

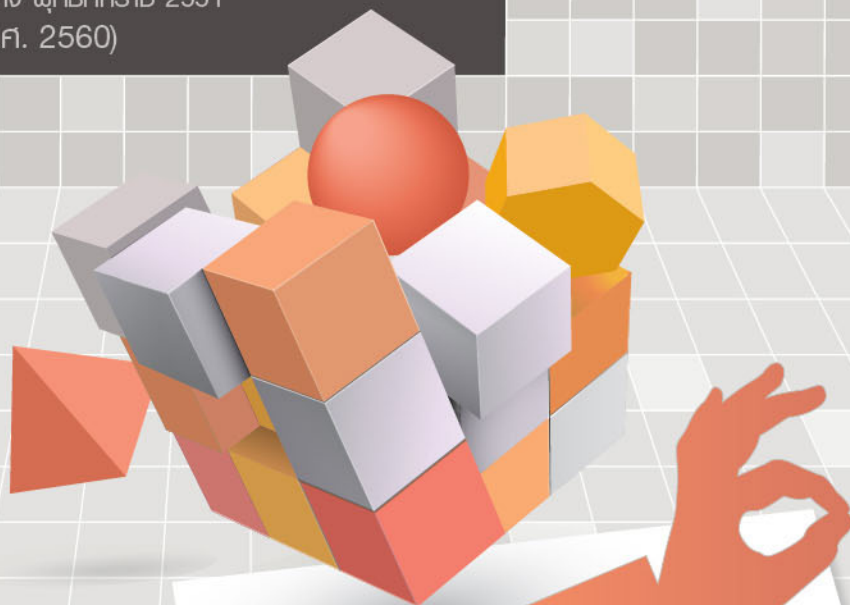
สรุปยอดคำนวณและเทคนิคคิดลัด

คณิตศาสตร์

เพิ่มเติม

ม.5 เล่ม 2

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ตามหลักสูตรแกนกลาง พุทธศักราช 2551
(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)



จะเขียนคมและฉลากทาง
ต้องอ่าน เล่มนี้เท่านั้น

สรุปเนื้อหา และเทคนิคที่สำคัญ

แบบฝึกประจำบท พร้อมเฉลย

เนื้อหา

- จำนวนเชิงซ้อน
- หลักการนับเบื้องต้น
- ความน่าจะเป็น

เรียบเรียงโดย

ดร.จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง

วศ.บ. (ไฟฟ้า ฉุกเฉิน)

ค.ม. (การจัดการคุณภาพ มรท.สวนสุนันทา)

ผศ.ด. (เทคโนโลยีการศึกษา ม.เกษตรศาสตร์)

นักวิชาการอิสระด้านคณิต วิทยา และเทคโนโลยีการศึกษา

สรุปยอดคำนวณและเทคนิคคิดลัด

คณิตศาสตร์

เพิ่มเติม

ม.5 เล่ม 2

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (หลักสูตรปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551



จะเขียนคณและฎาทาง
ต้องอ่าน เล่มนี้เท่านั้น

สรุปเนื้อหา และเทคนิคที่สำคัญ

แบบฝึกประจำบท พร้อมเฉลย

เนื้อหา

- จำนวนเชิงซ้อน
- หลักการนับเบื้องต้น
- ความน่าจะเป็น

เรียบเรียงโดย

ดร.จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง

วศ.บ. (ไฟฟ้า วิทยา)

ค.บ. (การจัดการคุณภาพ มรณ.สวนสุนันทา)

ศษ.ด. (เทคโนโลยีการศึกษา ม.เกษตรศาสตร์)

นักวิชาการอิสระด้านคณิต วิทยา การจัดการคุณภาพ และเทคโนโลยีการศึกษา

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ (ฉบับเพิ่มเติม) พ.ศ. ๒๕๕๘

สุดยอดคำนวณและเทคนิคคิดลัด

คณิตศาสตร์

ม.5 เล่ม 2 (เพิ่มเติม)

(หลักสูตรปรับปรุง พ.ศ.2560)

ผู้เรียบเรียง : **ดร.จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง**

คณิตศาสตร์

-:2:-

เพิ่มเติม
ม.5 เล่ม 2

กองบรรณาธิการ : อรศรี โรจน์พจนรัตน์, ณัฐธินันท์ ลูกเสือดารา, อมรศักดิ์ บุญเรือง, สถาพร พุทธิศิริพร,
พิรุณณิชา ไบสุวรรณ, มนชญา กมลวานนท์, ยุภาภรณ์ แต่งมณี

จัดพิมพ์โดย : บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด

12 หม่อมแฝ้ว แยก 3 ถนนพระราม 6 (ซอย 41) แขวงสามเสนใน เขตพญาไท กรุงเทพฯ 10400

โทร 02-279-6222 โทรสาร 02-279-6203-4

พิมพ์ที่ : บริษัท ธนรัชการพิมพ์ จำกัด

43/100 หมู่ที่ 5 ซ.เทอดพระเกียรติ 1 ถ.เทอดพระเกียรติ ต.วัดชลอ อ.บางกรวย จ.นนทบุรี 11130

ผู้พิมพ์ - ผู้โฆษณา

นางนงลักษณ์ ธนกุลโรจน์



หนังสือเล่มนี้พิมพ์ด้วย กระดาษรีไซเคิล 100%
กระดาษจากไม้ปลูก ไม่รบกวนไม้ธรรมชาติ



หนังสือ คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2 (เพิ่มเติม) เล่มนี้ เป็นหนังสือที่มีเนื้อหาตรงตามผลการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (หลักสูตรปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และยังได้สอดแทรกเนื้อหาที่เกินหลักสูตรพร้อมทั้งเทคนิคคิดลัดต่างๆ ตามที่ผู้เขียนเห็นว่าสำคัญ เนื่องจากผู้เขียนเห็นว่าการศึกษาคณิตศาสตร์ให้ประสบความสำเร็จได้นั้น ผู้ศึกษาจะต้องมีความรู้พื้นฐานในวิชาคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี และจะต้องมีเทคนิคคิดลัดต่างๆ เพื่อช่วยให้ผู้ศึกษาสามารถแก้ไขปัญหาโจทย์และแข่งขันกับเวลาได้อย่างรวดเร็ว

1. การอธิบายเนื้อหาในหนังสือเล่มนี้จะใช้ภาษาเดียวกับภาษาที่ผู้เขียนใช้สอน ดังนั้น จึงอ่านง่ายและเพลิดเพลินไปกับบทเรียน ทำให้ผู้อ่านมีความรู้สึกเหมือนกับว่าผู้เขียนมาสอนให้เองเลย
2. ครอบคลุมเนื้อหาพื้นฐานที่สำคัญโดยจะมีการแบ่งเนื้อหาให้เป็นระบบเพื่อจะได้ศึกษาได้ง่าย
3. โจทย์ในหนังสือเล่มนี้จะมีมากมายเพียงพอที่ผู้ศึกษาจะฝึกทำเพื่อเสริมสร้างทักษะและประสบการณ์ในการทำโจทย์
4. หนังสือเล่มนี้จะเน้นถึงเทคนิคและการวิเคราะห์โจทย์ต่างๆ อย่างเป็นระบบ
5. มีเทคนิคคิดลัดต่างๆ เพื่อช่วยให้ผู้ศึกษาทำข้อสอบแข่งขันได้อย่างรวดเร็ว
6. แนวข้อสอบเตรียมสอบเข้ามหาวิทยาลัย ระบบ TCAS

สุดท้ายนี้ผู้เขียนหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะให้ประโยชน์แก่ผู้อ่าน และขอขอบคุณ บริษัท สำนักพิมพ์ พ.ศ. พัฒนา จำกัด ที่ให้โอกาสแก่ผู้เขียนได้เขียนหนังสือที่อยากเขียน สำหรับคุณงามความดีที่พึงมีจากหนังสือเล่มนี้ ขอมอบให้แก่พ่อแม่ครูอาจารย์ คือ พระราชสวัญญาณ (พุทธ ฐานิโย) บุพการี คือ ผอ.ประเสริฐ วรรณโพธิ์กลาง และนางสนาน วรรณโพธิ์กลาง พร้อมทั้งครูอาจารย์ผู้ประสิทธิ์ประสาทวิชาแก่ผู้เขียน

ด้วยความปรารถนาดี

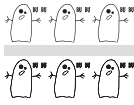
จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง

(ดร.จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง)

คณิตศาสตร์

—:3:—

เพิ่มเติม
ม.5 เล่ม 2



สารบัญ

บทที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

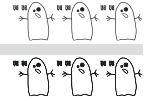
จำนวนจินตภาพแท้	7
จำนวนเชิงซ้อน	13
การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน	14
การบวกกันของจำนวนเชิงซ้อน	15
การลบกันของจำนวนเชิงซ้อน	17
การคูณกันของจำนวนเชิงซ้อน	19
การหารกันของจำนวนเชิงซ้อน	21
สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน	24
การดำเนินการ	24
สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน	26
รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน	29
กราฟของจำนวนเชิงซ้อน	30
ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน	31
กราฟของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน	37
เวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อน	39
รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน	40
การคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว	44
การยกกำลังของจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนเต็มบวก	45
การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน	48
สมการพหุนามตัวแปรเดียว	60
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน (พร้อมเฉลย)	69

คณิตศาสตร์

-:4:-

เพิ่มเติม
ม.5 เล่ม 2

สารบัญ



บทที่ 2 หลักการขับเบื้องต้น

เกริ่นนำ	77
หลักการมูลฐานเกี่ยวกับการขับ	79
หลักการคูณ	79
หลักการบวก	83
หลักการยุบวิธีที่จะทำงาน	85
หลักการลบ	86
แฟกทอเรียล	87
วิธีเรียงสับเปลี่ยน	89
การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด	89
การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด	93
การจัดหมู่	111
ทฤษฎีบททวินาม	166
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2 หลักการขับเบื้องต้น (พร้อมเฉลย)	178

บทที่ 3 ความน่าจะเป็น

การทดลองสุ่ม	183
ปริภูมิตัวอย่าง	184
เหตุการณ์	186
ความน่าจะเป็น	192
การใช้เซตช่วยหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์	223
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3 ความน่าจะเป็น (พร้อมเฉลย)	250

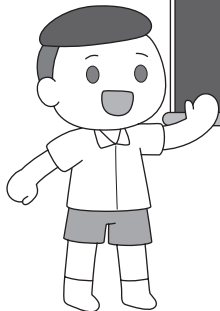
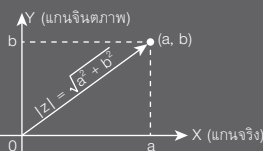
คณิตศาสตร์

--5:--

เพิ่มเติม
ม.5 เล่ม 2

จำนวนเชิงซ้อน

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน



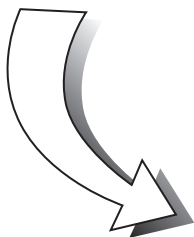
หลักการนับเบื้องต้น

กรณีที่ 1	→	n_1 วิธี
กรณีที่ 2	→	n_2 วิธี
กรณีที่ 3	→	n_3 วิธี
		...
กรณีที่ k	→	n_k วิธี

ทิศทางการทำงาน →

จุดเริ่มต้นการทำงาน

จุดสิ้นสุดการทำงาน



ความน่าจะเป็น



คณิตศาสตร์

--:6:--

เพิ่มเติม
ม.5 เล่ม 2

❖ ปัญหาที่เกิดขึ้นในระบบจำนวนจริง

ในระบบจำนวนจริง “สมการ $x^n = a$ เมื่อ n เป็นเลขคู่ และ a เป็นจำนวนจริงลบ” เป็นสมการที่ไม่สามารถหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริงได้

เช่น ถ้าเราไปเจอสมการ $x^2 = -9$ แล้วเราจะต้องรู้ทันทีเลยว่าไม่สามารถหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริง ที่ทำให้ $x^2 = -9$ ถ้าไม่เชื่อแล้วให้ลองพยายามหาดูนะผู้เขียนรับรองว่าหาไม่เจอแน่

ดังนั้น จึงได้มีนักคณิตศาสตร์ท่านหนึ่งได้คิดสร้างระบบจำนวนขึ้นมาใหม่เพื่อให้สามารถหาคำตอบของสมการประเภทนี้ได้ และเรียกจำนวนที่สร้างขึ้นใหม่นี้ว่า “จำนวนเชิงซ้อน”

❖ จำนวนจินตภาพแท้ (Pure Imaginary Number)

ก่อนที่นักคณิตศาสตร์จะสร้างระบบจำนวนเชิงซ้อนขึ้นมาเขยชม นักคณิตศาสตร์ได้สร้างจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนจริงที่ถูกเรียกว่า “จำนวนจินตภาพแท้” ขึ้นมาจากบทนิยามที่จะกล่าวต่อไป เพื่อเป็นพื้นฐานในการสร้างระบบจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

๑ บทนิยาม

1. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว

$\sqrt{-a}$ จะถูกเรียกว่า “จำนวนจินตภาพแท้ (Pure Imaginary Number)”

2. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \sqrt{-1}$

ทำให้ทราบว่า $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \sqrt{-1}$

$$\sqrt{-5} = \sqrt{5} \sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-7} = \sqrt{7} \sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9} \sqrt{-1} = 3\sqrt{-1} \text{ เป็นต้น}$$

3. นักคณิตศาสตร์ได้กำหนดให้ “ $\sqrt{-1}$ ถูกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ i ”

$$\text{ทำให้ทราบว่า } \sqrt{-3} = \sqrt{3} \sqrt{-1} = \sqrt{3} i$$

$$\sqrt{-5} = \sqrt{5} \sqrt{-1} = \sqrt{5} i$$

$$\sqrt{-7} = \sqrt{7} \sqrt{-1} = \sqrt{7} i$$

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9} \sqrt{-1} = 3\sqrt{-1} = 3i$$

คณิตศาสตร์

—:7:—

เพิ่มเติม
ม.5 เล่ม 2

4. นักคณิตศาสตร์ได้กำหนดต่ออีกว่า i ถูกยกกำลังได้ ดังนี้

$$4.1 \quad i^2 = i i$$

$$i^3 = i i i$$

$\vdots$

$$i^n = \underbrace{i i i \dots i}_{\leftarrow n \text{ ตัว} \rightarrow} i^n \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

$$4.2 \quad i^2 = i i = -1$$

ต้องรู้ทันทีเลยว่า

$$i^3 = i^2 i = (-1) i = -i$$

$$i^4 = i^2 i^2 = (-1) (-1) = 1$$

$$i^5 = (i^2)^2 i = (-1)^2 i = i$$

$$i^9 = (i^2)^4 i = (-1)^4 i = i \quad \text{เป็นต้น}$$

ตัวอย่าง 1 จงหาค่าของ $\sqrt{-7} \sqrt{-9}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \sqrt{-7} \sqrt{-9} &= (\sqrt{7} \sqrt{-1}) (\sqrt{9} \sqrt{-1}) \\ &= (\sqrt{7} i) (\sqrt{9} i) \\ &= \sqrt{7} \sqrt{9} i^2 \\ &= (\sqrt{7} \sqrt{9}) (-1) \\ &= -\sqrt{(7)(9)} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \sqrt{-7} \sqrt{-9} = -\sqrt{63}$$

$$\text{สิ่งที่จะต้องระวัง} \quad \sqrt{-7} \sqrt{-9} \neq \sqrt{(-7)(-9)}$$

$$\text{แสดงว่า} \quad \sqrt{-7} \sqrt{-9} \neq \sqrt{63}$$

$$\text{เนื่องจาก} \quad \sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ } a \text{ และ } b \geq 0$$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ

1. $\sqrt{-3} \sqrt{-5}$
2. $\sqrt{-9} \sqrt{-4}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad 1. \quad \sqrt{-3} \sqrt{-5} &= (\sqrt{3} i) (\sqrt{5} i) \\ &= \sqrt{15} i^2 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad = -\sqrt{15}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \sqrt{-9} \sqrt{-4} &= (\sqrt{9} i) (\sqrt{4} i) \\ &= (3 \times 2) i^2 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \sqrt{-9} \sqrt{-4} = -6$$

สิ่งที่ควรทราบจากบทนิยามเกี่ยวกับ i ที่ถูกยกกำลัง

1. ลองหาค่าของ i^1 , i^2 , i^3 และ i^4

$$i^1 = i \longrightarrow i^1 = i$$

$$i^2 = -1 \longrightarrow i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 i = (-1) i = -i \longrightarrow i^3 = -i$$

$$i^4 = i^2 i^2 = (-1) (-1) = 1 \longrightarrow i^4 = 1$$

ต้องจำให้ได้

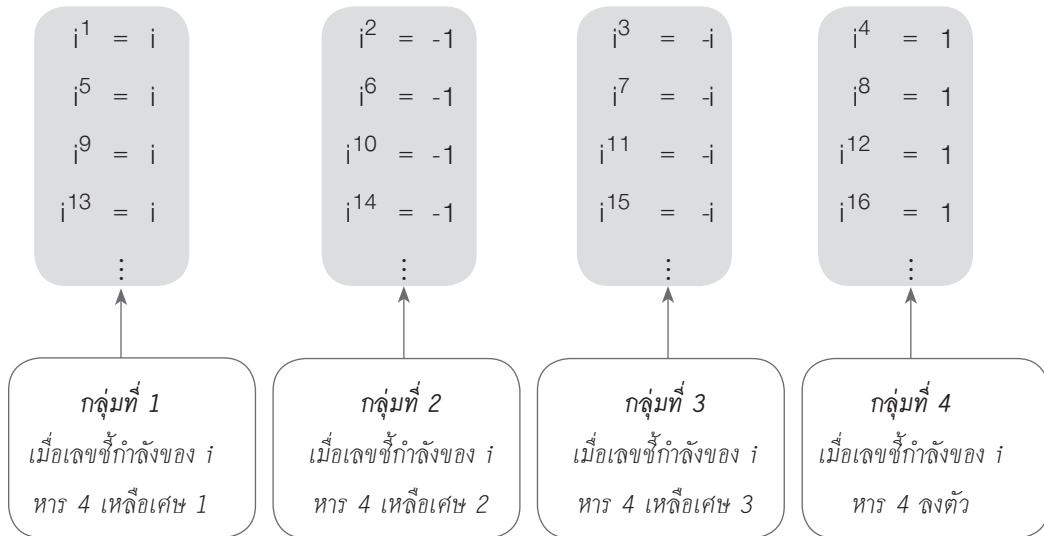
คณิตศาสตร์

-:8:-

เพิ่มเติม

ม.5 เล่ม 2

2. ลองหาค่าของ i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะพบว่าสามารถแยกเป็นกลุ่มได้ 4 กลุ่ม ดังนี้



สรุปไว้จดจำ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\text{แล้ว } i^n = i \text{ เมื่อ } \frac{n}{4} \text{ เหลือเศษ 1}$$

$$i^n = -1 \text{ เมื่อ } \frac{n}{4} \text{ เหลือเศษ 2}$$

$$i^n = -i \text{ เมื่อ } \frac{n}{4} \text{ เหลือเศษ 3}$$

$$i^n = 1 \text{ เมื่อ } \frac{n}{4} \text{ ลงตัว}$$

3. ลองสังเกตดูดีๆ จะเห็นได้ว่า

$$i + i^2 + i^3 + i^4 = (i) + (-1) + (-i) + (1) = 0$$

$$i^7 + i^8 + i^9 + i^{10} = (-i) + (1) + (i) + (-1) = 0$$

$$i^{102} + i^{103} + i^{104} + i^{105} = (-1) + (-i) + (1) + (i) = 0$$

และจะเป็นจริงด้วยว่า ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\text{ชุดของ } i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0 \text{ เสมอ}$$

ดังนั้น ถ้า i มีกำลังเรียงกันครบเป็นชุด 4 ตัว แล้วผลบวกของมันจะเท่ากับ 0 เสมอ

4. ลองสังเกตเพิ่มเติมอีกครั้งจะเห็นได้ว่า

$$i^2 i^3 i^4 = (i) (-1) (-i) (1) = -1$$

$$i^7 i^8 i^9 i^{10} = (-i) (1) (-1) = -1$$

$$i^{102} i^{103} i^{104} i^{105} = (-1) (-i) (1) (i) = -1$$

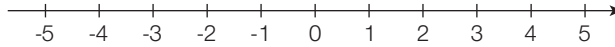
และจะเป็นจริงด้วยว่า ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\text{ชุดของ } i^n i^{n+1} i^{n+2} i^{n+3} = -1 \text{ เสมอ}$$

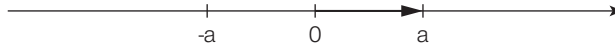
ดังนั้น ถ้า i มีกำลังเรียงกันครบเป็นชุด 4 ตัว แล้วผลคูณของมันจะเท่ากับ -1 เสมอ

๘ วิเคราะห์ i ที่ถูกยกกำลังด้วยเวกเตอร์เพื่อทำให้มองเห็นภาพได้ชัดเจน

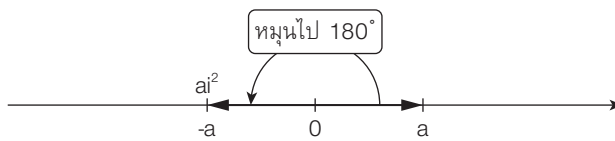
1. เส้นจำนวน ที่เรารู้กันเคยเป็นดังนี้



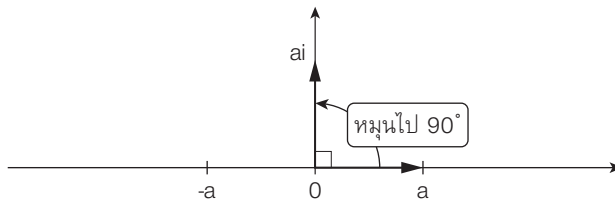
2. มีนักคณิตศาสตร์คนหนึ่งคิดสร้างเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นเป็น 0 และจุดสิ้นสุดเป็น a เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก ดังรูป



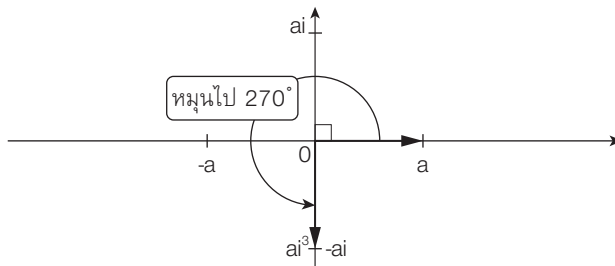
3. จากความรู้ที่ว่า $i^2 = -1$ แสดงว่า $ai^2 = a(-1) = -a$ ทำให้นักคณิตศาสตร์คนหนึ่งคิดว่า ai^2 น่าจะเป็นเวกเตอร์ที่เกิดจากเวกเตอร์ในข้อ 2 หมุนทวนเข็มนาฬิกาไป 180° ดังรูป



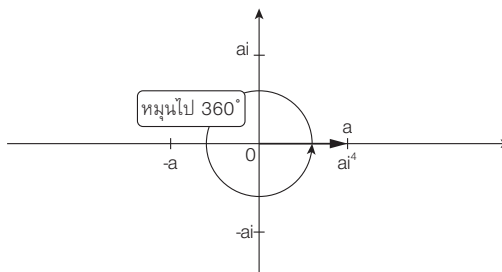
4. จากการสังเกตการณ์หมุนใน ข้อ 3. ทำให้นักคณิตศาสตร์คิดต่ออีกว่า ai น่าจะเป็นเวกเตอร์ที่เกิดจากเวกเตอร์ใน ข้อ 2. หมุนทวนเข็มนาฬิกาไป 90° เนื่องจากการหมุนทวนเข็มนาฬิกาไปครึ่งหนึ่งของ ai^2 ดังรูป



5. จากมุมมองที่ได้แสดงในข้างต้น ทำให้ทราบว่า $ai^3 = ai^2i = a(-1)i = -ai$ แสดงว่า ai^3 น่าจะเป็นเวกเตอร์ที่เกิดจากเวกเตอร์ในข้อ 2. หมุนทวนเข็มนาฬิกาไป 270° ดังรูป



6. พอถึงตรงนี้ เราต้องทบทวนที่เลยว่า $ai^4 = a i^2 i^2 = a (-1) (-1) = a$ แสดงว่า ai^4 น่าจะเป็นเวกเตอร์ที่เกิดจากเวกเตอร์ในข้อ 2. หมุนทวนเข็มนาฬิกาไป 360° กลับมาที่ตำแหน่งของเวกเตอร์ในข้อ 2. เดิม ดังรูป



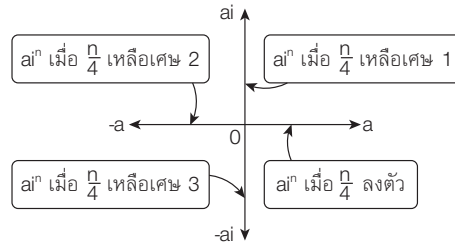
คณิตศาสตร์

-:10:-

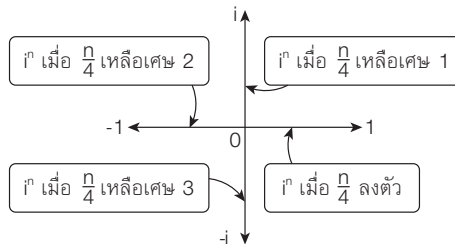
เพิ่มเติม
ม.5 เล่ม 2

ข้อสังเกต

เวกเตอร์จะเกิดการหมุนวนกลับมาที่ตำแหน่งเดิม เมื่อ ai^4 เป็นต้นไป ดังจะสรุปเป็นแผนภาพได้ดังนี้



และเราจะต้องทราบทันทีเลยว่าแผนภาพต่อไปนี่ก็เป็นจริงด้วย



ตัวอย่าง 1 จงหาค่าของ $\frac{i^{77} + i^{88} + i^{99} + i^{100}}{i^{12} + i^{25} + i^{35} + i^{176}}$

วิธีทำ $i^{12} = 1$ เนื่องจาก นำ 4 ไปหาร 12 แล้ว ลงตัว
 $i^{25} = i$ เนื่องจาก นำ 4 ไปหาร 25 แล้ว เหลือเศษ 1
 $i^{35} = -i$ เนื่องจาก นำ 4 ไปหาร 35 แล้ว เหลือเศษ 3
 $i^{77} = i$ เนื่องจาก นำ 4 ไปหาร 77 แล้ว เหลือเศษ 1
 $i^{88} = 1$ เนื่องจาก นำ 4 ไปหาร 88 แล้ว ลงตัว
 $i^{99} = -i$ เนื่องจาก นำ 4 ไปหาร 99 แล้ว เหลือเศษ 3
 $i^{100} = 1$ เนื่องจาก นำ 4 ไปหาร 100 แล้ว ลงตัว
 $i^{176} = 1$ เนื่องจาก นำ 4 ไปหาร 176 แล้ว ลงตัว

$$\text{จะได้ } \frac{i^{77} + i^{88} + i^{99} + i^{100}}{i^{12} + i^{25} + i^{35} + i^{176}} = \frac{i + 1 + (-i) + 1}{1 + i + (-i) + 1} = \frac{2}{2}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{i^{77} + i^{88} + i^{99} + i^{100}}{i^{12} + i^{25} + i^{35} + i^{176}} = 1$$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ $\sum_{k=1}^{500} ki^k$

วิธีทำ จากโจทย์

$$\sum_{k=1}^{500} ki^k = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + 5i^5 + 6i^6 + 7i^7 + 8i^8 + \dots + 497i^{497} + 498i^{498} + 499i^{499} + 500i^{500}$$

$$\text{ลองพิจารณา } i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 = i - 2 - 3i + 4 = 2 - 2i$$

$$5i^5 + 6i^6 + 7i^7 + 8i^8 = 5i - 6 - 7i + 8 = 2 - 2i$$

⋮

$$497i^{497} + 498i^{498} + 499i^{499} + 500i^{500} = 497i - 498 - 499i + 500 = 2 - 2i$$

คณิตศาสตร์

~:11:~

เพิ่มเติม
ม.5 เล่ม 2

แสดงว่า

$$\sum_{k=1}^{500} ki^k = \underbrace{i+2i^2+3i^3+4i^4}_{2-2i} + \underbrace{5i^5+6i^6+7i^7+8i^8}_{2-2i} + \dots + \underbrace{497i^{497}+498i^{498}+499i^{499}+500i^{500}}_{2-2i}$$

จะได้ $\sum_{k=1}^{500} ki^k = (2-2i) + (2-2i) + \dots + (2-2i)$

| $\xleftarrow{125 \text{ ชุด}}$ |

$= 125(2-2i)$

ดังนั้น $\sum_{k=1}^{500} ki^k = 250 - 250i$

๕๐ ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของ $i - i^3 + i^5 - i^7 + i^9 - i^{11} + \dots + i^{37} - i^{39}$

วิธีทำ

เลขยกกำลังของ i หาร 4 แล้ว เหลือเศษ 1

เลขยกกำลังของ i หาร 4 แล้ว เหลือเศษ 3

$$(i - i^3) + (i^5 - i^7) + (i^9 - i^{11}) + \dots + (i^{37} - i^{39})$$

แสดงว่า $i - i^3 + i^5 - i^7 + i^9 - i^{11} + \dots + i^{37} - i^{39} = (i+i) + (i+i) + (i+i) + \dots + (i+i)$

| $\xleftarrow{10 \text{ ชุด}}$ |

$= 2i + 2i + 2i + \dots + 2i$

ดังนั้น $i - i^3 + i^5 - i^7 + i^9 - i^{11} + \dots + i^{37} - i^{39} = 20i$

๕๐ ตัวอย่าง 4 จงหาค่าของ $i^{16} + i^{20} + i^{24} + i^{28} + \dots + i^{96}$

วิธีทำ

เลขยกกำลัง i หารด้วย 4 ลงตัว

$$i^{16} + i^{20} + i^{24} + i^{28} + \dots + i^{96}$$

| $\xleftarrow{21 \text{ ตัว}}$ |

แสดงว่า $i^{16} + i^{20} + i^{24} + i^{28} + \dots + i^{96} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1$

| $\xleftarrow{21 \text{ ตัว}}$ |

ดังนั้น $i^{16} + i^{20} + i^{24} + i^{28} + \dots + i^{96} = 21$

๕๐ ตัวอย่าง 5 จงหาค่าของ $(-i) + (-i)^2 + (-i)^3 + (-i)^4 + \dots + (-1)^{1982}$

วิธีทำ ลองพิจารณา $(-i) + (-i)^2 + (-i)^3 + (-i)^4 + \dots + (-1)^{1982}$

ผู้ศึกษาควรมอง $(-i) + (-i)^2 + (-i)^3 + (-i)^4 + \dots + (-i)^{1982}$ ให้เป็นชุดๆ ดังนี้

ชุดสุดท้ายที่หักล้างกันหมด ชุดที่เหลือ

$$\begin{aligned} & [(-i) + (-i)^2 + (-i)^3 + (-i)^4] + \dots + [(-i)^{1977} + (-i)^{1978} + (-1)^{1979} + (-i)^{1980}] + [(-i)^{1981} + (-i)^{1982}] \\ & \text{แสดงว่า } (-i) + (-i)^2 + (-i)^3 + (-i)^4 + \dots + (-i)^{1982} = (-i)^{1981} + (-i)^{1982} \\ & = -i^{1981} + i^{1982} \\ & = -i + (-1) \\ \text{ดังนั้น } & (-i) + (-i)^2 + (-i)^3 + (-i)^4 + \dots + (-i)^{1982} = -1 - i \end{aligned}$$

คณิตศาสตร์

-:12:-

เพิ่มเติม
ม.5 เล่ม 2

๑๐ ตัวอย่าง 6 จงหาค่าของ $\left(\frac{1}{i}\right) + \left(\frac{1}{i}\right)^2 + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{i}\right)^{74}$

วิธีทำ ลองพิจารณา $\left(\frac{1}{i}\right) + \left(\frac{1}{i}\right)^2 + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^4 = \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4}$

$$= \frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1$$

แสดงว่า $\left(\frac{1}{i}\right) + \left(\frac{1}{i}\right)^2 + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^4 = 0$

ผู้ศึกษาควรมอง $\left(\frac{1}{i}\right) + \left(\frac{1}{i}\right)^2 + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{i}\right)^{74}$ ให้เป็นชุดๆ ดังนี้

ชุดสุดท้ายที่หักล้างกันหมด ชุดที่เหลือ

$$\left[\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4}\right] + \left[\frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^8}\right] + \dots + \left[\frac{1}{i^{69}} + \frac{1}{i^{70}} + \frac{1}{i^{71}} + \frac{1}{i^{72}}\right] + \left[\frac{1}{i^{73}} + \frac{1}{i^{74}}\right]$$

แสดงว่า $\left(\frac{1}{i}\right) + \left(\frac{1}{i}\right)^2 + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{i}\right)^{74} = \frac{1}{i^{73}} + \frac{1}{i^{74}}$

ดังนั้น $\left(\frac{1}{i}\right) + \left(\frac{1}{i}\right)^2 + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{i}\right)^{74} = \frac{1}{i} - 1$

๑๑ จำนวนเชิงซ้อน [Complex Numbers]

๑ บทนิยาม

1. จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนซึ่งสามารถเขียนได้ 2 รูปแบบ ดังนี้

1. รูปแบบของคู่อันดับ $z = (a, b)$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ
2. รูปแบบมาตรฐาน $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ

ข้อตกลง ในการเรียกชื่อส่วนต่างๆ ของจำนวนเชิงซ้อน

- a ถูกเรียกว่า “ส่วนจริง (Real Part)” แทนด้วย $\text{Re}(z)$
- b ถูกเรียกว่า “ส่วนจินตภาพ (Imaginary Part)” แทนด้วย $\text{Im}(z)$
- จำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ เมื่อ $b \neq 0$ ถูกเรียกว่า “จำนวนจินตภาพ (Imaginary Number)”
- จำนวนเชิงซ้อน bi เมื่อ $b \neq 0$ ถูกเรียกว่า “จำนวนจินตภาพแท้ (Pure Imaginary Number)”

2. สำหรับ “จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ ใดๆ” สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน z ถูกเขียนแทนด้วย $\bar{z} = a - bi$

หมายเหตุ ผู้เขียนจะกล่าวถึงสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนอีกครั้งในหัวข้อสังยุค (Conjugate) ของจำนวนเชิงซ้อน ตอนนี้นำทราบดีว่าๆ ไปก่อนนะ

๑ สิ่งที่ต้องทราบจากบทนิยาม

1. เนื่องจาก $a = a + 0i$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง
ดังนั้น จำนวนจริงทุกตัว จะเป็น จำนวนเชิงซ้อน
2. เนื่องจาก $a + bi$ เมื่อ $a \neq 0, b \neq 0$ และ a, b เป็นจำนวนจริง ถูกเรียกว่า “จำนวนจินตภาพ”
ดังนั้น จำนวนจินตภาพทุกตัว จะเป็น จำนวนเชิงซ้อน
3. เนื่องจาก $bi = 0 + bi$ เมื่อ $b \neq 0$ และ b เป็นจำนวนจริง ถูกเรียกว่า “จำนวนจินตภาพแท้”
ดังนั้น จำนวนจินตภาพแท้ทุกตัว จะเป็น จำนวนเชิงซ้อน

คณิตศาสตร์

-:13:-

เพิ่มเติม
ม.5 เล่ม 2

- ข้อสังเกต**
1. เซตของจำนวนจริงเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อน
 2. เซตของจำนวนจินตภาพเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อน
 3. เซตของจำนวนจินตภาพแท้เป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อน

สรุปได้ว่า จำนวนเชิงซ้อนอาจเป็นจำนวนจริง, จำนวนจินตภาพ หรือจำนวนจินตภาพแท้ ก็ได้

☞ การเปรียบเทียบเชิงมากกว่าหรือน้อยกว่าของจำนวนเชิงซ้อน

ผู้เขียนอยากจะเน้น ให้ผู้ศึกษาระลึกอยู่เสมอว่า จำนวนจินตภาพและจำนวนจินตภาพแท้ไม่สามารถนำมาเปรียบเทียบกับกันได้เชิงมากกว่าหรือน้อยกว่า เช่น $3i$, $2 - 5i$, $-7i$, i , $-6 + i$ จำนวนทั้ง 5 นี้ ไม่สามารถบอกได้ว่าจำนวนใดมีค่ามากที่สุด หรือน้อยที่สุด หรือจำนวนใดมากกว่าจำนวนใด

ถ้ามีคนเขียน $-5 - i < i$ และถามว่าจริงไหม แล้วเราซึ่งเป็นผู้ตอบต้องบอกว่าไม่รู้ เนื่องจากจำนวนที่มี “ i ” ติดอยู่ไม่ได้ถูกกำหนดให้มีในระบบอสมการ

๒ **สิ่งที่ควรเน้น** จำนวนที่มี “ i ” ติดอยู่ไม่สามารถนำมาเปรียบเทียบกับกันได้เชิงมากกว่าหรือน้อยกว่า

☞ การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

๑ บทนิยาม

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d)

$$a + bi = c + di \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = c \text{ และ } b = d$$

หมายความว่า ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว

$$z_1 = z_2 \text{ ก็ต่อเมื่อ } z_1 \text{ กับ } z_2 \text{ จะต้องเป็นตัวเดียวกัน}$$

๒ **สิ่งที่ควรทราบจากบทนิยาม**

$$1. (z_1 = z_2) \Leftrightarrow (z_2 = z_1)$$

$$2. \text{ เนื่องจาก } \operatorname{Re}(a + bi) = a$$

$$\operatorname{Im}(a + bi) = b$$

$$\operatorname{Re}(c + di) = c$$

$$\text{และ } \operatorname{Im}(c + di) = d$$

$$\text{ดังนั้น } (a + bi = c + di) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(a + bi) = \operatorname{Re}(c + di) \\ \operatorname{Im}(a + bi) = \operatorname{Im}(c + di) \end{cases}$$

$$\text{และเป็นจริงด้วยว่า } (z_1 = z_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \\ \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) \end{cases}$$

$$3. \text{ ถ้า } a + bi = 0 \text{ แล้ว } a = 0 \text{ และ } b = 0$$

๓ ตัวอย่าง 1 ถ้า $x + 3i = 7 + 3i$ แล้ว x เท่ากับเท่าไร

วิธีทำ จากบทนิยาม $a + bi = c + di$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

$$\text{และจากโจทย์ } x + 3i = 7 + 3i$$

$$\text{จะได้ } x = 7$$

ดังนั้น ถ้า $x + 3i = 7 + 3i$ แล้ว $x = 7$

๕๐ ตัวอย่าง 2 ถ้า $5 + 9i = 5 + yi$ แล้ว y เท่ากับเท่าไร _____

วิธีทำ จากบทนิยาม $a + bi = c + di$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

และจากโจทย์ $5 + 9i = 5 + yi$

จะได้ $y = 9$

ดังนั้น ถ้า $5 + 9i = 5 + yi$ แล้ว $y = 9$

๕๑ ตัวอย่าง 3 ถ้า $a + 8i = 7 + 4i$ แล้ว a เท่ากับเท่าไร _____

วิธีทำ จากบทนิยาม $a + bi = c + di$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

แสดงว่า $a + 8i = 7 + 4i$ เป็นเท็จ เนื่องจาก ส่วนจินตภาพไม่เท่ากัน

ดังนั้น ตอบไม่ได้

• ข้อควรระวัง $a \neq 7$

ในการทำงานเดียวกัน ถ้าเราเห็น $9 + ki = 6 + 5i$ แล้ว ต้องรีบบอกเลยว่า $9 + ki = 6 + 5i$ เป็นเท็จ เนื่องจากส่วนจริงไม่เท่ากัน

๕๒ การบวกกันของจำนวนเชิงซ้อน _____

๕๒๑ บทนิยาม _____

1. จำนวนเชิงซ้อน z_1 กับ z_2 ทุกคู่ใดๆ สามารถบวกกันได้เสมอและให้ถูกเขียนแทนด้วย " $z_1 + z_2$ "

2. $z_1 + z_2$ ยังคงเป็นจำนวนเชิงซ้อนอยู่

3. ถ้า $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ แล้ว

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

๕๒๒ สิ่งที่ควรทราบจากบทนิยาม _____

กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง

1. เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อนทุกคู่ใดๆ สามารถบวกกันได้เสมอ และยังคงเป็นจำนวนเชิงซ้อนอยู่
แสดงว่า จำนวนเชิงซ้อนมีสมบัติปิดในเชิงบวก

ดังนั้น $z_1 + z_2$ ยังคงเป็นจำนวนเชิงซ้อนอยู่

2. ลองสลับที่มันดูดังนี้

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(c + di) + (a + bi) = (c + a) + (d + b)i$$

เห็นไหมว่าผลสรุปเหมือนกัน แสดงว่า จำนวนเชิงซ้อนมีสมบัติการสลับที่ในเชิงบวก

ดังนั้น $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

3. จำนวนเชิงซ้อนมีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ในเชิงบวกด้วยนะ

$$\text{ดังนั้น } (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3$$

4. ถ้า $z = a + bi$ และ $0 = 0 + 0i$ แล้ว

$$0 + z = (0 + 0i) + (a + bi) = a + bi = z$$

$$\text{และ } z + 0 = (a + bi) + (0 + 0i) = a + bi = z$$

$$\text{แสดงว่า } 0 + z = z = z + 0$$

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อนมี 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก

5. ถ้า $z = a + bi$ แล้ว

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} z \\ \downarrow \\ (a + bi) \end{array} & \begin{array}{c} \text{เอกลักษณ์ในเชิงบวก} \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} z \\ \downarrow \\ (-a - bi) \end{array} \end{array} \\ (a + bi) + (-a - bi) = 0 = (-a - bi) + (a + bi) \\ \begin{array}{c} \text{อินเวอร์สในเชิงบวก} \\ \uparrow \qquad \qquad \uparrow \end{array} \end{array}$$

พบว่า จำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ มีตัวผกผันการบวกหรืออินเวอร์สการบวก คือ $-a - bi$
 ถึงตรงนี้นักคณิตศาสตร์ได้กำหนดให้ $-z$ เป็นตัวผกผันการบวกหรืออินเวอร์สการบวกของ z

$$\text{แสดงว่า } -z = -a - bi$$

ดังนั้น $(-z) + z = 0 = z + (-z)$ และอ่าน $-z$ ว่าตัวผกผันการบวกหรืออินเวอร์สการบวกของ z

6. ถ้า $z_1 = z_2$ แล้ว $z_1 + z_3 = z_2 + z_3$

7. สมบัติการตัดออกในเชิงบวกเป็นจริง

$$\begin{array}{l} \text{เนื่องจาก} \quad z_1 + z_2 = z_1 + z_3 \\ \quad \quad \quad -z_1 + (z_1 + z_2) = -z_1 + (z_1 + z_3) \\ \quad \quad \quad (-z_1 + z_1) + z_2 = (-z_1 + z_1) + z_3 \\ \text{จะได้} \quad \quad \quad z_2 = z_3 \end{array}$$

ดังนั้น ถ้า $z_1 + z_2 = z_1 + z_3$ แล้ว $z_2 = z_3$

8. จากบทนิยามที่ว่า $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (bi + di)$

$$\text{ทำให้ทราบว่า } (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (bi + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$\begin{array}{c} \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ \text{ดึงตัวร่วม } i \text{ ออกมาได้} \end{array}$

แสดงว่า สามารถดึงตัวร่วม i ออกมาได้

และ เป็นจริงด้วยว่าสามารถดึงตัวร่วม z ออกมาได้ด้วย เมื่อ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน

$$\text{ดังนั้น } abi + aci = (ab + ac)i = a(b + c)i$$

$$\text{และ } abz + acz = (ab + ac)z = a(b + c)z \text{ เมื่อ } z \text{ เป็นจำนวนเชิงซ้อน}$$

๑๑ ตัวอย่าง 1 จงหาค่าของ

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $(2 + 3i) + (6 - 2i)$ | 2. $(3 + 2i) + (1 - 3i)$ |
| 3. $(2 + 4i) + (3 + i)$ | 4. $(3 + 4i) + (2 - 5i)$ |
| 5. $(2 + 4i) + (7 - 3i)$ | 6. $(-2 + i) + (4 + 2i)$ |
| 7. $(1 + i) + (2i) + (2 + 7i)$ | 8. $(6 - 3i) + (-3 + 2i) + (1 + 6i)$ |

วิธีทำ 1. $(2 + 3i) + (6 - 2i) = [6 + 2] + [3 + (-2)]i$

ดังนั้น $(2 + 3i) + (6 - 2i) = 8 + i$

2. $(3 + 2i) + (1 - 3i) = [3 + 1] + [2 + (-3)]i$

ดังนั้น $(3 + 2i) + (1 - 3i) = 4 - i$

3. $(2 + 4i) + (3 + i) = [2 + 3] + [4 + 1]i$

ดังนั้น $(2 + 4i) + (3 + i) = 5 + 5i$

4. $(3 + 4i) + (2 - 5i) = [3 + 2] + [4 + (-5)]i$

ดังนั้น $(3 + 4i) + (2 - 5i) = 5 - i$

$$5. \quad (2 + 4i) + (7 - 3i) = [2 + 7] + [4 - 3]i$$

$$\text{ดังนั้น } (2 + 4i) + (7 - 3i) = 9 + i$$

$$6. \quad (-2 + i) + (4 + 2i) = [-2 + 4] + [1 + 2]i$$

$$\text{ดังนั้น } (-2 + i) + (4 + 2i) = 2 + 3i$$

$$7. \quad (1 + i) + (2i) + (2 + 7i) = [1 + 0 + 2] + [1 + 2 + 7]i$$

$$\text{ดังนั้น } (1 + i) + (2i) + (2 + 7i) = 3 + 10i$$

$$8. \quad (6 - 3i) + (-3 + 2i) + (1 + 6i) = [6 + (-3) + 1] + [-3 + 2 + 6]i$$

$$\text{ดังนั้น } (6 - 3i) + (-3 + 2i) + (1 + 6i) = 4 + 5i$$

๑๐ ตัวอย่าง 2 กำหนดให้ $f(z) = z^2 + 2z + 3$ แล้ว จงหาค่าของ $f(1 + i)$ _____

$$\text{วิธีทำ จากโจทย์ } f(z) = z^2 + 2z + 3$$

$$f(1 + i) = (1 + i)^2 + 2(1 + i) + 3$$

$$= 1 + 2i + i^2 + 2 + 2i + 3$$

$$= 1 + 2i - 1 + 2 + 2i + 3$$

$$\text{ดังนั้น } f(1 + i) = 5 + 4i$$

๑๑ การลบกัณฑ์ของจำนวนเชิงซ้อน

๑๑ บทนิยาม

1. นักคณิตศาสตร์ได้กำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน z_1 ลบด้วย z_2 ทุกคู่มีได้ และให้ถูกเขียนแทนด้วย " $z_1 - z_2$ "
2. $z_1 - z_2$ ยังคงเป็นจำนวนเชิงซ้อนอยู่
3. $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

๑๒ สิ่งที่ควรทราบจากบทนิยาม

กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง

$$1. \quad (a + bi) - (c + di) = (a + bi) + (-c - di)$$

$$= (a - c) + (bi - di)$$

$$\text{ดังนั้น } (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$2. \quad z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

$$= (-z_2) + z_1$$

$$3. \quad z_1 - z_2 - z_3 = z_1 + (-z_2) + (-z_3)$$

$$= ((z_1 + (-z_2)) + (-z_3))$$

$$\text{ดังนั้น } z_1 - z_2 - z_3 = (z_1 - z_2) - z_3$$

$$4. \quad z_1 - z_2 - z_3 = z_1 - (z_2 + z_3)$$

$$\text{และ } z_1 - (z_2 + z_3) = z_1 - z_2 - z_3$$

ดังนั้น มันมีพฤติกรรมเหมือนอย่างที่เราเคยเจอในจำนวนจริง

$$5. \quad \text{ถ้า } z_1 - z_2 + z_3 = z_4 \text{ แล้ว } z_1 = z_4 + z_2 - z_3$$

ดังนั้น เราสามารถย้ายข้างได้ แล้วเปลี่ยนเครื่องหมายเป็นตรงข้ามเหมือนกับจำนวนจริง

คณิตศาสตร์

-:17:-

เพิ่มเติม
ม.5 เล่ม 2

๑๑ ตัวอย่าง 1 จงหาค่าของ

1. $(2 + i) - (4 - 2i)$

2. $(4 - i) - (6 - 2i)$

3. $(-2 + i) - (-1 + 2i)$

4. $(3 + 2i) - (4 - 5i)$

5. $3 - (4 + 2i)$

6. $(5 + i) + (2 - i) - (6 - 3i)$ _____

วิธีทำ 1. $(2 + i) - (4 - 2i) = (2 + i) + (-4 + 2i)$
 $= [2 + (-4)] + [1 + 2] i$

ดังนั้น $(2 + i) - (4 - 2i) = -2 + 3i$

2. $(4 - i) - (6 - 2i) = (4 - i) + (-6 + 2i)$
 $= [4 + (-6)] + [-1 + 2] i$

ดังนั้น $(4 - i) - (6 - 2i) = -2 + i$

3. $(-2 + i) - (-1 + 2i) = (-2 + i) + (1 - 2i)$
 $= [-2 + 1] + [1 + (-2)] i$

ดังนั้น $(-2 + i) - (-1 + 2i) = -1 - i$

4. $(3 + 2i) - (4 - 5i) = (3 + 2i) + (-4 + 5i)$
 $= [3 + (-4)] + [2 + 5] i$

ดังนั้น $(3 + 2i) - (4 - 5i) = -1 + 7i$

5. $3 - (4 + 2i) = (3 + 0i) + (-4 - 2i)$
 $= [3 + (-4)] + [0 + (-2)] i$

ดังนั้น $3 - (4 + 2i) = -1 - 2i$

6. $(5 + i) + (2 - i) - (6 - 3i) = (5 + i) + (2 - i) + (-6 + 3i)$
 $= [5 + 2 + (-6)] + [1 + (-1) + 3] i$

ดังนั้น $(5 + i) + (2 - i) - (6 - 3i) = 1 + 3i$

๑๑ ตัวอย่าง 2 กำหนดให้ $(x + yi) + (2 - 3i) = -4 + 2i$ แล้ว

จงหาค่าของ x กับ y _____

วิธีทำ $(x + yi) + (2 - 3i) = -4 + 2i$
 $x + yi = (-4 + 2i) - (2 - 3i)$
 $= -4 + 2i - 2 + 3i$

$x + yi = -6 + 5i$

จะได้ $x = -6$

และ $y = 5$

ดังนั้น ถ้า $(x + yi) + (2 - 3i) = -4 + 2i$ แล้ว

$x = -6$

และ $y = 5$

📖 การคูณกันของจำนวนเชิงซ้อน

📌 บทนิยาม

- จำนวนเชิงซ้อน z_1 กับ z_2 ทุกคู่ใดๆ สามารถคูณกันได้เสมอ และให้ถูกเขียนแทนด้วย " $z_1 \cdot z_2$ หรือ $z_1 z_2$ "
- $z_1 z_2$ ยังคงเป็นจำนวนเชิงซ้อนอยู่
- การคูณกันของจำนวนเชิงซ้อนให้ใช้การกระจายแบบเดียวกับพีชคณิตธรรมดา ดังนี้
ถ้า $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ แล้ว

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$= ac + adi + bci - bd$$

$$\text{ดังนั้น } z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

- $\underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{|\leftarrow n \text{ ตัว} \rightarrow|} = z^n$

♡ สิ่งที่เราควรทราบจากบทนิยาม

กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง

- เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อนทุกคู่ใดๆ สามารถคูณกันได้เสมอ และยังคงเป็นจำนวนเชิงซ้อนอยู่

แสดงว่า จำนวนเชิงซ้อนมีสมบัติปิดในเชิงคูณ

ดังนั้น $z_1 z_2$ ยังคงเป็นจำนวนเชิงซ้อนอยู่

- ลองสลับที่มันดูดังนี้

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$(c + di)(a + bi) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

เห็นไหมว่าผลลัพธ์เหมือนกัน แสดงว่า จำนวนเชิงซ้อนมีสมบัติการสลับที่ในเชิงคูณ

$$\text{ดังนั้น } z_1 z_2 = z_2 z_1$$

- จำนวนเชิงซ้อนมีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ในเชิงคูณด้วยนะ

$$\text{ดังนั้น } (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) = z_1 z_2 z_3$$

- ถ้า $z = a + bi$ และ $1 = 1 + 0i$ แล้ว

$$1z = (1 + 0i)(a + bi) = a + bi = z$$

$$z1 = (a + bi)(1 + 0i) = a + bi = z$$

$$\text{แสดงว่า } 1z = z = z1$$

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อนมี 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ

- ถ้า $z = a + bi$ และ $z \neq 0$ แล้ว

$$\begin{array}{c} \text{เอกลักษณ์ในเชิงคูณ} \\ \downarrow \\ (a + bi) \left(\frac{a - bi}{a^2 + b^2} \right) = 1 + 0i = \left(\frac{a - bi}{a^2 + b^2} \right) (a + bi) \end{array}$$

ตัวผกผันการคูณหรืออินเวอร์สการคูณ

พบว่า จำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ มีตัวผกผันการคูณหรืออินเวอร์สการคูณ คือ $\frac{a - bi}{a^2 + b^2}$

คณิตศาสตร์

--:19:--

เพิ่มเติม
ม.5 เล่ม 2

ถึงตรงนี้นักคณิตศาสตร์ได้กำหนดให้ z^{-1} หรือ $\frac{1}{z}$ เป็นตัวผกผันการคูณหรืออินเวอร์สการคูณของ z

$$\text{แสดงว่า } z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

ดังนั้น $\left(\frac{1}{z}\right) z = 1 = z \left(\frac{1}{z}\right)$ เมื่อ $z \neq 0$ และอ่าน z^{-1} หรือ $\frac{1}{z}$ ว่าตัวผกผันการคูณหรืออินเวอร์สการคูณ

๑. ลองหา $\frac{1}{z}$ ซึ่งเป็นตัวผกผันการคูณหรืออินเวอร์สการคูณของ z

$$\text{ถ้า } z = a+bi \text{ และ } z \neq 0 \text{ แล้ว } \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi}$$

นำสังยุคของ $a+bi$ คูณทั้งเศษและส่วนเข้าช่วยดังนี้

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \frac{a-bi}{a-bi}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

$$6. \text{ ถ้า } z_1 = z_2 \text{ แล้ว } z_1 z_3 = z_2 z_3$$

$$7. \text{ ถ้า } z_1 z_2 = z_1 z_3 \text{ และ } z_1 \neq 0 \text{ แล้ว } z_2 = z_3$$

$$8. \text{ ถ้า } z_1 z_2 = 0 \text{ แล้ว } z_1 = 0 \text{ หรือ } z_2 = 0$$

$$9. \left. \begin{aligned} z_1 (z_2 + z_3) &= z_1 z_2 + z_1 z_3 \\ \text{และ } (z_1 + z_2) z_3 &= z_1 z_3 + z_2 z_3 \end{aligned} \right\} \text{ คูณสามารถลุยเข้าไปในวงได้}$$

หมายเหตุ ในทางกลับกัน เราสามารถดึงตัวร่วมออกมาได้ด้วยนะ

$$10. (z_1 + z_2) (z_3 + z_4) = z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4$$

$$11. (z_1 + z_2) (z_1 + z_2) = z_1 z_1 + z_1 z_2 + z_2 z_1 + z_2 z_2$$

$$\text{ดังนั้น } (z_1 + z_2) (z_1 + z_2) = z_1^2 + 2 z_1 z_2 + z_2^2$$

$$12. (z_1 - z_2) (z_3 + z_4) = z_1 z_3 + z_1 z_4 - z_2 z_3 - z_2 z_4$$

$$13. (z_1 - z_2) (z_1 + z_2) = z_1 z_1 + z_1 z_2 - z_2 z_1 - z_2 z_2$$

$$\text{ดังนั้น } (z_1 - z_2) (z_1 + z_2) = z_1^2 - z_2^2$$

๑๑. ตัวอย่าง 1 จงหาค่าของ $(3+4i)(5+2i)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ วิธีที่ 1 } (3+4i)(5+2i) &= 15 + 6i + 20i + 8i^2 \\ &= 15 + 26i - 8 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } (3+4i)(5+2i) = 7 + 26i$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีที่ 2 ใช้สูตร } (a+bi)(c+di) &= (ac-bd) + (ad+bc)i \\ (3+4i)(5+2i) &= (15-8) + (6+20)i \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } (3+4i)(5+2i) = 7 + 26i$$

๑๐ ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ $(3 + 2i)(1 - 3i)$

วิธีทำ วิธีที่ 1 $(3 + 2i)(1 - 3i) = 3 - 9i + 2i - 6i^2$
 $= 3 - 7i + 6$

ดังนั้น $(3 + 2i)(1 - 3i) = 9 - 7i$

วิธีที่ 2 ใช้สูตร $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$(3 + 2i)(1 - 3i) = (3 + 6) + (-9 + 2)i$

ดังนั้น $(3 + 2i)(1 - 3i) = 9 - 7i$

๑๐ ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของ $(2 - i)(1 + 3i)$

วิธีทำ วิธีที่ 1 $(2 - i)(1 + 3i) = 2 + 6i - i - 3i^2$
 $= 2 + 5i + 3$

ดังนั้น $(2 - i)(1 + 3i) = 5 + 5i$

วิธีที่ 2 ใช้สูตร $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$(2 - i)(1 + 3i) = (2 + 3) + (6 - 1)i$

ดังนั้น $(2 - i)(1 + 3i) = 5 + 5i$

๑๐ ตัวอย่าง 4 จงหาตัวผกผันการคูณของ $z = 3 - 2i$

วิธีทำ จากโจทย์ $z = 3 - 2i$

ตัวผกผันการคูณของ $z = \frac{1}{z} = \frac{1}{3 - 2i} = \frac{1}{3 - 2i} \cdot \frac{3 + 2i}{3 + 2i}$
 $= \frac{3 - 2i}{(3)^2 + (4)^2} = \frac{3 + 2i}{13}$

ดังนั้น ตัวผกผันการคูณของ $z = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$

คณิตศาสตร์

-:21:-

เพิ่มเติม
ม.5 เล่ม 2

การหารกัณฑ์ของจำนวนเชิงซ้อน

๑ บทนิยาม

1. นักคณิตศาสตร์ได้กำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน z_1 หารด้วย z_2 เมื่อ $z_2 \neq 0$ มีได้และให้ถูกเขียนแทนด้วย " $z_1 \div z_2$ หรือ $\frac{z_1}{z_2}$ "
2. $\frac{z_1}{z_2}$ เมื่อ $z_2 \neq 0$ ยังคงเป็นจำนวนเชิงซ้อนอยู่
3. ถ้า $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ แล้ว

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di}$$

นำสังยุคของ $c + di$ คูณทั้งเศษและส่วนเข้าช่วยดังนี้

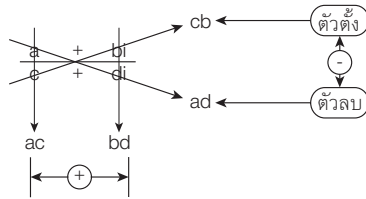
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di}$$

$$= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 + d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac + bd) + (cb - ad)i}{c^2 + d^2}$$



เทคนิคเพิ่มเติม เกี่ยวกับการหารจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้แผนภาพเพื่อทำให้การหารจำนวนเชิงซ้อนง่ายขึ้นดังนี้



เนื่องจาก $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(ac+bd) + (cb-ad)i}{c^2+d^2}$

จากแผนภาพจะได้ $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(\textcircled{+} + \textcircled{+}) + (\textcircled{-} - \textcircled{-})i}{c^2+d^2}$ มาจากตัวหาร



สิ่งที่ควรทราบจากบทนิยาม

กำหนดให้ z_1, z_2, z_3, z_4 เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง

1. ถ้า $z = a + bi$ และ $z \neq 0$ แล้ว $\frac{z}{z} = \frac{a+bi}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}$

ดังนั้น $\frac{z}{z} = 1$

2. ถ้า $z = a + bi$ และ $z \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{\left[\frac{1}{z}\right]} = \frac{1}{\left[\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right]} = \frac{a^2+b^2}{a-bi}$

$= \frac{a^2+b^2}{a-bi} \cdot \frac{a+bi}{a+bi} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} (a+bi) = a+bi$

ดังนั้น $\frac{1}{\left[\frac{1}{z}\right]} = z$

3. $\frac{1}{z_1 z_2} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}$ เมื่อ $z_1 \neq 0$ และ $z_2 \neq 0$

4. $\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2} = \frac{z_2 \pm z_1}{z_1 z_2} = \frac{1}{z_1 z_2} (z_2 \pm z_1)$

5. โดยทั่วไป $\frac{1}{z_1 + z_2} \neq \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$

6. ถ้า $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ และ $z_1 z_2 = (z_1 + z_2)^2$ แล้ว $\frac{1}{z_1 + z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$

เนื่องจาก $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}$

ถ้า $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ และ $z_1 z_2 = (z_1 + z_2)^2$ แล้ว $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{(z_1 + z_2)^2}$

$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2}$

ดังนั้น ถ้า $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ และ $z_1 z_2 = (z_1 + z_2)^2$ แล้ว $\frac{1}{z_1 + z_2} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$

7. ถ้า $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, z_3 \neq 0, z_4 \neq 0$ และ $\frac{z_1 z_2}{z_3} = z_4$ แล้ว

$z_1 = \frac{z_3 z_4}{z_2}$

$z_2 = \frac{z_3 z_4}{z_1}$

$z_3 = \frac{z_1 z_2}{z_4}$

คณิตศาสตร์

-:22:-

เพิ่มเติม
ม.5 เล่ม 2

ตัวอย่าง 1 จงหาค่าของ $\frac{6-5i}{3+4i}$

วิธีทำ วิธีที่ 1 $\frac{6-5i}{3+4i} = \frac{6-5i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{18-24i-15i-20i^2}{(3)^2+(4)^2}$
 $= \frac{18-39i-20}{9+16} = \frac{-2-39i}{25}$

ดังนั้น $\frac{6-5i}{3+4i} = -\frac{2}{25} - \frac{39i}{25}$

วิธีที่ 2

$$\begin{array}{cc} 6 & -5i \\ \times & 3-4i \\ \hline 18 & -24i \\ -15i & 20i^2 \\ \hline 18-24i-15i+20i^2 \\ 18-39i-20 & \\ 18+(-20) & = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -15i-24i \\ -15-24 = -39 \end{array}$$

$$\frac{6-5i}{3+4i} = \frac{-2-39i}{(3)^2+(4)^2} = \frac{-2-39i}{9+16}$$

ดังนั้น $\frac{6-5i}{3+4i} = -\frac{2}{25} - \frac{39i}{25}$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ $\frac{(3+2i)^2(1-3i)}{(3+i)^2(1+2i)} + \frac{1+i}{1-i}$

วิธีทำ $\frac{(3+2i)^2(1-3i)}{(3+i)^2(1+2i)} + \frac{1+i}{1-i} = \frac{[9+12i+(2i)^2](1-3i)}{[9+6i+(i)^2](1+2i)} + \frac{1+i}{1-i}$
 $= \frac{(5+12i)(1-3i)}{(8+6i)(1+2i)} + \frac{1+i}{1-i}$
 $= \frac{5-15i+12i-36i^2}{8+16i+6i+12i^2} + \frac{1+i}{1-i}$
 $= \frac{41-3i}{-4+22i} + \frac{1+i}{1-i}$
 $= \frac{(41-3i)(-4-22i)}{(-4+22i)(-4-22i)} + \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$
 $= \frac{-230-890i}{500} + \frac{2i}{2}$
 $= \frac{-230-890i+500i}{500}$

ดังนั้น $\frac{(3+2i)^2(1-3i)}{(3+i)^2(1+2i)} + \frac{1+i}{1-i} = -\frac{23}{50} - \frac{39i}{50}$

ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของ $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{25}$

วิธีทำ $\left[\frac{1+i}{1-i}\right]^{25} = \left[\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}\right]^{25}$
 $= \left[\frac{(1+i)(1+i)}{(1)^2+(1)^2}\right]^{25}$
 $= \left[\frac{1+i+i+i^2}{1+i}\right]^{25}$
 $= \left[\frac{1+2i-1}{2}\right]^{25}$
 $= \left[\frac{2i}{2}\right]^{25} = (i)^{25}$

ดังนั้น $\left[\frac{1+i}{1-i}\right]^{25} = i$



สรุปสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้ z, z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

สมบัติ	การบวก	การคูณ
สมบัติปิด	$z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$	$z_1 z_2 \in \mathbb{C}$
สมบัติการสลับที่	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	$z_1 z_2 = z_2 z_1$
สมบัติการเปลี่ยนหมู่	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$	$z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	$z + 0 = z = 0 + z$ ข้อตกลง 0 ถูกเรียกว่า “เอกลักษณ์การบวก”	$z1 = z = 1z$ ข้อตกลง 1 ถูกเรียกว่า “เอกลักษณ์การคูณ”
สมบัติการมีตัวผกผัน	$z + (-z) = 0 = (-z) + z$ ข้อตกลง -z ถูกเรียกว่า “ตัวผกผันการบวก” หรือ “อินเวอร์สการบวกของ z”	ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $zz^{-1} = 1 = z^{-1}z$ ข้อตกลง z^{-1} ถูกเรียกว่า “ตัวผกผันการคูณ” หรือ “อินเวอร์สการคูณของ z”
สมบัติการแจกแจง	$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$	

คณิตศาสตร์

-:24:-

เพิ่มเติม
ม.5 เล่ม 2



การดำเนินการ (Operation)



หลักการ

- การดำเนินการ (Operation) ในระบบจำนวนเชิงซ้อนคือ บวก, ลบ, คูณ,หาร ซึ่งเราทราบความหมายของมันอยู่แล้ว ดังนี้

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ และ $w = c + di$ ใดๆ

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a + c) - (b + d)i$$

$$zw = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{z}{w} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(ac + bd)(bc + ad)i}{c^2 + d^2}$$

- ถ้ามีนักคณิตศาสตร์ชุกชนคนหนึ่งอยู่ดีๆ ก็เขียนเล่นๆ ว่า $z * w$ แล้ว ยังมาถามเรามากกว่า $z * w$ เท่ากับเท่าไร แนนอนว่าเราต้องงงๆ ตอบไม่ได้จริงไหม แต่ถ้านักคณิตศาสตร์คนนั้นบอกเพิ่มเติมโดยให้พฤติกรรมของ $*$ เป็นดังนี้

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ และ $w = c + di$ ใดๆ

นิยาม $z * w = ac - bdi$ อย่างนี้ละก็เราก็คงทราบความหมายแล้วจริงไหม

สิ่งที่ควรทราบ $*$ นี้แหละคือการดำเนินการ (Operation)

หมายเหตุ

- อย่าไปยึดติดกับสัญลักษณ์ของการดำเนินการ (Operation) อาจเป็น $*$, Δ , $\star$ เป็นต้น ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับว่าโจทย์กำหนดเป็นอะไร อย่ายึดติดนะครับ
- อย่ายึดติดกับความหมายของการดำเนินการ (Operation) เนื่องจากพฤติกรรมของ Operation มักจะเปลี่ยนไปตามแต่โจทย์เห็นสมควร ให้เชื่อความหมายตามโจทย์กำหนดให้ ห้ามถกเถียงโดยเด็ดขาด