$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$	+	-	+

ดังนั้น ผลลัพธ์ของเครื่องหมายของ $f'(x)$ เป็น $\begin{array}{c} + & - & + \\ -1 & & 1 \end{array} \rightarrow x$
 นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วง $(-\infty, -1)$ และ $(1, \infty)$
 และ f เป็นฟังก์ชันลด บนช่วง $(-1, 1)$ ดังรูป 4.84 $\square$

ตัวอย่าง 4.68

จงพิจารณาว่า $f(x) = 3x^2 - x^3 + 9x - 1$ มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงบนช่วงใดบ้าง

วิธีทำ ขั้น 1 $f'(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - x^3 + 9x - 1) = 6x - 3x^2 + 9$
 $= 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$
 ขั้น 2 หาช่วงของฟังก์ชันเพิ่มขึ้นหรือลดลง พิจารณาจากค่า $f'(x)$ เป็นบวก
 หรือลบจากตารางค่าต่อไปนี้ ตาราง 4.4

ช่วง	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 3$
ตัวประกอบของ $f'(x)$			
-3	-	-	-
$x + 1$	-	+	+
$x - 3$	-	-	+
ผลคูณของ $f'(x)$	-	+	-

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลด บนช่วง $(-\infty, -1)$ และ $(3, \infty)$
 และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วง $(-1, 3)$ ดังรูป 4.85 $\square$

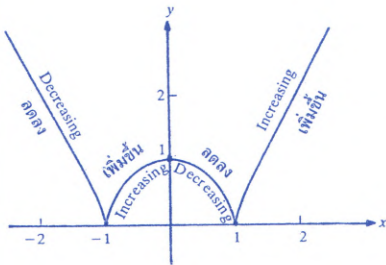
ตารางที่ 4.6

ช่วง	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
ตัวประกอบของ $f'(x)$				
$4x$	-	-	+	+
$(x^2 - 1)^{-1/3}$	+	-	+	+
$\frac{4x}{3(x^2 - 1)^{1/3}}$	-	+	+	+
ข้อสรุป	ฟังก์ชันลด	ฟังก์ชันเพิ่ม	ฟังก์ชันลด	ฟังก์ชันเพิ่ม

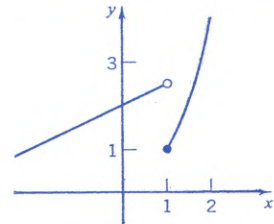
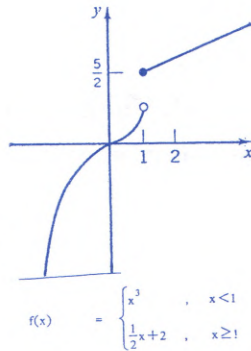
ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลด บนช่วง $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วง $(-1, 0) \cup (1, \infty)$

ดูรูป 4.87



รูป 4.87



$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \quad x < 1 \\ \text{หาค่าไม่ได้} & , \quad x = 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

รูป 4.88

ตัวอย่าง 4.71

$$\text{ฟังก์ชัน } f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < 1 \\ \frac{1}{2}x + 2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

จงหาพิจารณาลักษณะการเพิ่มลดของ f

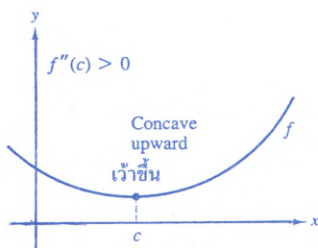
วิธีทำ เราจะพบว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ จึงทำให้หา $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ไม่ได้และเราได้ว่า

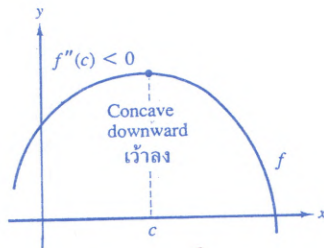
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \quad x < 1 \\ \text{หาค่าไม่ได้} & , \quad x = 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

การทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับที่สอง (The Second Derivative Test)

ในการตรวจสอบว่าฟังก์ชัน f มีจุดสูงสุดสัมพัทธ์ หรือ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์นั้น เราอาจจะตรวจสอบโดยดูจากอนุพันธ์ที่สองก็ได้ การทดสอบนี้อยู่บนพื้นฐานที่ว่า ถ้ากราฟของ f เว้าขึ้นบนช่วงเปิดหนึ่งซึ่งรวม c อยู่ด้วย และ $f'(c) = 0$ แล้ว $f(c)$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ดังรูป 4.108 ก. ในทำนองเดียวกัน ถ้ากราฟของ f เว้าลงบนช่วงเปิด ซึ่งรวม c อยู่ด้วย และ $f'(c) = 0$ แล้ว $f(c)$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ดังรูป 4.108 ข.



ก.



ข.

รูป 4.108

ทฤษฎี 4.11

ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งหาอนุพันธ์อันดับสองได้บนช่วงเปิด (a, b) ซึ่งรวมจำนวนวิกฤต c อยู่ด้วย

- (1) ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
- (2) ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์
- (3) ถ้า $f''(c) = 0$ จะไม่สรุปผลได้ ในกรณีต้องตรวจสอบโดยอนุพันธ์ที่หนึ่ง

ตัวอย่าง 4.86

กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ จะหาสิ่งต่อไปนี้

- ก. จุดวิกฤต
- ข. ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f
- ค. ช่วงของฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นและลดลง

วิธีทำ ขั้น 1 หาอนุพันธ์ของ :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

ขั้น 2 หาจุดวิกฤตให้ $f'(x) = 0$ จะได้ $3(x+1)(x-3) = 0$ ดังนั้น $x = -1, 3$

ก. นั่นคือ จุดวิกฤตคือ $(-1, 6)$ และ $(3, -26)$

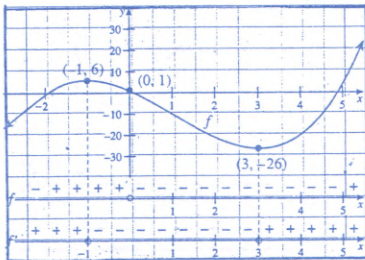
ข. ขั้น 3 ตรวจสอบจุดวิกฤตด้วยอนุพันธ์อันดับสอง หาอนุพันธ์อันดับที่สอง

ของ f : $f''(x) = 6x - 6$ ที่ $x = 1$, $f''(-1) = 6(-1) - 6 = -12 < 0$
 จากทฤษฎี 14.5 จะได้ว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$ และ $(-1, 6)$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 3$, $f''(3) = 6(3) - 6 = 12 > 0$ จากทฤษฎี 4.11 จะได้ว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ $x = 3$ และ $(3, -26)$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ค. หาช่วงของฟังก์ชันเพิ่มขึ้นและลดลงโดย พิจารณาค่า $f'(x)$ เป็นบวกหรือลบ
ตาราง 4.14

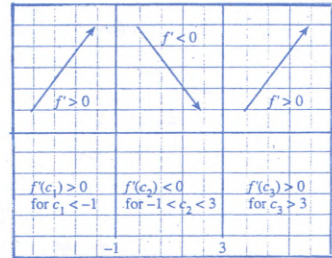
ช่วง	$x < -1$	$-1 < x < 3$	$x > 3$
ตัวประกอบของ $f'(x)$			
3	+	+	+
$(x + 1)$	-	+	+
$(x - 3)$	-	-	+
$f'(x) = 3(x + 1)(x - 3)$	+ -1	- 3	+
ผลสรุปของ f	เพิ่มขึ้น	ลดลง	เพิ่มขึ้น

จากตาราง สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ และเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-1, 3)$ ดังรูป 4.109 □



ก.

รูป 4.109



ข.

ตัวอย่าง 4.87

กำหนดให้ $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

จงพิจารณาว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุดใดบ้าง

วิธีทำ ขั้น 1 หาอนุพันธ์ของ f จะได้ $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$

ขั้น 2 หาจุดวิกฤตของ f ให้ $f'(x) = 0$

จะได้ $4x^2(x - 3) = 0$ เมื่อ $x = 0$ และ $x = 3$

ดังนั้น จุดวิกฤตของ f คือ 0 และ 3

ขั้น 3 ตรวจสอบด้วยอนุพันธ์อันดับที่สอง $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$

ตาราง 4.15

จุดวิกฤต	$f''(x) = 12x(x - 2)$	สรุป	$f(x)$
$x = 0$	0	สรุปไม่ได้	10
$x = 3$	$36 > 0$	จุดต่ำสุดสัมพัทธ์	-17

พิจารณาค่า $f'(x)$ ทางด้านซ้ายของด้านขวาของ 0

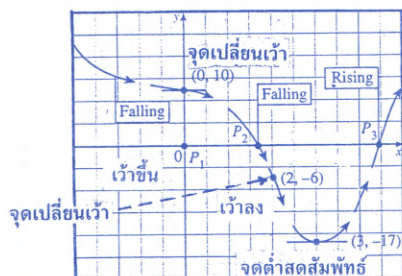
ตาราง 4.16

	ช่วง	ช่วง	ช่วง
ตัวประกอบของ $f'(x)$	$x < 0$	$0 < x < 3$	$x > 3$
$4x^2$	+	+	+
$x - 3$	-	-	+
$f'(x) = 4x^2(x - 3)$	-	0	+

เราพบว่าเครื่องหมายของ $f'(x)$ ไม่เปลี่ยนแปลงและมีค่าน้อยกว่าศูนย์ แสดงว่า $x = 0$ ไม่เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์และไม่เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

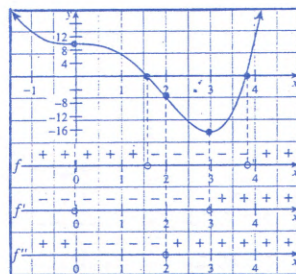
ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $(-\infty, 3)$ และเป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง $(3, \infty)$ และมีจุด $(3, -17)$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ รูป 4.110 □

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$$



ก.

รูป 4.110



ข.

ตัวอย่าง 4.88

จงหาจุดสุดขีดสัมพัทธ์ ของ $f(x) = -3x^5 + 5x^3$

Using the Second Derivative Test

วิธีทำ $f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(1 - x^2) = 0$

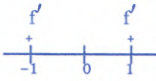
ให้ $f'(x) = 0$, จำนวนวิกฤตคือ $x = -1, 0, 1$

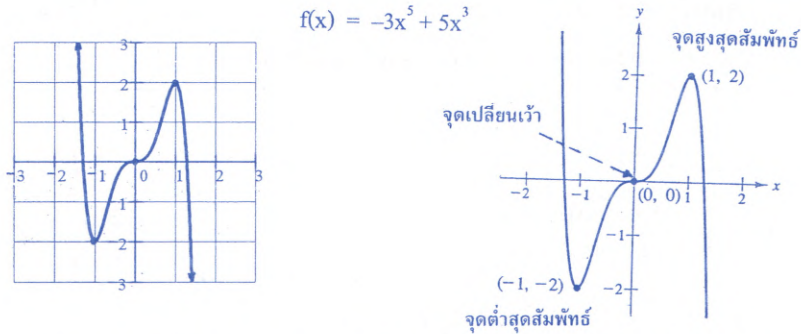
เพราะว่า $f''(0) = -60x^3 + 30x = 30(-2x^3 + x)$

ทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่สอง ดังตาราง 4.17 ต่อไปนี้

จุด	เครื่องหมายของ $f''(x)$	ผลสรุป
$(-1, -2)$	$f''(-1) = 30 > 0$	ต่ำสุดสัมพัทธ์
$(1, 2)$	$f''(1) = -30 < 0$	สูงสุดสัมพัทธ์
$(0, 0)$	$f''(0) = 0$	สรุปผลไม่ได้

เนื่องจากจุด $(0, 0)$ ไม่สามารถสรุปผลได้ จึงต้องใช้ตรวจสอบจากอนุพันธ์อันดับที่ 1 โดยพิจารณาการเป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือฟังก์ชันลดของ f เฉพาะบนช่วง $(-1, 0)$ และ $(0, 1)$ ดังนี้

f' 	ตาราง 4.18			
	ช่วง	ค่าทดสอบ	เครื่องหมายของ f'	ผลสรุป
	$-1 < x < 0$	$-\frac{1}{2}$	$f'(-\frac{1}{2}) > 0$ (+)	ฟังก์ชันเพิ่ม
	$0 < x < 1$	$\frac{1}{2}$	$f'(\frac{1}{2}) > 0$ (+)	ฟังก์ชันเพิ่ม
แสดงว่าจากซ้ายไปขวาของ $x = 0$ ความชันเป็นบวกเสมอ ดังนั้น $(0, 0)$ ไม่เป็นทั้งจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ กราฟของ f ดังรูป 4.111 □				



รูป 4.111 จุดกำเนิดเป็นจุดวิกฤตที่ไม่เป็นทั้งจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ตัวอย่าง 4.89

กำหนดให้ $f(x) = x^{2/3}(2x + 5)$

Using the Second
Derivative Test

จงพิจารณาว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุดใดบ้าง

วิธีทำ ขั้น 1 หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ f และเขียนในรูปของตัวประกอบ

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } f(x) &= x^{2/3}(2x + 5) &= 2x^{5/3} + 5x^{2/3} &\quad \text{จะได้} \\ f'(x) &= 2\left(\frac{5}{3}\right)x^{-1/3} + 5\left(\frac{2}{3}\right)x^{-1/3} &= \frac{10}{3}x^{-1/3}(x + 1) &= \frac{10(x+1)}{3x^{1/3}} \end{aligned}$$

ขั้น 2 หาจุดวิกฤตของ f ให้ $f'(x) = 0$ จะได้ $\frac{10(x+1)}{3x^{1/3}} = 0$

เราพบว่า $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = -1$ และ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้

เมื่อ $x = 0$ ดังนั้นจุดวิกฤตของ f อยู่ที่ -1 และ 0

ขั้น 3 ตรวจสอบด้วยอนุพันธ์อันดับที่สอง

$$f''(x) = -\frac{10}{3}\left(\frac{2}{3}\right)x^{-4/3} + \frac{10}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3} = \frac{10}{9}x^{-4/3}(2x - 1) = \frac{10(2x-1)}{9x^{4/3}}$$

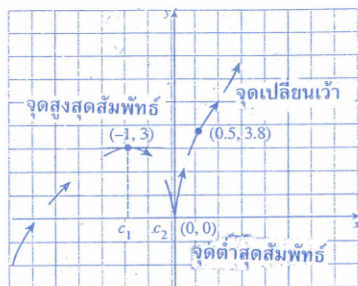
ที่ $x = -1$, $f''(-1) = -\frac{10}{3} < 0$ จะได้ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์และ $f(-1) = 3$

ที่ $x = 0$, $f''(0)$ หาค่าไม่ได้ พิจารณาเครื่องหมายของความชันด้านซ้ายและด้านขวาของ 0 จากตารางข้างล่างนี้

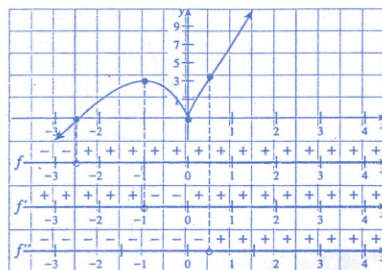
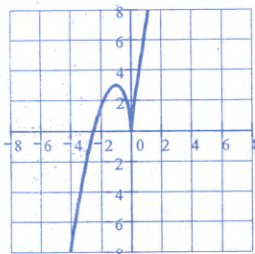
ตาราง 4.19

	ช่วง	ช่วง	ช่วง
ตัวประกอบของ $f'(x)$	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x$
$10x - 1/3$	-	-	+
$x + 1$	-	+	+
$f'(x) = 10x - 1/3(x + 1)$	+	-	+

จากตารางค่าของ $f'(x)$ เราพบว่าบนช่วง $(-1, 0)$ ค่า $f'(x) < 0$ จะได้ f เป็นฟังก์ชันลดลงในช่วง $(-1, 0)$ บนช่วง $(0, \infty)$ ค่า $f'(x) > 0$ จะได้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นในช่วง $(0, \infty)$ ดังนั้นที่ $x = 0$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และ $f(0) = 0$ ดังรูป 4.112



$$f(x) = x^{2/3}(2x + 5)$$



รูป 4.112

ตัวอย่าง 4.90

กำหนดให้ $f(x) = (x - 1)^3$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$

จงพิจารณาว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุดใดบ้าง

วิธีทำ ขั้นที่ 1 หาอนุพันธ์ของ f จะได้ $f'(x) = 3(x - 1)^2$

ขั้นที่ 2 หาจุดวิกฤตของ f ให้ $f'(x) = 0$

จึงได้ว่า $3(x - 1)^2 = 0$ เมื่อ $x = 1$ เท่านั้น ดังนั้น จุดวิกฤตของ f คือ 1

ขั้นที่ 3 ตรวจสอบจุดวิกฤตด้วยอนุพันธ์อันดับที่สอง

จะได้ $f''(x) = 6(x - 1)$ ที่ $x = 1$ เราได้ $f''(1) = 0$

จากทฤษฎี 4.11 สรุปไม่ได้ต้องตรวจสอบด้วยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งโดยการพิจารณาในช่วงทางซ้ายของจุดนี้กับในช่วงทางขวาของจุดนี้ฟังก์ชันมีการเปลี่ยนแปลงลักษณะของการเพิ่มขึ้นหรือลดลงหรือไม่ ซึ่งดูได้จากค่าของ $f'(x)$

เนื่องจาก $f'(x) = 3(x - 1)^2 > 0$ ทั้งในช่วง $(-\infty, 1)$ และ $(1, \infty)$ f จึงเป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นทั้งในช่วงทางซ้ายของ 1 และในช่วงทางขวาของ 1 ค่า $f(1) = 0$ ไม่เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์และไม่เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุดใด ๆ ดังรูป 4.113

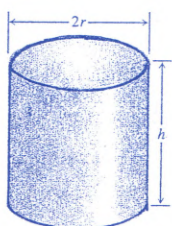
4.8 การประยุกต์ค่าสูงสุด และค่าต่ำสุด (Application of Maximum and Minimum Value)

เป็นผู้ค้นพบ คำตอบทั่วไป
สำหรับการสมการเส้นสัมผัส
ของ Kappa Curve เป็นนัก
คณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ
เขาเป็นลูกศิษย์ของ Barrow
ถือว่าเป็นผู้หนึ่งที่มีผลงานที่
เกี่ยวข้องกับการพัฒนา
แคลคูลัสในระยะเริ่มต้น มี
ชีวิตอยู่ในช่วง ค.ศ.1630-
1677



ISAAC BARROW

มีปัญหาที่เกี่ยวกับการหาวิธีที่ดีและเหมาะสมที่สุด เพื่อดำเนินงานเป็นจำนวนมากที่
สามารถลดทอนให้เป็นปัญหาของการหาค่าสูงสุดและค่าสุดของฟังก์ชันได้ ดังตัวอย่างเช่น
ถ้าเรามีแผ่นโลหะบาง ๆ แผ่นหนึ่ง และต้องการนำมาสร้างเป็นกระป๋องรูปทรงกระบอก
ฐานกลมใบหนึ่งที่มีขนาดบรรจุ 2000 ลูกบาศก์เซนติเมตร โดยต้องการให้ใช้แผ่นโลหะที่
ทำกระป๋องมีพื้นที่ผิวน้อยที่สุด ดังรูป 4.139



กระป๋องจุ 2 ลิตร

ด้านล่าง



+

ด้านข้าง



พื้นที่ผิวกระป๋องจุ 2 ลิตร

รูป 4.139

เราทำได้โดยพิจารณาว่าพื้นที่ผิวของกระป๋องเป็นฟังก์ชันของปริมาณใด ในที่นี้เรา
จะเห็นได้ว่าตัวแปรที่ส่งผลให้พื้นที่ผิวของกระป๋องจะเกิดขึ้นมีพื้นที่ต่าง ๆ กัน ก็คือ
รัศมีที่ฐานของวงกลมและส่วนสูงของกระป๋องที่มีปริมาตร 2000 ลูกบาศก์เซนติเมตร
เราสามารถสร้างฟังก์ชันของพื้นที่ผิวของกระป๋องให้เป็นฟังก์ชันของรัศมีที่ฐานเพียงตัว
เดียวได้ จากความสัมพันธ์ของปริมาตรของกระป๋องขนาด 2000 ลูกบาศก์เซนติเมตร
ส่วนสูงและรัศมีที่ฐานของกระป๋อง แล้วใช้ขั้นตอนของการหาค่าสูงสุด และค่าต่ำสุด
ในหัวข้อ 4.4 หาจุดวิกฤต และตรวจสอบจุดวิกฤตว่า ให้ค่าสูงสุด หรือ ค่าต่ำสุด

ในการแก้ปัญหาโจทย์เรื่องค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันให้ยึดหลักต่อไปนี้

1. ตรวจสอบว่ามีปริมาณหรือตัวแปรค่าอะไรบ้างที่กล่าวถึงวาดรูปประกอบถ้าทำได้ แสดงรายละเอียดตลอดจนให้ตัวอักษร แทนค่าตัวแปรค่าต่าง ๆ
2. เขียนฟังก์ชันที่โจทย์กำหนดให้ในเทอมของตัวแปรค่าต่าง ๆ และกำหนดขอบเขตของตัวแปรให้ได้จากเงื่อนไขของโจทย์
3. ถ้าฟังก์ชันข้อ 2. มีตัวแปรมากกว่าหนึ่ง ต้องหาความสัมพันธ์ของตัวแปรเหล่านั้น (จากโจทย์หรือจากเรขาคณิตหรือสูตรความจริงอื่น ๆ) ทำให้เหลือตัวแปรค่าเพียงตัวเดียว
4. หาค่าวิกฤตของฟังก์ชันโดยวิธีที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 4.4
5. ในการแก้ปัญหาโจทย์โดยมากไม่ต้องทดสอบค่าวิกฤต ใช้พิจารณาจากสามัญสำนึกอย่าลืมความจริงในทางปฏิบัติของค่าวิกฤตว่าเป็นไปได้หรือไม่
6. ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดที่ต้องการมักจะเป็นค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ จึงควรตรวจสอบค่าที่ปลายช่วงด้วย

ตัวอย่าง 4.118

เกษตรกรคนหนึ่งต้องการกั้นคอกเลี้ยงนกกระจอกเทศเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเข้ากับผาด้านหนึ่งของโรงเลี้ยงไก่ ถ้าเขามีสวนตาข่ายยาว 80 เมตรเขาควรจะทำคอกที่มีขนาดกว้าง และยาวเท่าไรจึงจะมีพื้นที่มากที่สุด และมีพื้นที่เท่าไร

วิธีทำ สมมติให้เขากั้นคอกเลี้ยงนกกระจอกเทศโดยให้ด้านกว้างยาวเท่ากับ x เมตร ดังรูป 4.140 จะได้ว่า ด้านที่เหลือเป็นด้านยาวมีความยาวเท่ากับ $80 - 2x$ เมตร ให้ A แทนพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าของคอกเลี้ยงนกกระจอกเทศ

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } A &= \text{กว้าง} \times \text{ยาว} &= x(80 - 2x) \\ &= 80x - 2x^2 &\text{เมื่อ } 0 < x < 40 \end{aligned}$$

ขั้น 1 หาอนุพันธ์ของ A เทียบกับ x

$$\frac{dA}{dx} = \frac{d}{dx}(80x - 2x^2) = 80 - 4x$$

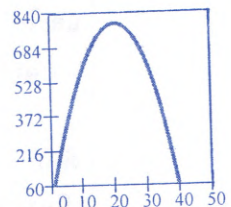
ขั้น 2 หาค่าวิกฤตของ A ให้ $\frac{dA}{dx} = 0$ จะได้

$$80 - 4x = 0 \quad \text{ดังนั้น} \quad x = 20$$

ขั้น 3 ตรวจสอบค่าวิกฤตด้วยอนุพันธ์อันดับสอง

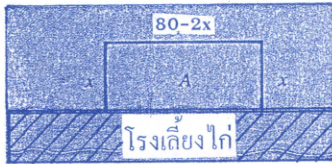
$$\frac{d^2A}{dx^2} = \frac{d}{dx}(80 - 4x) = -4$$

$$\text{เมื่อ } x = 20 \quad \text{จะได้} \quad \frac{d^2A}{dx^2} \Big|_{x=20} = -4 < 0$$

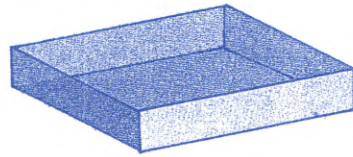


จากทฤษฎี 4.1 จะได้ว่า $x = 20$ ให้ค่า $A(20)$ มากที่สุด และ
 $A(20) = 80(20) - 2(20)^2 = 800$ ตารางหน่วย
 ดังนั้น เขาควรกันคอกเลี้ยงนกกว้าง 20 เมตร ยาว 40 เมตร จึงจะมีพื้นที่มากที่สุดเท่ากับ 800 ตารางหน่วย $\square$

คอกนกกระเจอกเทศ



รูป 4.140



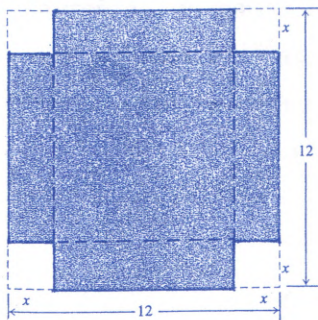
กล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากไม่มีฝา

รูป 4.141

ตัวอย่าง 4.119

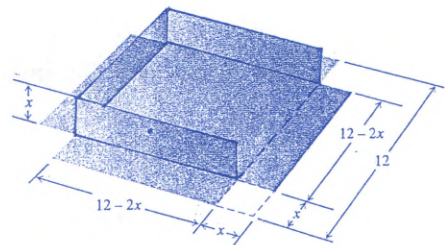
ต้องการทำกล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากไม่มีฝาจาก แผ่นโลหะรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 12 นิ้ว โดยตัดมุมทั้ง 4 ออก ดังรูป 4.141 ก. แล้วพับขอบขึ้นประกอบกันเป็นกล่องฝาเปิดดังรูป 4.141 ข. ให้ได้กล่องที่มีปริมาตรมากที่สุด จงหาว่าจะได้กล่องขนาดเท่าใด และมีปริมาตรมากที่สุดเท่าใด

วิธีทำ สมมติให้ x เป็นความกว้างของมุมรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เราตัดออกจากแผ่นโลหะขนาด 12×12



ก.

รูป 4.141



ข.

และให้ v เป็นปริมาตรของกล่องที่ต้องการหาค่าสูงสุด จากรูป เราจะได้ว่ากล่องมีความสูง x นิ้ว ฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ $12 - 2x$ นิ้ว จากสูตร

$$\text{ปริมาตรของกล่อง} = \text{กว้าง} \times \text{ยาว} \times \text{สูง}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad V(x) = x(12 - 2x)^2 \quad \dots\dots\dots(1)$$

เนื่องจากแผ่นโลหะมีความกว้างด้านละ 12 นิ้ว การตัดมุมรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกไปจึงได้ไม่เกิน 6 นิ้ว ดังนั้น สูตรบอกค่า $V(x)$ นี้จึงใช้ได้กับ x ที่สอดคล้อง $0 < x < 6$ เท่านั้น

กล่าวคือฟังก์ชัน V มีโดเมนเป็น $[0,6]$ ดังนั้นปัญหาโจทย์ข้อนี้ก็คือปัญหาการหาค่า $V(x)$ มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์เมื่อใด และค่าสูงสุดเป็นเท่าใด

ขั้น 1 หอนุพันธ์ของ V

$$\begin{aligned} V'(x) &= \frac{d}{dx}(x(12 - 2x^2)) = x(2(12 - 2x)(-2x)) + (12 - 2x)^2 \\ &= (12 - 2x)(12 - 6x) \end{aligned}$$

ขั้น 2 หาจุดวิกฤตของ V ให้ $v'(x) = 0$

$$\text{จะได้ } (12 - 2x)(12 - 6x) = 0 \text{ เมื่อ } x = 6 \text{ และ } x = 2$$

เนื่องจาก $x = 6$ ไม่อยู่ในโดเมนของ V จึงมีเพียง $x = 2$ เพียงจุดเดียวที่

เป็นจุด

ภายในโดเมนของ V ที่ทำให้ $v'(x) = 0$

ขั้น 3 ตรวจสอบด้วยอนุพันธ์ที่สอง

$$\begin{aligned} V''(x) &= \frac{d}{dx}((12 - 2x)(12 - 6x)) = (12 - 2x)(-6) + (12 - 6x)(-2) = \\ &= 24x - 96 \text{ ที่ } x = 2, v''(2) = 24(2) - 96 = -48 < 0 \text{ จะได้ว่า } V \text{ มี} \\ &\text{ค่าสูงสุดที่ } x = 2 \text{ และค่าสูงสุด } V(2) = 2(12 - 4)^2 = 128 \end{aligned}$$

ที่จุดปลายของโดเมนที่ $x = 0, V(0) = 0$ และที่ $x = 6, V(0) = 0$

ดังนั้น กล้องนี้มีขนาดสูง = 2 นิ้ว ฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 10 นิ้ว และปริมาตรของกล้องนี้คือ $V(2) = 2(12 - 2(2))^2 = 128$ ลูกบาศก์นิ้ว



ตัวอย่าง 4.120

สมมติเราต้องการผลิตกระป๋องด้วยแผ่นโลหะรูปทรงกระบอกมีฝาปิดขนาดบรรจุ 2,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร (2 ลิตร) จงหาขนาดของกระป๋องซึ่งสิ้นเปลืองโลหะในการผลิต (พื้นที่ผิว) น้อยที่สุด

วิธีทำ ให้ r และ h เป็นรัศมีของฐาน และส่วนสูงของกระป๋องวัดเป็นเซนติเมตร ดังรูป 4.142 และให้ S เป็นพื้นที่ผิวของโลหะที่ใช้ทำกระป๋องรวมฐานและฝากระป๋อง

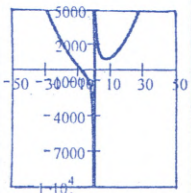
$$\text{ดังนั้น } S = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{พื้นที่ฐานและฝา}} + \underbrace{2\pi rh}_{\text{พื้นที่ด้านข้างกระป๋อง}} \quad \text{.....(1)}$$

ในที่นี้เราต้องการหาค่า S ที่มีค่าน้อยที่สุด การเขียน S ให้เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว (เช่น r) เราต้องจัด h ในเทอมของ r

$$\text{ให้ } V \text{ เป็นปริมาตรของกระป๋อง จะได้ } V = \pi r^2 h = 2000$$

$$\text{เราจะได้ } h = \frac{2000}{\pi r^2} \quad \text{.....(2)}$$

$$\text{แทนค่า } h \text{ ในสมการ (1) จะได้ } S = 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{2000}{\pi r^2} \right)$$



$$S = 2\pi r^2 + \frac{4000}{r}, \quad r > 0 \quad \text{.....(3)}$$

หาค่าน้อยที่สุดของ S ที่เป็นฟังก์ชันของ r ตามขั้นตอนในหัวข้อ 4.4

ขั้นที่ 1 หาอนุพันธ์ของ S : $S'(r) = 4\pi r - \frac{4000}{r^2}$

ขั้นที่ 2 หาจุดวิกฤตของ S : ให้ $S'(r) = 0$ จะได้

$$4\pi r - \frac{4000}{r^2} = 0 \quad \text{หรือ} \quad \frac{4\pi r^3 - 4000}{r^2} = 0$$

เนื่องจาก $r > 0$ จะได้ $r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} \cong 6.827256$

ดังนั้น $\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ เป็นจุดวิกฤตเพียงจุดเดียวของ S ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ r

ขั้นที่ 3 ตรวจสอบจุดวิกฤตด้วยอนุพันธ์อันดับสอง

เพราะว่า $S''(r) = \frac{d}{dr}(4\pi r - 4000r^{-2}) = 4\pi + \frac{8000}{r^3} > 0$, ทุกค่า $r > 0$

จากทฤษฎี 14.1 $S(10/\sqrt[3]{\pi})$ เป็นค่าน้อยที่สุดของ S เพราะว่า S มีค่าวิกฤตเพียงค่าเดียวบนช่วง $(0, \infty)$ ดังนั้น $S(10/\sqrt[3]{\pi})$

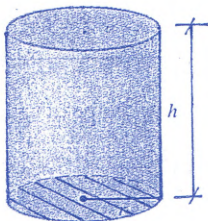
เป็นค่าน้อยที่สุดของ S แทนค่า $r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ ลงในสมการ (2)

จะได้ $h = \frac{2000}{\pi(10/\sqrt[3]{\pi})^2} = \frac{20}{\sqrt[3]{\pi}} \cong 13.654512$

นั่นคือพื้นที่ผิวของกระป๋องที่น้อยที่สุดในการผลิตกระป๋องขนาด 2,000 ลูกบาศก์เซนติเมตรเมื่อมีรัศมีของฐาน $\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} \cong 6.82$ เซนติเมตร

และสูง $\frac{20}{\sqrt[3]{\pi}} \cong 13.65$ เซนติเมตร □

กระป๋อง 2 ลิตร



$V = 2000$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

ก.



ด้านล่าง

2 ชิ้น

รูป 4.142

$2\pi r$



ด้านข้าง

ข.

บรรณานุกรม

- Adam, Robert A. **Calculus ,4th Edition.** Addison Wesley, U.S.A.,1999.
- Anton, Howard. **Calculus ,4th Edition.** John Wiley, U.S.A.,1992.
- Anton, Howard. **Calculus Late Transcendentals, 9th Edition.** John Wiley, U.S.A.,2010.
- Bahder, Thomas B. **Mathematica For Scientists and Engineers.** Addison Wesley,1995.
- Baipai, Mustoe Walker. **Engineering Mathematics,2nd Edition.** John Wiley, U.S.A.,1990.
- Burgmeier, James. W. **Calculus With Applications.** McGraw-Hill, U.S.A.,1990.
- Cramdall, Richard. **Mathematica for the Sciences.** Addison Wesley, U.S.A., 1990.
- Dale Varberg and Purcell,Edwin J. **Calculus ,7th Edition.** Prentice-Hall International, U.S.A.,1997.
- Edwards&Penney, **Calculus with Analytic Geometry ,5th Edition.,**Prentice-Hall,Inc., New Jersey, U.S.A.,1998.
- Edwards&Penney, **Calculus ,6th Edition.,**Prentice-Hall,Inc.,New Jersey U.S.A.,2002.
- Evans. **Engineering Mathematics ,2nd Edition.** Chapman & Hall,1993.
- Grove, Margaret. **Studymate HSC3 and 4 UNIT Mathematics.** McGraw-Hill,1992.
- Holder, Derfranza, Pasachaff. **Calculus.** Brooks/Cole,1995.
- Jeffrey, Alam. **Essentials of Engineering Mathematics.** Chapman & Hall,1995.
- James, Glyn. **Engineering Mathematics ,2nd Edition.** Addison Wesley,U.S.A.,1996.
- James Stewart, **Calculus, 5nd Edition. ,** Thomson Learning Addison , Inc.,U.S.A.,2003
- Kaufmann, Jerome E. **Precalculus 3rd Edition.** PWS Publishing Company,1995.
- Larson ,Roland E. Hostetler Robert P. and Edwards Bruce H. **Calculus with Analytic Geometry , 5th Edition.** D.C. Health Company ,Canada ,1994.
- Mizrahi&Sullivan. **Calculus & Analytic Geometry, 3rd Edition.** Wadsworth,1990.
- Ostebee , Arnold. and Zorn ,Porn.**Calculus.** Saunders College Publishing, New York,1997.
- Repka,Joe. **Calculus & Analytic Geometry.** Wm.C.Brown Publishers,U.S.A.,1994.
- Salas,Hill and Etgen **Calculus one Variable ,8th Edition.** John Wiley and Sons.Inc. New York, U.S.A.,1999.
- Tomas&Finney. **Calculus & Analytic Geometry,11th Edition.** Addison –Wesley Publishing Company,Inc.,U.S.A.,2003.