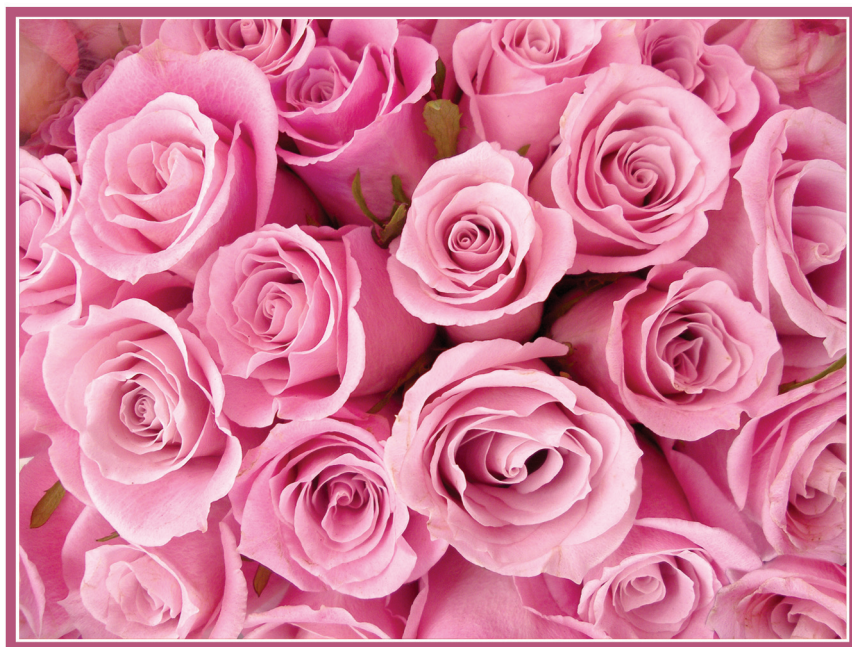


Calculus & Differential Equations with **MATHEMATICA**



แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยแมทมาทิกา

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์

ด้วยเมทริก้า

แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ ด้วยเมทริก้า

ปราโมทย์ เตชะอำไพ

 **สำนักพิมพ์**
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2563

420.-

ปราโมทย์ เศษอำไพ

แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยเมทริกซ์ / ปราโมทย์ เศษอำไพ

1. เมทริกซ์, 2. แคลคูลัส, 3. แคลคูลัส -- โปรแกรมคอมพิวเตอร์.
4. สมการเชิงอนุพันธ์, 5. สมการเชิงอนุพันธ์ -- โปรแกรมคอมพิวเตอร์.
6. คณิตศาสตร์ -- การประมวลผลข้อมูล.

510.285536

ISBN 978-974-03-3909-0

สพจ. 2413



assคุณคำวิชาการ สู้สังคม
Knowledge to All
www.cupress.chula.ac.th

สิทธิในการผลิตและพิมพ์หนังสือเล่มนี้เป็นของสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยแต่ผู้เดียว

การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้น

ต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จัดพิมพ์โดย สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 500 เล่ม พ.ศ. 2563

ผู้จัดจำหน่าย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

สาขา ศาลาพระเกี้ยว โทร. 0-2218-7000-3 โทรสาร 0-2255-4441

สยามสแควร์ โทร. 0-2218-9881-2 โทรสาร 0-2254-9495

ม.นเรศวร จ.พิษณุโลก โทร. 0-5526-0162-4 โทรสาร 0-5526-0165

ม.เทคโนโลยีสุรนารี จ.นครราชสีมา โทร. 0-4421-6131-4 โทรสาร 0-4421-6135

ม.บูรพา จ.ชลบุรี โทร. 0-3839-4855-9 โทรสาร 0-3839-3239

โรงเรียนนายร้อย จปร. จ.นครนายก โทร. 0-3739-3023 โทรสาร 0-3739-3023

ม.พะเยา จ.พะเยา โทร. 0-5446-6799-800 โทรสาร 0-5446-6798

จัตุรัสจามจุรี (CHAMCHURI SQUARE) ชั้น 4 โทร. 0-2160-5301-2 โทรสาร 0-2160-5304

หัวหมาก โทร. 0-2374-1378 โทรสาร 0-2374-1377

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน จ.นครราชสีมา โทร. 0-4492-2662-3 โทรสาร 0-4492-2664

Call Center (จัดส่งทั่วประเทศ) โทร. 0-2255-4433 <http://www.chulabook.com> และเครือข่ายฯ

ร้านค้าติดต่อ แผนกขายส่ง สาขาหัวหมาก โทร. 0-2374-1375-6 โทรสาร 0-2374-1375

กองบรรณาธิการ : ทิพวรรณ โหละสุต

ออกแบบปกและรูปเล่ม : ไกรอัมพร พงษ์จักร

พิมพ์ที่ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย [CUB6303-002] โทร. 0-2218-3562-3 โทรสาร 0-2218-3547

www.cupress.chula.ac.th

คำนำ

เป้าหมายหลักของการแต่งหนังสือ “แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ด้วย
แมทมาทิกา” คือการช่วยผลักดันให้นักศึกษาได้เข้าใจในความสำคัญของคณิตศาสตร์
แขนงนี้ เพราะเป็นพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการทำความเข้าใจในวิทยาศาสตร์และการวิเคราะห์
งานทางวิศวกรรมศาสตร์ในระดับสูงขึ้นไป วิชาแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์จึงเป็นวิชา
บังคับของการเรียนในระดับอุดมศึกษาโดยเฉพาะทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

อย่างไรก็ตาม วิชาแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์กลับกลายเป็นเสมือนยาขม
สำหรับผู้ศึกษาเป็นส่วนใหญ่เพราะต้องจดจำสูตร สมการ และกระบวนการหาผลลัพธ์ที่มี
ความจำเพาะ และที่สำคัญที่สุดก็คือไม่ทราบโดยชัดเจนว่าจะนำไปใช้ทำอะไรได้บ้าง เพราะ
ต้องหมกมุ่นกับกระบวนการจดจำข้างต้นจนลืมภาพรวมใหญ่ของความสำคัญและจำเป็นใน
การศึกษาวิชาเช่นนี้ไปเกือบสิ้นเชิง

ความเจริญก้าวหน้าด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีในปัจจุบันเป็นไปอย่าง
รวดเร็วด้วยซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ ซอฟต์แวร์เหล่านี้ล้วนมีราคาสูงและตั้งอยู่บนองค์ความรู้
ของคณิตศาสตร์ซึ่งผู้ใช้งานจำเป็นต้องมีความรู้ความเข้าใจในพื้นฐานของแคลคูลัสและสมการเชิง
อนุพันธ์มาก่อน หากผู้ใช้งานไม่มีความรู้ความเข้าใจในวิชาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์เหล่านี้จะ
สามารถใช้ซอฟต์แวร์ได้อย่างถูกต้อง มีส่วนทำให้ประสิทธิภาพการแข่งขันทางวิทยาศาสตร์
และเทคโนโลยีของประเทศด้อยลง

ซอฟต์แวร์เหล่านี้ใช้ศักยภาพของเครื่องคอมพิวเตอร์ในการบวก ลบ คูณ หาร
ตัวเลขที่สามารถทำได้อย่างรวดเร็ว ผสมผสานกับวิธีเชิงตัวเลขซึ่งตั้งอยู่บนกระบวนการของ
คณิตศาสตร์การคำนวณอีกต่อหนึ่ง ก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่เป็นตัวเลขเพื่อพล็อตขึ้นเป็นกราฟบน
หน้าจอคอมพิวเตอร์ ทำให้ผู้ใช้ซอฟต์แวร์เข้าใจในปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นสำหรับปัญหานั้น ๆ
ได้โดยชัดเจนในระยะเวลาอันสั้น

ในปัจจุบัน ซอฟต์แวร์ที่จัดการกับสัญลักษณ์ได้รับการพัฒนาให้มีศักยภาพสูงขึ้น
มาก แมทมาทิกา (Mathematica) เป็นซอฟต์แวร์ที่ได้รับความนิยมเพราะสามารถจัดการกับ

ทั้งตัวเลขและสัญลักษณ์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ทำให้แมทมาทิกกลายเป็นซอฟต์แวร์ที่ใช้ร่วมไปกับการเรียนการสอนในวิชาคณิตศาสตร์ทั้งสายวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ตามมหาวิทยาลัยในต่างประเทศ

หนังสือเล่มนี้จึงเน้นการใช้ซอฟต์แวร์แมทมาทิกเพื่อแก้ปัญหาแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ หากปัญหานั้นมีผลเฉลยแม่นยำตรงหนังสือเล่มนี้ก็จะทบทวนกระบวนการหาผลเฉลยแม่นยำตรงนั้นดังที่เคยเรียนกันมาแล้วในชั้นเรียนก่อนใช้คำสั่งในแมทมาทิกเพื่อหาผลลัพธ์เดียวกัน ผลเฉลยแม่นยำตรงที่เกิดขึ้นนี้อยู่ในรูปแบบของสัญลักษณ์ เช่น ตัว x, y ทางคณิตศาสตร์ ที่บางครั้งทำให้เกิดความประหลาดใจว่าแมทมาทิกสามารถหาผลลัพธ์เช่นนี้ได้ในเวลาอันสั้นเมื่อเปรียบเทียบกับการทำงานด้วยตนเองซึ่งต้องใช้เวลาอย่างมากทีเดียว

ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นยังสามารถนำมาพล็อตได้โดยสะดวก ประโยชน์ของซอฟต์แวร์เช่นนี้จึงช่วยให้ผู้ศึกษามีเวลาในการทำความเข้าใจผลลัพธ์ซึ่งบ่งบอกปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในปัญหานั้น ช่วยทำให้ผู้ศึกษาเกิดมุมมองของการศึกษาวิชาแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ไปอีกด้านหนึ่งว่าเป็นวิชาที่มีประโยชน์ต่อการสร้างเทคโนโลยีใหม่ ๆ ในอนาคต ไม่มองวิชาเช่นนี้ว่าเป็นวิชาที่น่าเบื่อหน่าย ต้องใช้การจดจำ และไม่รู้อาจนำไปใช้ประโยชน์อย่างไรได้บ้าง ดังเช่นที่อาจเกิดขึ้นในอดีต

ผู้เขียนขอขอบคุณคุณคุณทัศนีย์ วัฒนเขวาน์พิสุทธิ์ ผู้แทนแมทมาทิกผู้เผยแพร่ซอฟต์แวร์นี้ในประเทศไทย และนางสาวไกรอัมพร พงษ์ขจร ผู้จัดพิมพ์เนื้อหา ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะทำให้มุมมองการศึกษาวิชาแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ในประเทศไทยนั้นเปลี่ยนแปลงไป

ปราโมทย์ เดชะอำไพ
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

คำนำ

บทที่ 1	คณิตศาสตร์สัญลักษณ์ด้วยซอฟต์แวร์	1
1.1	บทนำ	1
1.2	การแก้สมการคณิตศาสตร์ด้วยซอฟต์แวร์	3
1.3	ความเป็นมาและศักยภาพของเมทริกซ์	6
1.4	พื้นฐานเมทริกซ์	6
1.5	บทสรุป	12
	แบบฝึกหัด	13
บทที่ 2	แคลคูลัส	19
2.1	บทนำ	19
2.2	การหาค่าลิมิต	19
2.3	การหาค่าอนุพันธ์	25
2.4	การอินทิเกรต	34
2.5	อนุกรมเทย์เลอร์	41
2.6	อนุกรมทั่วไป	46
2.7	บทสรุป	48
	แบบฝึกหัด	48
บทที่ 3	สมการเชิงอนุพันธ์	55
3.1	บทนำ	55
3.2	ลักษณะของสมการเชิงอนุพันธ์	56
3.3	ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์	58

3.4	บทสรุป	67
	แบบฝึกหัด	67
บทที่ 4	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	75
4.1	บทนำ	75
4.2	สมการแบบแยกได้	76
4.3	สมการเชิงเส้น	83
4.4	สมการแม่นตรง	90
4.5	สมการรูปแบบจำเพาะ เบอร์นูลลี และริคคาตี	103
4.6	ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข	110
4.7	บทสรุป	114
	แบบฝึกหัด	115
บทที่ 5	สมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสอง	125
5.1	บทนำ	125
5.2	สมการเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว	126
5.3	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน	129
5.4	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน	132
5.5	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นค่าคอนจูเกตเชิงซ้อน	138
5.6	สมการไม่เอกพันธ์	144
5.7	วิธีหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่รู้ค่า	146
5.8	วิธีแปรผันพารามิเตอร์	151
5.9	ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข	159
5.10	บทสรุป	162
	แบบฝึกหัด	163

บทที่ 6	สมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสูงขึ้นไป	173
6.1	บทนำ	173
6.2	สมการเอกพันธ์ที่สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว	174
6.3	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน	177
6.4	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน	180
6.5	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นค่าคอนจูเกตเชิงซ้อน	183
6.6	ผลเฉลยเมื่อรากเป็นค่าผสม	186
6.7	สมการไม่เอกพันธ์	188
6.8	ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข	195
6.9	บทสรุป	199
	แบบฝึกหัด	200
บทที่ 7	การแปลงลาปลาซ	209
7.1	บทนำ	209
7.2	สมการพื้นฐาน	210
7.3	การแปลงลาปลาซ	213
7.4	การแปลงลาปลาซผกผัน	216
7.5	การแก้สมการเชิงอนุพันธ์	220
7.6	บทสรุป	237
	แบบฝึกหัด	237
บทที่ 8	การแปลงฟูริเยร์	243
8.1	บทนำ	243
8.2	สมการพื้นฐาน	244
8.3	การแปลงฟูริเยร์	247

8.4	การแปลงฟูรีเยร์ผกผัน	252
8.5	การแปลงฟูรีเยร์แบบเร็ว	255
8.6	การแก้สมการเชิงอนุพันธ์	258
8.7	บทสรุป	261
	แบบฝึกหัด	262

บทที่ 9 ปัญหาเงื่อนไขขอบเขต **267**

9.1	บทนำ	267
9.2	ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตแบบสองจุด	269
9.3	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง	271
9.4	สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง	276
9.5	สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีความซับซ้อน	281
9.6	บทสรุป	284
	แบบฝึกหัด	285

บทที่ 10 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย **297**

10.1	บทนำ	297
10.2	สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย	298
10.3	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	299
10.4	สมการเอลลิปติก	300
10.5	สมการพาราโบลิค	310
10.6	สมการไฮเพอร์โบลิค	322
10.7	บทสรุป	333
	แบบฝึกหัด	334

บทที่ 11 ฟังก์ชันพิเศษ	347
11.1 บทนำ	347
11.2 ฟังก์ชันความคลาดเคลื่อน	348
11.3 ฟังก์ชันแกมมา	350
11.4 ฟังก์ชันบีตา	354
11.5 ฟังก์ชันเบสเซล	358
11.6 ฟังก์ชันเอรี	365
11.7 ฟังก์ชันเลอจองดร์	368
11.8 อินทิกรัลพิเศษ	373
11.9 บทสรุป	377
แบบฝึกหัด	378
บรรณานุกรม	387
บรรณานุกรม	391
ประวัติผู้เขียน	398

บทที่ 1

คณิตศาสตร์สัญลักษณ์ ด้วยซอฟต์แวร์

1.1 บทนำ

เป็นที่ทราบกันดีว่าพื้นฐานของการวิเคราะห์งานทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม-ศาสตร์ในปัจจุบันล้วนตั้งอยู่บนความเข้าใจในคณิตศาสตร์ จึงเป็นเหตุให้นักศึกษาตามสถาบันการศึกษาถูกบังคับให้เรียนวิชาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เช่น วิชาแคลคูลัส (calculus) วิชาสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) รวมทั้งวิชาอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกัน วิชาเหล่านี้อธิบายพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นเพื่อใช้แก้ปัญหาในระดับสูงขึ้นไป การศึกษาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์เริ่มตั้งแต่การทำความเข้าใจฟังก์ชัน (function) ในรูปแบบต่าง ๆ การหาค่าลิมิต (limit) ของฟังก์ชันเหล่านี้ การหาค่าอนุพันธ์ (differentiation) การอินทิเกรต (integration) ฯลฯ ซึ่งต่างมีความซับซ้อนและจำเพาะในตัวเอง เป็นผลให้นักศึกษาต้องท่องจำเพื่อเตรียมตัวสอบ แต่ส่วนใหญ่ก็มักลืมวิธีการเหล่านี้หลังจากการสอบได้เสร็จสิ้นไปแล้ว นอกเหนือไปจากนั้น ความซับซ้อนและจำเพาะในวิธีการเหล่านี้ทำให้นักศึกษาจำนวนมากน้อยไม่ได้ให้ความสนใจในการเรียนรู้เท่าใดนักเพราะยังไม่เห็นความสำคัญในการนำความรู้เหล่านี้ไปใช้ในงานได้จริง

ในการศึกษาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ดังอธิบายมาข้างต้นนี้ นักคณิตศาสตร์ (mathematicians) มักลงลึกไปในรายละเอียดด้วยการทำความเข้าใจในการประดิษฐ์สมการต่าง ๆ อย่างเป็นขั้นเป็นตอน ก่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจในรายละเอียดอย่างชัดเจน ในขณะที่นักวิทยาศาสตร์ (scientists) และวิศวกร (engineers) ต้องการผลลัพธ์ขั้นสุดท้ายออกมาเป็นสมการ แล้วนำสมการนั้นมาพล็อตเพื่อศึกษาถึงปรากฏการณ์ของผลลัพธ์ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้โดยไม่สนใจในรายละเอียดของกระบวนการในช่วงของการประดิษฐ์สมการเหล่านั้นเท่าใดนัก ดังนั้น หากมีซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ (computer software) ที่ช่วยประดิษฐ์สมการเหล่านี้ให้ได้ก็จะก่อให้เกิดประโยชน์แก่คนกลุ่มหลังนี้ได้เป็นอย่างมากทีเดียว

ทุกวันนี้ มีซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์จำนวนไม่น้อยซึ่งใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ ในงานทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมโดยให้ผลลัพธ์ออกมาเป็นตัวเลข ซอฟต์แวร์เหล่านี้ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical methods) ในการแก้สมการทางพีชคณิต การหาค่าอนุพันธ์ การอินทิเกรตฟังก์ชัน การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ฯลฯ ก่อให้เกิดวิชาหลากหลายที่เรียนกันตามสถาบันการศึกษาทั่วไป ยกตัวอย่างเช่น หากเราต้องการอินทิเกรต

$$\int_0^3 x^2 dx$$

เราสามารถใช้ซอฟต์แวร์เชิงตัวเลขเพื่อหาค่าผลลัพธ์ออกมาเป็นตัวเลขที่มีค่าเท่ากับ 9 ได้โดยง่าย ในแนวคิดที่คล้ายกัน หากมีซอฟต์แวร์ที่สามารถให้ผลลัพธ์ออกมาเป็นสัญลักษณ์ (symbolic) ได้โดยตรงบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ เช่น

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

ก็จะก่อให้เกิดความสะดวกในการเรียนวิชาแคลคูลัสได้เป็นอย่างมากเช่นกัน

แนวความคิดการหาผลลัพธ์ในรูปแบบของคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ (symbolic mathematics) เกิดขึ้นในช่วงประมาณ พ.ศ. 2520 ผู้เขียนยังจำได้ว่าเคยใช้ซอฟต์แวร์ MACSYMA (Mac Symbolic Manipulation Program) ประดิษฐ์ขึ้นที่สถาบันเทคโนโลยีแมสซาชูเซตส์ (Massachusetts Institute of Technology, MIT) ซึ่งสามารถให้ผลลัพธ์เป็นตัวอักษร (แทนที่จะเป็นตัวเลข) ทำให้เกิดความแปลกใจเป็นอย่างมากในยุคนั้น

1.2 การแก้สมการคณิตศาสตร์ด้วยซอฟต์แวร์

ในการเรียนวิชาแคลคูลัส เราจำเป็นต้องจำสูตรหลากหลายเพื่อใช้หาค่าอนุพันธ์และค่าอินทิเกรตของฟังก์ชัน หากเราจำสูตรต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้องและดำเนินการอย่างเป็นขั้นเป็นตอนด้วยความระมัดระวัง เราจะได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องดังตัวอย่างต่าง ๆ ต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน

$$f = \frac{x}{3 - 4 \cos x}$$

วิธีการทั่วไปเพื่อหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันนี้ เราจำเป็นต้องประยุกต์สูตรการหาค่าอนุพันธ์ที่เหมาะสม แล้วดำเนินการอย่างเป็นขั้นเป็นตอนโดยหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันนี้ก่อน แล้วดำเนินการซ้ำอีกครั้งเพื่อหาค่าอนุพันธ์อันดับสอง ก่อให้เกิดผลลัพธ์ดังนี้

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{16x \cos^2 x + 4 \cos x (3x - 8 \sin x) - 32x + 24 \sin x}{(4 \cos x - 3)^3}$$

ผลลัพธ์ข้างต้นนี้สามารถหาด้วยการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เชิงสัญลักษณ์ (symbolic computer software) ได้โดยง่ายในระยะเวลาอันสั้น ยิ่งไปกว่านั้น หากเราต้องการหาค่าอนุพันธ์อันดับสูงขึ้นไปของฟังก์ชันนี้ เช่น อันดับที่ 10 เป็นต้น ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เหล่านี้ก็สามารถหาผลลัพธ์ให้ได้โดยง่ายในระยะเวลาอันสั้นอย่างไม่มีข้อผิดพลาด

ตัวอย่าง จงหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีความซับซ้อน

$$g = \frac{x \tan x - 3 \tan x - 21x^3 + 7x^4}{x^3 - 3x^2 + 6x - 18}$$

ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งสามารถหาได้โดยง่ายด้วยการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เชิงสัญลักษณ์ ก่อให้เกิดผลลัพธ์คือ

$$\frac{dg}{dx} = -\frac{2x \tan x + 504}{(x^2 + 6)^2} + \frac{\tan^2 x + 43}{x^2 + 6} + 7$$

และค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันนี้คือ

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{2016x - 48 \tan x}{(x^2 + 6)^3} - \frac{4x \tan^2 x - 6 \tan x + 88x}{(x^2 + 6)^2} + \frac{2 \tan x (\tan^2 x + 1)}{x^2 + 6}$$

ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นและมีความซับซ้อนเช่นนี้สามารถผลิตได้ง่ายหากดำเนินการด้วยตนเองแบบที่เราทำกันในชั้นเรียน

ตัวอย่าง กระบวนการอินทิเกรตเป็นอีกแขนงหนึ่งในการเรียนวิชาแคลคูลัสที่ทำให้ผู้ศึกษาเกิดความไม่สบายใจเพราะต้องจำสูตรและเทคนิคหลาย ๆ อย่าง อีกทั้งไม่เห็นถึงความสำคัญของผลลัพธ์ที่จะนำไปใช้ให้เกิดประโยชน์ในงานชนิดใดได้บ้าง ดังตัวอย่างเช่น

$$\int \frac{dx}{x^2 + 9} = \frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x}{3} \right)$$

หรืออีกหนึ่งตัวอย่างที่มีความซับซ้อนมากขึ้นไปอีก เช่น

$$\int_1^2 \frac{x dx}{(x+1)(2x-1)} = \frac{1}{2} \ln(3) - \frac{1}{3} \ln(2)$$

ผลลัพธ์ของการอินทิเกรตข้างต้นนี้สามารถหาได้โดยสะดวกด้วยการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เชิงสัญลักษณ์ในปัจจุบัน ดังนั้นจึงสามารถใช้ผลลัพธ์จากซอฟต์แวร์นี้เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการทำด้วยตนเองได้ทันที

ตัวอย่าง ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เชิงสัญลักษณ์ยังช่วยแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ ที่บุคคลทั่วไปอาจใช้เวลาานกว่าจะได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่ถูกต้อง เช่น หากต้องการแฟกเตอร์ (factor) พหุนาม

$$h = x^4 + 26x^3 - 212x^2 - 1578x + 5859$$

เราสามารถใช้อุปกรณ์คอมพิวเตอร์ทำให้ได้ ก่อให้เกิดผลลัพธ์

$$h = (x+7)(x-9)(x-3)(x+31)$$

โดยใช้เวลาในการทำเพียงไม่ถึงหนึ่งวินาที

ตัวอย่าง วิชาแก้สมการเชิงอนุพันธ์เป็นอีกวิชาหนึ่งที่เปรียบเสมือนยาขมสำหรับผู้เรียนจำนวนมากไม่น้อย เพราะต้องจดจำเทคนิคและกระบวนการจำเพาะเพื่อใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งมีรูปแบบที่แตกต่างกันออกไป เช่น

$$\frac{dy}{dx} + y = 5$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งข้างต้นนี้ คือ

$$y(x) = Ce^{-x} + 5$$

โดย C เป็นค่าคงตัวซึ่งสามารถหาต่อไปได้จากเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาที่กำหนดมาให้

หากสมการที่กำหนดมาให้มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น เช่น อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองนี้ คือ

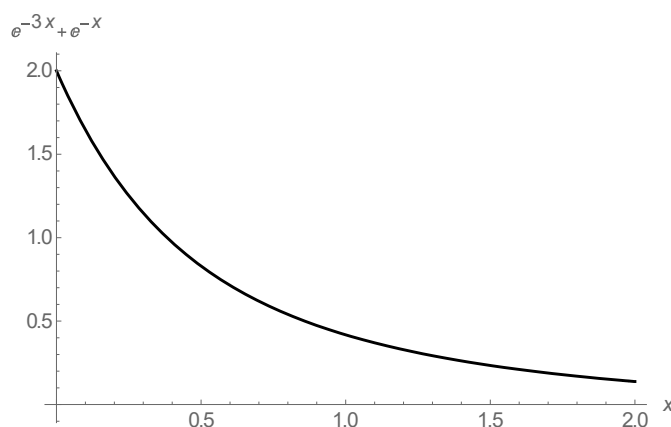
$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$

โดย C_1 และ C_2 เป็นค่าคงตัวซึ่งสามารถหาต่อไปได้จากเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหาลักษณะที่กำหนดมาให้เหมือนกัน

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่าง ๆ เหล่านี้ สามารถหาได้ทันทีโดยง่ายด้วยการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เชิงสัญลักษณ์ อีกทั้งยังสามารถพล็อตได้โดยตรงบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ช่วยทำให้ผู้ศึกษาเข้าใจในความหมายของปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นจากผลเฉลยเหล่านี้ เช่น หาก $C_1 = C_2 = 1$ แล้ว ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองข้างต้นนี้ก็คือ

$$y(x) = e^{-x} + e^{-3x}$$

ซึ่งมีลักษณะการกระจายไปตาม x ดังแสดงในรูป



1.3 ความเป็นมาและศักยภาพของแมทมาทิกา

แมทมาทิกา (Mathematica) เป็นซอฟต์แวร์คณิตศาสตร์เชิงสัญลักษณ์ (symbolic mathematics) และการคำนวณ (computation) ที่มีประสิทธิภาพสูง ถูกใช้กันอย่างแพร่หลายโดยนักวิทยาศาสตร์ วิศวกร และนักวิจัย ซอฟต์แวร์นี้ได้ประดิษฐ์ขึ้นโดย ดร.สตีเฟน วูลแฟรม (Dr. Stephen Wolfram) ใน พ.ศ. 2522 ในช่วงเวลานั้นซอฟต์แวร์ทั้งหลายสามารถคำนวณผลลัพธ์ออกมาเป็นตัวเลขได้เพียงอย่างเดียว จึงเป็นสิ่งอัศจรรย์ที่ซอฟต์แวร์แมทมาทิกาสามารถให้ผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ออกมาเป็นสัญลักษณ์อันประกอบไปด้วยตัวอักษรต่าง ๆ เช่น ตัว x ตัว y ฯลฯ ได้ นักวิจัยจึงสามารถประดิษฐ์ (derive) สมการที่มีความซับซ้อนได้โดยง่าย ในขณะที่นักศึกษาสามารถหาผลลัพธ์ (solution) ในวิชาแคลคูลัส หรือจากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) ได้โดยสะดวกเช่นกัน

หนังสือเล่มนี้จึงอธิบายการใช้ซอฟต์แวร์แมทมาทิกาเพื่อหาผลลัพธ์ในรูปแบบของคณิตศาสตร์สัญลักษณ์แบบที่เราศึกษากันในชั้นเรียน โดยนำเสนอการแก้ปัญหาที่สำคัญ ๆ เพื่อหาผลลัพธ์ในวิชาแคลคูลัสและวิชาสมการเชิงอนุพันธ์เป็นหลัก รายละเอียดขั้นตอนการประดิษฐ์ผลลัพธ์จะนำเสนอก่อนใช้ซอฟต์แวร์ซึ่งให้ผลลัพธ์ที่เหมือนกัน เราจะพบว่าซอฟต์แวร์แมทมาทิกาสามารถให้ผลลัพธ์ได้ทันทีอย่างรวดเร็ว อีกทั้งยังสามารถแสดงขั้นตอนการประดิษฐ์แบบเดียวกับที่อาจารย์สอนเราในชั้นเรียน

1.4 พื้นฐานแมทมาทิกา

แมทมาทิกาเป็นซอฟต์แวร์ที่มีศักยภาพสูงทำงานได้หลากหลายจึงมีขนาดใหญ่ ประกอบไปด้วยคำสั่ง (commands) กฎและระเบียบวิธีใช้งานเป็นจำนวนมาก รายละเอียดต่าง ๆ เหล่านี้ได้นำเสนอในหนังสือ “พื้นฐานแมทมาทิกา (Mathematica Fundamentals)” ซึ่งเขียนขึ้นโดยผู้แต่งเช่นกัน ผู้อ่านสามารถศึกษาค้นคว้าการใช้คำสั่งเพื่อการคำนวณ การพล็อตกราฟ รวมทั้งเทคนิคการใช้งานอื่น ๆ อีกเป็นจำนวนมากได้จากหนังสือเล่มนั้น แต่เนื่องจากหนังสือเล่มนี้เน้นการใช้คณิตศาสตร์สัญลักษณ์ ดังนั้นจึงขอนำเสนอเฉพาะคำสั่ง กฎและระเบียบเท่าที่จำเป็น ดังต่อไปนี้

ไฟล์ใช้งาน (working file) ของเมแทมตีกามีนามสกุลว่า *.nb* ซึ่งเป็นคำย่อมาจากโน้ตบุ๊ก (notebook) หากผู้ใช้ไม่เคยสร้างไฟล์ใช้งานมาก่อน ต้องคลิกที่ปุ่ม **New Document** เพื่อให้พื้นที่ทำงาน (working area) ปรากฏขึ้นบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ จากนั้นจึงเริ่มทำงานได้ ยกตัวอย่างเช่น การบวก 2 กับ 3 เข้าด้วยกัน เราก็เพียงพิมพ์ลงไปว่า 2+3 แล้วกดปุ่ม **Enter** ซึ่งคือปุ่มใหญ่มุมล่างขวาสุดของแป้นพิมพ์มาตรฐาน แต่หากเป็นแป้นขนาดเล็กบนโน้ตบุ๊ก ต้องกดปุ่ม **Shift** ไปพร้อมกับปุ่ม **Enter**

In[1]:= 2 + 3

Out[1]= 5

หนึ่ง ข้อมูลที่พิมพ์เข้าจะแสดงเป็นตัวทึบ (bold) ในขณะที่ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นนั้นแสดงเป็นตัวปกติ (regular) นอกจากนั้น ลำดับข้อมูลการพิมพ์เข้าและผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นยังแสดงด้วยตัวเลข ดังนั้น เพื่อการแสดงผลให้เกิดความชัดเจน ลำดับตัวเลขเหล่านี้จะขอละไว้สำหรับหนังสือเล่มนี้

เมแทมตีกามีตารางสัญลักษณ์ (symbol palettes) เพื่อให้ความสะดวกในการพิมพ์สัญลักษณ์ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ ยกตัวอย่างเช่น หากต้องการอินทิเกรต (integrate)

$$\int \mathbf{x}^n d\mathbf{x}$$

$$\frac{\mathbf{x}^{1+n}}{1+n}$$

ข้อมูลพิมพ์เข้าและผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นบนหน้าจอคอมพิวเตอร์สามารถคัดลอกและปะ (copy and paste) ลงในซอฟต์แวร์อื่น เช่น เวิร์ด (Word) หรือโน้ตแพด (Notepad) ได้โดยตรง หากไม่ต้องการให้ข้อมูลพิมพ์เข้าถูกคำนวณ ก็เพียงใส่เครื่องหมายดาว (*) ปิดท้ายข้อมูลนั้น เช่น

(* This statement is similar to a comment card *)

ในการออกจากไฟล์โน้ตบุ๊ก ให้คลิกที่ปุ่ม **File** ตามด้วยปุ่ม **Exit** ตามลำดับ นอกจากนั้น หากต้องการหยุดการคำนวณใด ๆ ในขณะที่ซอฟต์แวร์ยังทำงานไม่เสร็จสิ้น ให้คลิกที่ปุ่ม **Evaluation** ตามด้วยปุ่ม **Abort Evaluation** ตามลำดับ

เมแทมตีกาสามารถใช้เป็นเครื่องคิดเลขระดับสูง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$(2 + 5) * 3$$

21

$$(2 + 5) / 3$$

$$\frac{7}{3}$$

เมทาทิก้าให้ผลลัพธ์ในรูปแบบแม่นยำตรง (exact form) เสมอหากผลลัพธ์นี้ประกอบไปด้วยค่าที่มีจุดทศนิยม ดังเช่นค่าเศษส่วนในตัวอย่างข้างบนนี้ แต่หากต้องการค่าที่มีจุดทศนิยม ก็เพียงจุด (period) ลงไปตามหลังตัวเลข เช่น

$$(2 + 5.) / 3$$

2.33333

ผลลัพธ์ในรูปแบบแม่นยำตรงสามารถสื่อความหมายได้ดีกว่า เช่น

$$\sqrt{27}$$

$$3\sqrt{3}$$

หากต้องการค่าข้างต้นในรูปแบบที่มีจุดทศนิยม ก็เพียงใช้คำสั่ง N[] เท่านั้น เช่น

$$N[\%]$$

5.19615

N

โดย % แทนค่าก่อนหน้านี้ และหากต้องการทศนิยม 30 ตำแหน่ง ก็เพียงพิมพ์ว่า

$$N[\text{Sqrt}[27], 30]$$

5.19615242270663188058233902452

คำสั่งที่ฝังตัวอยู่ในเมทาทิก้าล้วนขึ้นต้นด้วยอักษรตัวใหญ่ (capital letter) เช่น N และ Sqrt ดังแสดงข้างต้น อนึ่ง ตารางสัญลักษณ์ช่วยทำให้การกรอกข้อมูลเป็นไปได้โดยง่าย เช่น

$$2^{17}$$

$$3^{13}$$

$$\frac{131072}{1594323}$$

$$N[\%, 40]$$

0.08221169737876201999218477058914661583631

เมทาทิกาได้กำหนดสัญลักษณ์จำเพาะสำหรับบางค่าที่รู้จักกันแพร่หลาย เช่น ค่าไพ (pi) ค่ายกกำลัง (exponential) ตัวเลขจินตนาการ (imaginary number) ดังแสดงด้วยตัวอย่างข้างล่างนี้ ค่าเหล่านี้เป็นค่าแม่นยำ (exact) เสมอตรงที่ยังไม่ได้แสดงให้เห็นว่ามีจุดทศนิยม

Pi	$\pi + 0.$
π	3.14159
Log[e]	i^2
1	-1

ในทำนองเดียวกัน ฟังก์ชันทางตรีโกณมิติก็แสดงเป็นค่าแม่นยำเสมอ เช่น

Sin $\left[\frac{\pi}{4}\right]$	Tan $\left[\frac{\pi}{6}\right]$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
Cos $\left[\frac{\pi}{12}\right]$	ArcSin $\left[\frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right]$
$\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{12}$

เมทาทิกายังประกอบไปด้วยคำสั่งที่ช่วยจัดการสมการทางพีชคณิตให้ดูง่ายและสั้นลง ยกตัวอย่างเช่น คำสั่ง Expand กระจายพจน์ในสมการออก แล้วคัดเลือกพจน์ที่มีความคล้ายคลึงกันจัดรวมเข้าด้วยกัน

$$f = (x+5)(x-3)$$

$$f = (x+5) * (x-3) ;$$

$$\text{Expand}[f]$$

$$-15 + 2x + x^2$$

Expand

ก่อให้เกิดผลลัพธ์ คือ

$$f = x^2 + 2x - 15$$

อีกตัวอย่างหนึ่ง

$$g = \cos(x + y)$$

g = Cos[x + y] ;

Expand[g, Trig → True]

Expand

Cos [x] Cos [y] - Sin [x] Sin [y]

ได้ผลลัพธ์เป็น

$$g = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

คำสั่ง **Factor** แยกตัวประกอบ ช่วยทำให้ดูง่ายขึ้น ตัวอย่างเช่น

$$h = 6x^3 + 11x^2 - 16x - 21$$

h = 6 x³ + 11 x² - 16 x - 21 ;

Factor[h]

Factor

(1 + x) (-3 + 2 x) (7 + 3 x)

i.e.,

$$h = (1-x)(2x-3)(7+3x)$$

คำสั่ง **Simplify** ช่วยลดรูปสมการที่มีความซับซ้อนให้ดูง่ายขึ้น ยกตัวอย่างเช่น

$$u = \frac{x+2y}{\frac{2}{x} + \frac{1}{y}}$$

u = (x + 2 * y) / (2 / x + 1 / y) ;

Simplify[u]

Simplify

x y

i.e.,

$$u = xy$$

คำสั่ง **FullSimplify** เป็นคำสั่งที่ใช้ได้โดยสะดวก เพราะรวมคำสั่ง **Expand**, **Factor** และ **Simplify** เข้าด้วยกัน ยกตัวอย่างเช่น

$$v = \frac{2x^5 - 5x^4 + 58x - 145}{2x - 5}$$

v = (2 * x⁵ - 5 * x⁴ + 58 * x - 145) / (2 * x - 5) ;

FullSimplify[v]

FullSimplify

29 + x⁴

นำมาสู่ผลลัพธ์สุดท้ายคือ $v = x^4 + 29$

เมทาทิกายังบรรจุคำสั่ง `Plot` เพื่อใช้พล็อตกราฟต่าง ๆ ได้โดยสะดวก เช่น หากต้องการพล็อตฟังก์ชัน w ซึ่งแปรผันไปกับ x ตามสมการ

$$w = \frac{x \sin x}{x^2 + 12}$$

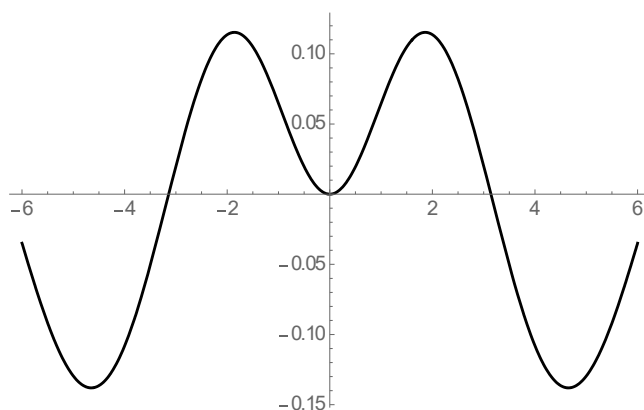
ในช่วง $-6 \leq x \leq 6$ ก็เพียงพิมพ์ว่า

```
w =  $\frac{x * \text{Sin}[x]}{x^2 + 12}$  ;
```

```
Plot[w, {x, -6, 6}, PlotStyle → Black]
```

Plot

รูปภาพการเปลี่ยนแปลงของ w ไปตาม x ก็จะปรากฏขึ้นบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ทันที



คำสั่ง `Plot` ยังสามารถบรรจุหลายตัวเลือกที่ช่วยทำให้รูปภาพของการพล็อตนั้น มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น ยกตัวอย่างเช่น หากต้องการพล็อตฟังก์ชัน w นี้ในช่วง $0 \leq x \leq 40$ พร้อมกับมีสัญลักษณ์ x และ w กำกับที่แกน อีกทั้งใส่จุดจำนวน 100 จุดห่างเท่า ๆ กันตลอดเส้นพล็อต ก็เพียงพิมพ์ลงไปว่า

```
Plot[w, {x, 0, 40}, AxesLabel → {x, w},  
PlotStyle → Black, Mesh → 100]
```