



สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การแก้ไขภัยแคลคูลัสและ สมการเชิงอนุพันธ์ด้วย วูลแฟรมแอลฟา

มิติใหม่ในการหาคำตอบพร้อมวิธีทำ

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

การแก้ไขภัยแคลงสงสัย
และสมการเชิงอนุพันธ์
ด้วยวิธีแฟร็กทัล

การแก้โจทย์แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ ด้วยวูลแฟรมแอลฟา

ปราโมทย์ เศษอำไพ



สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2557

130.-

การแก้ไขข้อผิดพลาดและสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยวูลแฟรมแอลฟา

1. แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์. 2. สมการเชิงอนุพันธ์. 3. การแก้ไขข้อสมการ.

620.0001

ISBN 978-974-03-3182-7

สพจ. 1802



สรสคุณคำวิชาการ ผู้สังคม
www.ChulaPress.com
Knowledge to All

ลิขสิทธิ์ของสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 2,000 เล่ม พ.ศ. 2557

การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้น

ต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผู้จัดทำ นาย ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

ผู้จัดทำ นาย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

สาขา ศาลาพระเกี้ยว โทร. 0-2218-7000-3 โทรสาร 0-2255-4441

สยามสแควร์ โทร. 0-2218-9881-2 โทรสาร 0-2254-9495

ม.นเรศวร จ.พิษณุโลก โทร. 0-5526-0162-4 โทรสาร 0-5526-0165

ม.เทคโนโลยีสุรนารี จ.นครราชสีมา โทร. 0-4421-6131-4 โทรสาร 0-4421-6135

ม.บูรพา จ.ชลบุรี โทร. 0-3839-4855-9 โทรสาร 0-3839-3239

โรงเรียนนายร้อย จปร. จ.นครนายก โทร. 0-3739-3023 โทรสาร 0-3739-3023

ม.พะเยา จ.พะเยา โทร. 0-5446-6799-800 โทรสาร 0-5446-6798

จัตุรัสจามจุรี (CHAMCHURI SQUARE) ชั้น 4 โทร. 0-2160-5301-2 โทรสาร 0-2160-5304

รัตนนิเบศร์ (แยกแคราย) โทร. 0-2950-5408-9 โทรสาร 0-2950-5405

Call Center (จัดส่งทั่วประเทศ) โทร. 0-2255-4433 <http://www.chulabook.com>

และเครือข่าย

ร้านค้าติดต่อ แผนกขายส่ง สาขารัตนนิเบศร์ (แยกแคราย) โทร. 0-2950-5408-9 โทรสาร 0-2950-5405

กองบรรณาธิการ : ทิพวรรณ โหละสุต

ออกแบบปก : ดร.อติพงษ์ มาลาทิพย์

ออกแบบรูปเล่ม : ไกรอัมพร พงษ์จร

พิมพ์ที่ : บริษัท วิ.พี.เอ็น (1991) จำกัด โทร. 0-2451-3010 โทรสาร 0-2451-3014

คำนำ

เทคโนโลยีซอฟต์แวร์ทางด้านคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ (symbolic mathematics) ได้ก้าวไปไกลมากในโลกปัจจุบัน ช่วยทำให้การศึกษาคณิตศาสตร์ในช่วงปีต้น ๆ ของการเรียนในระดับอุดมศึกษากลายเป็นของง่าย คณิตศาสตร์พื้นฐานเหล่านี้ประกอบด้วยการหาค่าลิมิต ค่าอนุพันธ์ และการอินทิเกรตฟังก์ชันซึ่งอยู่ในรูปแบบที่แตกต่างกัน ล้วนเป็นบันไดขั้นแรกก่อนศึกษาวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ สมการเชิงอนุพันธ์เป็นสมการที่อธิบายปรากฏการณ์ทางธรรมชาติของงานทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ ดังนั้น การศึกษาคณิตศาสตร์อย่างเป็นขั้นเป็นตอนดังกล่าวข้างต้น จึงมีความสำคัญและกลายเป็นวิชาบังคับในการเรียนระดับอุดมศึกษาทั่วไป

ในอดีตที่ผ่านมา การศึกษาเนื้อหาคณิตศาสตร์เหล่านี้กลับกลายเป็นยาขมสำหรับผู้เรียนเพราะต้องจดจำทั้งสูตรและกระบวนการเป็นจำนวนมากเพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์สุดท้าย ด้วยเทคโนโลยีซอฟต์แวร์ทางด้านคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ในปัจจุบัน ผู้ศึกษาสามารถใช้ซอฟต์แวร์ดังเช่นซอฟต์แวร์วูลแฟรมแอลฟาที่นำเสนอในหนังสือเล่มนี้ เพื่อแสดงวิธีทำอย่างเป็นขั้นเป็นตอนโดยละเอียดให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นยังสามารถนำไปพล็อตก่อให้เกิดความเข้าใจในปรากฏการณ์ของปัญหานั้น ๆ ได้โดยทันที

เพื่อให้ผู้ศึกษาซึ่งเป็นคนไทยได้คุ้นเคยกับการใช้ซอฟต์แวร์เช่นนี้ ผู้เขียนจึงดัดแปลงภาษาอังกฤษที่ปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ให้เป็นภาษาไทยพร้อมแทรกคำอธิบายเพื่อให้เกิดความเข้าใจโดยชัดเจน เนื้อหาของหนังสือเล่มนี้จึงเริ่มจากการอธิบายภาพรวมใหญ่ของการใช้ซอฟต์แวร์วูลแฟรมแอลฟา จากนั้นจึงเป็นการนำเสนอวิธีการหาค่าลิมิต ค่าอนุพันธ์ การอินทิเกรตฟังก์ชัน การแก้สมการเชิงอนุพันธ์จากอันดับหนึ่งไปจนถึงอันดับสูง ๆ รวมทั้งการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นและปัญหาค่าขอบเขตด้วยการใช้ตัวอย่างเป็นจำนวนมากโดยใช้คณิตศาสตร์สัญลักษณ์

ผู้ศึกษาควรทำความเข้าใจในกระบวนการขั้นตอนของการแก้ปัญหที่เกิดขึ้นจากการใช้ซอฟต์แวร์นี้ และพึงระลึกอยู่เสมอว่าความเข้าใจในกระบวนการขั้นตอนเหล่านี้มีความสำคัญที่

จะทำให้ตนเองเกิดความแตกฉานจนสามารถแก้ปัญหาอื่น ๆ ที่ซอฟต์แวร์อาจทำให้ไม่ได้ ความแตกฉานในคณิตศาสตร์เช่นนี้เอง จะเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ซึ่งมีความซับซ้อนในระดับสูงขึ้นไป

ผู้เขียนขอขอบคุณจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย นายวรุตม์ เอ็ดเวิร์ด เฉชะอำไพ นางสาว ปุณทริกา แอนนา เฉชะอำไพ นายพิชฌ์ณทร โพธิคุณ นายชัชวาล ศิริปรุ นายณัฐชนนท์ ประสมสุข นายวิทยา สดัสสาร ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้อง และนางสาวไกรอัมพร พงษ์ขจร ผู้จัดพิมพ์เนื้อหา และขอขอบคุณสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่ให้การสนับสนุนในการจัดพิมพ์หนังสือเล่มนี้เพื่อก่อให้เกิดประโยชน์แก่นิสิตนักศึกษาไทยและผู้สนใจทั่วไป

ปราโมทย์ เฉชะอำไพ

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กุมภาพันธ์ 2557

การเรียกใช้ซอฟต์แวร์วูลแฟรมแอลฟา

ซอฟต์แวร์วูลแฟรมแอลฟาสามารถเรียกใช้งานได้โดยไม่เสียค่าใช้จ่ายด้วยการสื่อสารผ่านอินเทอร์เน็ต (internet) เข้าเว็บไซต์ (website) www.wolframalpha.com

ผู้ใช้สามารถพิมพ์คำสั่งดังเช่นแสดงด้วยคำสั่งต่าง ๆ ในหนังสือเล่มนี้ลงในกล่องขอปรวาวสี่เหลี่ยมแล้วคลิกปุ่มเครื่องหมาย  ผลลัพธ์ก็จะปรากฏขึ้นบนหน้าจอ หากผู้ใช้ต้องการให้ซอฟต์แวร์แสดงขั้นตอนของการประดิษฐ์ผลลัพธ์ ก็เพียงคลิกปุ่ม **Step-by-Step solutions** ในขณะที่เขียนหนังสือเล่มนี้ ผู้ใช้สามารถให้ซอฟต์แวร์แสดงขั้นตอนรายละเอียดของการประดิษฐ์ผลลัพธ์ได้ไม่เกินวันละ 3 ปัญหา แต่หากต้องการให้แสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาจำนวนไม่จำกัด ผู้ใช้จำเป็นต้องลงทะเบียนและเสียค่าใช้จ่ายเพียงเล็กน้อย

อนึ่ง หากผู้ใช้มีซอฟต์แวร์แมทมาทิกา (Mathematica) ซึ่งเป็นซอฟต์แวร์แม่ของซอฟต์แวร์วูลแฟรมแอลฟานี้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ที่สื่อสารผ่านอินเทอร์เน็ตได้ ผู้ใช้ก็สามารถเรียกใช้ซอฟต์แวร์วูลแฟรมแอลฟาได้เช่นกันโดยพิมพ์คำสั่งต่างๆ ที่ปรากฏในหนังสือเล่มนี้ลงระหว่างเครื่องหมายอัญประกาศ (quote) ดังนี้

WolframAlpha["คำสั่ง"]

หรืออาจคลิกปุ่มเครื่องหมายบวกเล็ก ๆ ตรงมุมซ้ายบน ณ ตำแหน่งที่พิมพ์คำสั่ง แล้วคลิกตามด้วยปุ่มเครื่องหมายเท่ากับสี่เหลี่ยมซึ่งมีข้อความกำกับว่า Free-form input (หรือทำทั้งหมดนี้ทางลัดด้วยเพียงกดคีย์เครื่องหมายเท่ากับบนแป้นพิมพ์เลย) แล้วพิมพ์คำสั่งที่ต้องการลงไป จากนั้นให้กดปุ่มเครื่องหมายบวกสี่เหลี่ยมทางด้านขวาของคำสั่งที่พิมพ์เพื่อแสดงผลทั้งหมด ก็จะได้รายละเอียดของผลลัพธ์ปรากฏขึ้นบนหน้าจอคอมพิวเตอร์เช่นกัน

สารบัญ

คำนำ

บทที่ 1	พื้นฐานความรู้	1
1.1	บทนำ	1
1.2	การใช้สูตรแฟรมแอลฟา	3
1.3	สมการพีชคณิต	5
1.4	เลขเชิงซ้อน	6
1.5	ค่าตัวเลขที่สำคัญ	10
1.6	การพล็อตกราฟ	11
1.7	บทสรุป	14
	แบบฝึกหัด	15
บทที่ 2	การหาค่าอนุพันธ์	19
2.1	บทนำ	19
2.2	การหาค่าลิมิต	20
2.3	การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	24
2.4	การหาค่าอนุพันธ์อันดับสูงกว่าหนึ่ง	29
2.5	การแสดงอนุกรม	33
2.6	บทสรุป	34
	แบบฝึกหัด	35
บทที่ 3	การอินทิเกรต	39
3.1	บทนำ	39

3.2	พื้นฐานความรู้	40
3.3	การอินทิเกรต	42
3.4	การอินทิเกรตแบบจำกัดเขต	48
3.5	การอินทิเกรตสองและสามมิติ	49
3.6	บทสรุป	50
	แบบฝึกหัด	51
บทที่ 4	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	55
4.1	บทนำ	55
4.2	สมการแบบเชิงเส้น	56
4.3	สมการแบบไม่เชิงเส้น	63
4.4	บทสรุป	67
	แบบฝึกหัด	68
บทที่ 5	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง	73
5.1	บทนำ	73
5.2	สมการเอกพันธ์	74
5.3	สมการไม่เอกพันธ์	78
5.4	บทสรุป	84
	แบบฝึกหัด	85
บทที่ 6	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงกว่าสอง	91
6.1	บทนำ	91
6.2	สมการเอกพันธ์	92
6.3	สมการไม่เอกพันธ์	96
6.4	บทสรุป	103
	แบบฝึกหัด	104

บทที่ 7	ปัญหาค่าเริ่มต้น	109
7.1	บทนำ	109
7.2	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	110
7.3	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง	114
7.4	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงกว่าสอง	118
7.5	บทสรุป	124
	แบบฝึกหัด	125
บทที่ 8	ปัญหาค่าขอบเขต	131
8.1	บทนำ	131
8.2	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง	132
8.3	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงกว่าสอง	138
8.4	บทสรุป	143
	แบบฝึกหัด	144
บรรณานุกรม		151
ดัชนี		153

บทที่ 1

พื้นฐานความรู้

1.1 บทนำ

เทคโนโลยีทางด้านซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ (computer software technology) ได้ถูกนำมาใช้ในการทำนายปรากฏการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นรอบตัวเรา รวมทั้งสร้างอุปกรณ์เครื่องมือเครื่องใช้และสิ่งอำนวยความสะดวกสำหรับชีวิตประจำวัน นับตั้งแต่โครงสร้างรถยนต์ที่ต้องการออกแบบให้มีน้ำหนักเบาแต่คงไว้ซึ่งความแข็งแรงเพื่อการประหยัดพลังงาน การออกแบบขวดน้ำพลาสติกซึ่งประกอบไปด้วยหลายของลอนต่าง ๆ ซึ่งตกแล้วไม่แตก การออกแบบใบพัดของพัดลมที่เราใช้กันตามบ้านเพื่อให้มีเสียงเงียบขณะหมุนตีกับอากาศด้วยความเร็วสูง การออกแบบเก้าอี้พลาสติกที่ใช้กันตามร้านอาหารริมทางให้แข็งแรงแต่ใช้เนื้อพลาสติกน้อย ฯลฯ ตัวอย่างของผลิตภัณฑ์ที่เกิดขึ้นรอบตัวเราในปัจจุบันนี้ล้วนถูกออกแบบมาจากการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ด้วยกันทั้งสิ้น เพราะต้องการให้ผลิตภัณฑ์นั้น ๆ มีประสิทธิภาพสูงสุดในขณะที่ใช้ปริมาณวัสดุและค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด ทั้งนี้ก็เนื่องมาจากการแข่งขันระหว่างภาคเอกชนเพื่อความอยู่รอดของตนเอง การออกแบบผลิตภัณฑ์จากประสบการณ์หรือด้วยการลองผิดลองถูกดังเช่นทำกันในอดีตจึงแทบไม่เกิดขึ้นอีกแล้วในทุกวันนี้

ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ใช้ในการออกแบบผลิตภัณฑ์ต่าง ๆ รอบตัวเรานี้ล้วนตั้งอยู่บนองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ (mathematics) และการคำนวณ (computation) เนื้อหาของคณิตศาสตร์ เช่น แคลคูลัส (calculus) และสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) ที่เราเรียนกันในมหาวิทยาลัยเป็นบันไดขั้นแรกสู่ความสามารถของการวิเคราะห์ปัญหาจริงดังเกริ่นข้างต้น ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์สามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีความซับซ้อนด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) ได้ผลออกมาเป็นตัวเลขแล้วแสดงด้วยระดับของเงดสีให้ปรากฏขึ้นบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ทำให้ผู้ออกแบบเห็นผลลัพธ์ของผลิตภัณฑ์นั้น ๆ ได้ทันที ช่วยลดเวลาและค่าใช้จ่ายไปได้เป็นอย่างมาก

ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เหล่านี้รู้จักกันทั่วไปว่าเป็นคอมพิวเตอร์ช่วยในงานทางวิศวกรรม (Computer-Aided Engineering, CAE) ซึ่งต่างล้วนมีราคาสูง ถูกประดิษฐ์ขึ้นจากฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคำนวณด้วยตัวเลข ดังนั้น กระบวนการภายในจึงประกอบด้วยการทำงาน วน ลูป และหาร ตัวเลขต่าง ๆ เข้าด้วยกันทั้งสิ้น เช่น นำ 0.7816 มาคูณกับ 1.395 แล้วให้ผลลัพธ์ออกมาเป็น 1.090332 ฯลฯ

ในช่วงหลายสิบปีที่ผ่านมา ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ที่ไม่ใช้ตัวเลขแต่ใช้สัญลักษณ์แทน เช่น นำ x^2 มาคูณกับ y ก่อให้เกิดผลลัพธ์เป็น x^2y ปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ได้รับการพัฒนาให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้นตามลำดับ ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์สัญลักษณ์ (symbolic computer software) เหล่านี้สามารถแก้ปัญหาแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ แล้วให้ผลลัพธ์อยู่ในรูปแบบของสัญลักษณ์ดังเช่นที่เราเรียนและเห็นกันในมหาวิทยาลัย ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์สัญลักษณ์ที่เริ่มรู้จักกันอย่างกว้างขวาง ได้แก่ แมทแลบ (MATLAB) เมเปิล (Maple) มิวแพด (MuPad) แมกซิม่า (Maxima) และแมทมาทิกา (Mathematica) ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์สัญลักษณ์เหล่านี้สามารถหาผลลัพธ์ของค่าอนุพันธ์และการอินทิเกรตสำหรับปัญหาแคลคูลัสได้ง่าย โดยให้ผลลัพธ์ในรูปแบบของสัญลักษณ์ที่เราคุ้นตากัน เช่น

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 3x) = 2x + 3$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

หรือหาผลเฉลย (solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} + y = \cos x$$

ซึ่งก็คือ

$$y(x) = ce^{-x} + \frac{\sin(x)}{2} + \frac{\cos(x)}{2}$$

โดย c แทนค่าคงตัว (constant) ผลลัพธ์ในรูปแบบสัญลักษณ์เหล่านี้จะปรากฏขึ้นบนหน้าจอเมื่อผู้ใช้พิมพ์คำสั่ง (command) เพียงสั้น ๆ ลงไปเท่านั้น

ล่าสุด ซอฟต์แวร์ที่มีชื่อว่าวูลแฟรมแอลฟา (WolframAlpha) ซึ่งตั้งอยู่บนพื้นฐานของซอฟต์แวร์แมทมาติกาประดิษฐ์ขึ้นโดย ดร.สตีเฟน วูลแฟรม (Stephen Wolfram) และทีมงาน ได้ถูกพัฒนาให้ไม่เพียงแต่แสดงผลลัพธ์ท้ายสุด แต่ยังแสดงกระบวนการขั้นตอนของการได้มาซึ่งผลลัพธ์นั้น ๆ ด้วย กระบวนการขั้นตอนเหล่านี้คล้ายคลึงกับที่เราเคยเรียนกันมาในมหาวิทยาลัย

เนื้อหาภายในบทนี้จึงเป็นการแนะนำซอฟต์แวร์วูลแฟรมแอลฟา พร้อมกับการนำเสนอพื้นฐานการใช้งานคณิตศาสตร์เบื้องต้น รวมไปถึงการพล็อตฟังก์ชันในรูปแบบต่าง ๆ ด้วยการใช้คำสั่งคล้ายกับภาษาพูด ผู้ใช้จึงไม่ต้องจดจำคำสั่งจำเพาะดังที่เกิดขึ้นกับซอฟต์แวร์อื่น ๆ ตัวอย่างต่าง ๆ ที่นำเสนอในบทนี้และบทถัดไปจะทำให้เราเห็นศักยภาพและประโยชน์ของซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์สัญลักษณ์ที่สามารถช่วยในการศึกษาคณิตศาสตร์ให้เข้าใจง่ายขึ้นได้เป็นอย่างดี

1.2 การใช้วูลแฟรมแอลฟา

ซอฟต์แวร์วูลแฟรมแอลฟาได้ถูกประดิษฐ์ขึ้นให้เข้าใจคำสั่งที่ง่าย ๆ คล้ายภาษาพูด ผลลัพธ์ของการทำคณิตศาสตร์เบื้องต้น (elementary mathematics) เช่น การบวก ลบ จำนวนเศษส่วน (rational numbers) สามารถทำได้โดยเพียงพิมพ์คำสั่งลงในกล่องคำสั่ง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\frac{3}{4} + \frac{5}{12} - \frac{1}{3}$

ผู้ใช้เพียงพิมพ์จำนวนเศษส่วนเหล่านี้ลงในกล่องคำสั่ง ดังนี้