

Computer Aided Engineering

with

MATLAB & ANSYS



คอมพิวเตอร์ช่วยในงานวิศวกรรม
ด้วยแมทแลบและแอนชีส

คอมพิวเตอร์ช่วยในงานวิศวกรรม

ด้วยแม่ทแยบและแอนชีส

คอมพิวเตอร์ช่วยในงานวิศวกรรม

ด้วยเมทแลบและแอนชีส

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

 **สำนักพิมพ์**
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2563

290.-

ปราโมทย์ เศษอำไพ

คอมพิวเตอร์ช่วยในงานวิศวกรรมด้วยเมทแลบและแอนชีส / ปราโมทย์ เศษอำไพ

1. คอมพิวเตอร์ช่วยงานวิศวกรรม. 2. เมทแลบ. 3. แอนชีส (ระบบคอมพิวเตอร์).

4. วิศวกรรมศาสตร์ -- การประมวลผลข้อมูล.

620.00420285

ISBN 978-974-03-3969-4

สพจ. 2453



สรรคุณคำวิชาการ ผู้สังคม
Knowledge to All
www.cupress.chula.ac.th

สิทธิในการผลิตและพิมพ์หนังสือเล่มนี้เป็นของสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยแต่เพียงผู้เดียว

การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้น

ต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จัดพิมพ์โดย สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 1,000 เล่ม พ.ศ. 2563

ผู้จัดจำหน่าย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

สาขา

ศาลาพระเกี้ยว โทร. 0-2218-7000-3 โทรสาร 0-2255-4441

สยามสแควร์ โทร. 0-2218-9881-2 โทรสาร 0-2254-9495

ม.นเรศวร จ. พิษณุโลก โทร. 0-5526-0162-4 โทรสาร 0-5526-0165

ม.เทคโนโลยีสุรนารี จ. นครราชสีมา โทร. 0-4421-6131-4 โทรสาร 0-4421-6135

ม.บูรพา จ. ชลบุรี โทร. 0-3839-4855-9 โทรสาร 0-3839-3239

โรงเรียนนายร้อย จปร. จ. นครนายก โทร. 0-3739-3023 โทรสาร 0-3739-3023

ม.พะเยา จ. พะเยา โทร. 0-5446-6799-800 โทรสาร 0-5446-6798

จัตุรัสจามจุรี (CHAMCHURI SQUARE) ชั้น 4 โทร. 0-2160-5301-2 โทรสาร 0-2160-5304

หัวหมาก โทร. 0-2374-1378 โทรสาร 0-2374-1377

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน จ. นครราชสีมา โทร. 0-4492-2662-3 โทรสาร 0-4492-2664

Call Center (จัดส่งทั่วประเทศ) โทร. 0-2255-4433 <http://www.chulabook.com> และเครือข่ายฯ

ร้านค้าติดต่อ

แผนกขายส่ง สาขาหัวหมาก โทร. 0-2374-1375-6 โทรสาร 0-2374-1375

กองบรรณาธิการ : อรุณี เสมาริน

ออกแบบปกและรูปเล่ม : ไกรอัมพร พงษ์จักร

พิมพ์ที่ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (CUB6310-011) โทร. 0-2218-3562-3 โทรสาร 0-2218-3547

www.cupress.chula.ac.th

คำนำ

เนื้อหาองค์ความรู้ในศาสตร์ของ "คอมพิวเตอร์ช่วยในงานวิศวกรรมด้วยแมทแลบและแอนซิส" (Computer Aided Engineering with MATLAB and ANSYS) มีความสำคัญและเป็นสิ่งจำเป็นในปัจจุบัน เพราะสามารถช่วยปรับปรุงการออกแบบลดปริมาณวัสดุค่าใช้จ่ายและเวลาที่ต้องใช้ไปได้มาก ผลงานที่เกิดขึ้นจึงมีประสิทธิภาพสูงทำให้แข่งขันในภาคอุตสาหกรรมได้ ความสำคัญนี้เองจึงเป็นต้นเหตุให้เนื้อหาของศาสตร์นี้กลายเป็นวิชาบังคับของหลายภาควิชาฯ ในสถาบันการศึกษา

คอมพิวเตอร์ช่วยในงานวิศวกรรมตั้งอยู่บนองค์ความรู้ของคณิตศาสตร์ (mathematics) และวิธีเชิงตัวเลข (numerical methods) ด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ หนังสือเล่มนี้วางแนวทางการนำเสนอโดยอธิบายพื้นฐานของคณิตศาสตร์และวิธีการคำนวณที่สามารถทำความเข้าใจได้ง่าย ทำให้ผู้ศึกษาเห็นประโยชน์ของคณิตศาสตร์ได้อย่างชัดเจน นับตั้งแต่ความเข้าใจในสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจริงในงานทางวิศวกรรม จากนั้นจึงเป็นการนำเสนอขั้นตอนการคำนวณด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method) แล้วจึงขยายผลสู่วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) รวมไปถึงวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume method) พร้อมไปกับการใช้ซอฟต์แวร์แมทแลบ (MATLAB) และแอนซิส (ANSYS) ซึ่งนิยมใช้กันอย่างแพร่หลายทั้งในการเรียนการสอนและในภาคอุตสาหกรรม

หนังสือเล่มนี้จึงเหมาะสำหรับใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชานี้ในชั้นเรียน และยังเหมาะสำหรับผู้ใช้ออฟต์แวร์ CAE มานานแล้วต้องการเรียนรู้ทำความเข้าใจในเนื้อหาที่บรรจุอยู่ในซอฟต์แวร์นั้น ผู้เขียนขอขอบคุณนางสาวไกรอัมพร พงษ์จรัส ที่ช่วยจัดเรียงหน้าเนื้อหาอย่างเหมาะสม และขอขอบคุณสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่ให้การสนับสนุนจัดพิมพ์หนังสือเล่มนี้เพื่อเป็นประโยชน์ต่อนิสิต นักศึกษา และผู้ตระหนักในความสำคัญของศาสตร์ทางด้าน CAE นี้

ปราโมทย์ เคชะอำไพ

สารบัญ

คำนำ

ส่วนที่ I : ความรู้พื้นฐาน	1
บทที่ 1 คอมพิวเตอร์ช่วยในงานวิศวกรรม	3
1.1 บทนำ	3
1.2 CAE คืออะไร	4
1.3 ซอฟต์แวร์ CAE	5
1.4 พื้นฐานคณิตศาสตร์ที่จำเป็น	6
1.5 วิธีเชิงตัวเลขและทักษะโปรแกรมคอมพิวเตอร์	9
1.6 ประโยชน์ของ CAE	10
1.7 บทสรุป	11
บทที่ 2 ซอฟต์แวร์เมทแลบ	13
2.1 บทนำ	13
2.2 คำสั่งและฟังก์ชันพื้นฐาน	13
2.3 เวกเตอร์และเมทริกซ์	18
2.4 การพล็อตกราฟ	23
2.5 การประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์	27
2.6 การแก้สมการทางพีชคณิต	32
2.7 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์	34
2.8 คณิตศาสตร์สัญลักษณ์	37
2.9 บทสรุป	52
แบบฝึกหัด	53

ส่วนที่ II : วิธีผลต่างสี่บเนื่อง **63**

บทที่ 3 การวิเคราะห์ปัญหาเงื่อนไขขอบเขต **65**

- 3.1 บทนำ 65
- 3.2 สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอลลิปติก 66
- 3.3 วิธีผลต่างสี่บเนื่องสำหรับปัญหาในหนึ่งมิติ 67
- 3.4 การแก้ปัญหในหนึ่งมิติ 69
- 3.5 วิธีผลต่างสี่บเนื่องสำหรับปัญหาในสองมิติ 73
- 3.6 การแก้ปัญหในสองมิติ 75
- 3.7 บทสรุป 80
- แบบฝึกหัด 80

บทที่ 4 การวิเคราะห์ปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้น **89**

- 4.1 บทนำ 89
- 4.2 สมการเชิงอนุพันธ์แบบพาราโบลิก 90
- 4.3 วิธีผลต่างสี่บเนื่องเพื่อแก้สมการพาราโบลิก 91
- 4.4 ตัวอย่างปัญหาพาราโบลิก 93
- 4.5 สมการเชิงอนุพันธ์แบบไฮเพอร์โบลิก 99
- 4.6 วิธีผลต่างสี่บเนื่องเพื่อแก้สมการไฮเพอร์โบลิก 99
- 4.7 ตัวอย่างปัญหาไฮเพอร์โบลิก 102
- 4.8 บทสรุป 106
- แบบฝึกหัด 107

ส่วนที่ III : วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ **115**

บทที่ 5 การวิเคราะห์ปัญหาในหนึ่งมิติ **117**

- 5.1 บทนำ 117
- 5.2 สมการเชิงอนุพันธ์ 118
- 5.3 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ 119

5.4 ตัวอย่าง	123
5.5 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในท่อนโลหะ	126
5.6 บทสรุป	128
แบบฝึกหัด	129
บทที่ 6 การวิเคราะห์ปัญหาในสองมิติ	135
6.1 บทนำ	135
6.2 สมการเชิงอนุพันธ์	136
6.3 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	137
6.4 ตัวอย่าง	141
6.5 ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในแผ่นโลหะ	145
6.6 บทสรุป	149
แบบฝึกหัด	150
ส่วนที่ IV : กล้องเครื่องมือแมทแลบ	159
บทที่ 7 การแก้สมการแบบเอลลิปติก	161
7.1 บทนำ	161
7.2 สมการเชิงอนุพันธ์	162
7.3 ปัญหาในหนึ่งมิติ	162
7.4 ปัญหาในสองมิติ	172
7.5 บทสรุป	178
แบบฝึกหัด	178
บทที่ 8 การแก้สมการแบบพาราโบลิค	189
8.1 บทนำ	189
8.2 สมการเชิงอนุพันธ์	190
8.3 ปัญหาในหนึ่งมิติ	192
8.4 ปัญหาในสองมิติ	194

8.5 บทสรุป	199
แบบฝึกหัด	200
บทที่ 9 การแก้สมการแบบไฮเพอร์โบลิก	209
9.1 บทนำ	209
9.2 สมการเชิงอนุพันธ์	210
9.3 ปัญหาในหนึ่งมิติ	212
9.4 ปัญหาในสองมิติ	215
9.5 บทสรุป	220
แบบฝึกหัด	221
บทที่ 10 การประยุกต์ใช้งาน	231
10.1 บทนำ	231
10.2 ปัญหาการไหลแบบศักย์	232
10.3 ปัญหาไฟฟ้าสถิต	235
10.4 ปัญหาการนำและการพาความร้อน	237
10.5 ปัญหาการนำความร้อนและการแผ่รังสี	240
10.6 ปัญหาการโค้งของแผ่นบาง	242
10.7 ปัญหาความเค้นระนาบในแผ่นบาง	246
10.8 การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ	250
10.9 บทสรุป	254
แบบฝึกหัด	255
ส่วนที่ V : ซอฟต์แวร์แอนชีส	267
บทที่ 11 การใช้ซอฟต์แวร์แอนชีส	269
11.1 บทนำ	269
11.2 โต๊ะช่างแอนชีส	270
11.3 หน้าจอและแถบเครื่องมือ	271

11.4 ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหา	273
11.5 บทสรุป	275
แบบฝึกหัด	276
บทที่ 12 การวิเคราะห์ปัญหาความร้อน	287
12.1 บทนำ	287
12.2 สมการพื้นฐาน	288
12.2.1 สมการเชิงอนุพันธ์	288
12.2.2 สมการที่เกี่ยวข้อง	289
12.3 วิถีไฟไนต์เอลิเมนต์	290
12.3.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	290
12.3.2 ชนิดของเอลิเมนต์	291
12.4 ตัวอย่าง	294
12.4.1 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมกำหนดอุณหภูมิที่ขอบทั้งสี่	294
12.4.2 ปัญหาครีบบระบายความร้อนใน 3 มิติ	302
12.5 บทสรุป	306
แบบฝึกหัด	307
บทที่ 13 การวิเคราะห์ปัญหาของแข็ง	317
13.1 บทนำ	317
13.2 ปัญหาการโก่งของคาน	318
13.2.1 สมการพื้นฐาน	318
13.2.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	319
13.2.3 ปัญหาโครงสร้าง 2 คาน	321
13.3 ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง	332
13.3.1 สมการพื้นฐาน	332
13.3.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	334
13.3.3 ตัวอย่าง	336

13.4 ปัญหาทรงตันในสามมิติ	346
13.4.1 สมการพื้นฐาน	346
13.4.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	347
13.4.3 ตัวอย่าง	351
13.5 บทสรุป	361
แบบฝึกหัด	362
บทที่ 14 การวิเคราะห์ปัญหาการไหล	375
14.1 บทนำ	375
14.2 สมการพื้นฐาน	376
14.2.1 สมการเชิงอนุพันธ์	376
14.2.2 แนวคิดในการแก้ปัญหา	377
14.3 วิธีไฟไนต์วอลุ่ม	378
14.3.1 สมการไฟไนต์วอลุ่ม	379
14.3.2 วิธี SIMPLE	379
14.4 ตัวอย่าง	381
14.4.1 ปัญหาการไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยม	381
14.4.2 ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกในช่องแคบ	390
14.5 บทสรุป	394
แบบฝึกหัด	396
ภาคผนวก	409
บรรณานุกรม	417
ดรรชนี	419
ประวัติผู้เขียน	431

ส่วนที่ I

ความรู้พื้นฐาน (CAE Fundamentals)

คอมพิวเตอร์ช่วยในงานวิศวกรรม

1.1 บทนำ

คอมพิวเตอร์ช่วยในงานทางวิศวกรรม (Computer Aided Engineering, CAE) ได้เข้ามามีบทบาทในการเรียนการสอนเป็นอย่างมาก เพราะองค์ความรู้ที่เกิดขึ้นสามารถนำไปช่วยปรับปรุงการออกแบบงานต่าง ๆ ในทางปฏิบัติได้โดยตรง ทำให้หลายสถาบันการศึกษาจำเป็นต้องบรรจุวิชาเช่นนี้ลงในหลักสูตร เพื่อให้ผู้ศึกษาสามารถนำความรู้ทางด้านนี้ไปประยุกต์ใช้ได้อย่างถูกต้องเหมาะสมหลังจากสำเร็จการศึกษาไปแล้ว

CAE ช่วยทำให้การแก้ปัญหาทางวิศวกรรมเป็นไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ ผู้มีความเข้าใจใน CAE สามารถออกแบบชิ้นงานให้มีความแข็งแรง ใช้เนื้อวัสดุน้อย ลดค่าใช้จ่าย และที่สำคัญ คือ ใช้เวลาในการออกแบบสั้นลง จึงสามารถแข่งขันได้เพราะหลีกเลี่ยงการลองผิดลองถูกดังที่เคยปฏิบัติกันมาในอดีตออกไปอย่างสิ้นเชิง

องค์ความรู้ของ CAE ได้ถูกผลิตขึ้นกลายเป็นซอฟต์แวร์เชิงพาณิชย์เพื่อให้สามารถใช้งานได้โดยสะดวกบนเครื่องคอมพิวเตอร์ ซอฟต์แวร์เหล่านี้จำหน่ายกันในราคาสูง ภาคอุตสาหกรรมมักไม่มีปัญหาในการจัดซื้อ หากแต่ไม่สามารถหาผู้ที่เข้าใจในซอฟต์แวร์เหล่านี้อย่างแท้จริงเพื่อใช้งานได้อย่างถูกต้อง ทั้งนี้ เนื่องจากผลลัพธ์ที่ปรากฏเกิดขึ้นบนหน้าจอคอมพิวเตอร์จากการใช้ซอฟต์แวร์ CAE นี้แสดงเป็นโทนสีในระดับแตกต่างกัน ผู้ที่

ไม่เข้าใจในทฤษฎีเบื้องหลังการประดิษฐ์ซอฟต์แวร์เหล่านี้จึงไม่สามารถยืนยันได้ว่าผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นนั้นมีความถูกต้องหรือไม่อย่างไร

ในปัจจุบันซอฟต์แวร์ CAE เชิงพาณิชย์ได้นำมาใช้งานกันอย่างแพร่หลายเพื่อออกแบบงานทางวิศวกรรมเป็นจำนวนมาก นับตั้งแต่โครงสร้างปีกเครื่องบินโดยสารไปจนถึงโครงสร้างหลังคาอาคารแสดงสินค้าขนาดใหญ่ที่ต้องการความแข็งแรงแต่ให้มีน้ำหนักเบา การออกแบบรูปทรงรถยนต์ส่วนบุคคลที่ต้องมีความสวยงามแต่ต้องไม่ด้านลมมากในขณะขับไปจนถึงการถ่ายเทอากาศอย่างเหมาะสมภายในอาคารสนามบินหรือออฟฟิศที่ทำงานเพื่อการประหยัดพลังงาน งานต่าง ๆ เหล่านี้และงานอื่นอีกเป็นจำนวนมากที่พบเห็นอยู่รอบตัวต่างล้วนใช้ซอฟต์แวร์ CAE มาช่วยในการออกแบบในปัจจุบัน ผู้ที่มีความเข้าใจใน CAE จึงมีความได้เปรียบ ก่อให้เกิดโอกาสของการผลิตผลงานมากกว่าคนรุ่นก่อนซึ่งมักใช้เพียงประสบการณ์ที่สั่งสมมาเพื่อการออกแบบ

ในบทนี้ เราจะมาทำความเข้าใจว่า CAE คืออะไร เราควรมีความรู้อะไรบ้างเพื่อสามารถใช้ซอฟต์แวร์ CAE ได้อย่างถูกต้องและมีประสิทธิภาพ และเมื่อเราเข้าใจใน CAE แล้วจะก่อให้เกิดโอกาสอื่น ๆ อย่างไรตามขึ้นมาบ้าง

1.2 CAE คืออะไร

CAE หรือคอมพิวเตอร์ช่วยในงานทางวิศวกรรม เป็นกระบวนการแก้ปัญหาซึ่งตั้งอยู่บนองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ (mathematics) และการคำนวณ (numerical methods) การแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมเริ่มจากการใช้สมการทางคณิตศาสตร์ซึ่งบ่งบอกถึงความเป็นจริงที่เกิดขึ้นในปัญหานั้น ๆ เช่น มวล (mass) โมเมนตัม (momentum) และพลังงาน (energy) ต้องไม่มีการสูญหาย (conserved) หรือแรงต้องอยู่ในสภาวะสมดุล (equilibrium) ความเป็นจริงเหล่านี้สามารถเขียนขึ้นเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ที่เราเรียกกันว่า สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) เราพบสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบหลากหลายปรากฏขึ้นในบทแรก ๆ ของวิชาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมซึ่งขึ้นอยู่กับธรรมชาติของปัญหานั้น เราศึกษากระบวนการประดิษฐ์ผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) เพื่อแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่ซับซ้อน ด้วยเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) และบนรูปร่าง (geometry) สำหรับปัญหาง่าย ๆ ที่ไม่ซับซ้อนเช่นกัน เราพบว่าเมื่อเงื่อนไขขอบเขต

หรือรูปร่างของปัญหาเปลี่ยนแปลงไป ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นก็จะเปลี่ยนแปลงไปด้วย ความสำคัญของคณิตศาสตร์ที่สามารถให้ผลลัพธ์ได้เช่นนี้เองจึงสาเหตุสำคัญทำให้วิชาแคลคูลัส (calculus) และวิชาสมการเชิงอนุพันธ์ถูกจัดให้เป็นวิชาบังคับในการศึกษาขั้นพื้นฐาน

กระบวนการหาผลลัพธ์จากสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งบ่งบอกความเป็นจริงของปัญหานั้น ๆ มี 2 วิธีหลัก คือ :

(ก) วิธีเชิงวิเคราะห์ (analytical method) เป็นวิธีที่เราคุ้นเคยในช่วงของการเรียนระดับอุดมศึกษา กล่าวคือ เป็นขั้นตอนการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เพื่อหาผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) วิธีเชิงวิเคราะห์นี้มีขีดจำกัด สามารถหาผลลัพธ์ให้ได้สำหรับปัญหาที่มีรูปทรงง่าย ๆ เท่านั้น เช่น ปัญหาในหนึ่งมิติ หรือปัญหาในสองมิติรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่ง่าย ๆ เช่นกัน หากรูปร่างของปัญหานั้นมีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น เช่น รูปร่างสองมิติมีขอบโค้งหรือมีรูอยู่ภายใน กระบวนการหาผลลัพธ์ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ข้างต้นนี้ไม่สามารถนำมาสู่ผลลัพธ์ของปัญหานั้น ๆ ได้

(ข) วิธีเชิงตัวเลข (numerical method) เป็นวิธีที่ช่วยทำให้การหาผลลัพธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นเกิดความสะดวกมากยิ่งขึ้นไปอีกระดับหนึ่ง ปัญหาจำนวนมากที่ไม่สามารถหาผลลัพธ์ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์สามารถแก้ได้ด้วยวิธีเชิงตัวเลข วิธีเชิงตัวเลขเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ไปเป็นสมการทางพีชคณิตอันประกอบด้วยกระบวนการบวก ลบ คูณ และหารตัวเลขเข้าด้วยกันเท่านั้น แล้วประดิษฐ์โปรแกรมให้คอมพิวเตอร์ทำงานแทนการกดเครื่องคิดเลขด้วยมือ ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นเป็นผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution) ทำให้ผู้วิเคราะห์เข้าใจในปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นจากการออกแบบนั้นขึ้นไปได้อีกระดับหนึ่ง วิธีเชิงตัวเลขที่สำคัญ ๆ ประกอบด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method, FDM) ซึ่งจัดได้ว่าเป็นวิธีที่ง่ายแก่การทำความเข้าใจมากที่สุด วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method, FEM) ซึ่งนำมาสู่ซอฟต์แวร์ CAE เป็นจำนวนมากในปัจจุบัน และวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume method, FVM) ที่นิยมใช้กันมากเพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหล (flow problem)

1.3 ซอฟต์แวร์ CAE

ซอฟต์แวร์ CAE เชิงพาณิชย์ได้ผลออกมาจำหน่ายเป็นจำนวนมากในปัจจุบัน ซอฟต์แวร์ที่ได้รับความนิยมใช้ ได้แก่ ANSYS, Nastran, SolidWorks, COMSOL, Altair,

LS-DYNA, Abaqus และ COSMOS เป็นต้น ขั้นตอนการใช้ซอฟต์แวร์เหล่านี้ประกอบไปด้วย 3 ส่วนหลัก ดังนี้

(ก) การสร้างโมเดลหรือที่เรียกกันว่ากระบวนการขั้นต้น (pre-processing) เป็นการสร้างรูปร่างของปัญหาบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ กระบวนการนี้มักใช้เวลาเพิ่มขึ้นอยู่กับความซับซ้อนในรูปร่างของปัญหา จากนั้นจึงแบ่งโมเดลที่ได้สร้างขึ้นมานี้ออกเป็นเอลิเมนต์ (element) หรือเซลล์ (cell) ย่อย ๆ (discretization) พร้อมกับประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) และ/หรือเงื่อนไขเริ่มต้น (initial conditions) ลงบนโมเดลนั้น

(ข) การวิเคราะห์ (analysis) เป็นกระบวนการแก้ปัญหของโมเดลที่ได้สร้างขึ้น ด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่อง วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หรือวิธีไฟไนต์วอลุ่ม เวลาของการคำนวณที่ใช้ในกระบวนการนี้ขึ้นอยู่กับความซับซ้อนของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ครอบคลุมปัญหานั้น ๆ รวมทั้งจำนวนเอลิเมนต์หรือเซลล์ที่ใช้ในโมเดล ดังนั้น ในขณะที่รอผลลัพธ์ในระหว่างการคำนวณ ผู้วิเคราะห์จึงควรเข้าใจว่าซอฟต์แวร์นั้นกำลังทำอะไร เพื่อคำนวณสิ่งใด จึงสามารถประมาณระยะเวลา (computational time) ที่ควรใช้ไปในการคำนวณ

(ค) กระบวนการขั้นท้าย (post-processing) เป็นการนำผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นเป็นตัวเลขมาแสดงเป็นโทนสีเพื่อให้เกิดความเข้าใจได้โดยเร็ว

ในกระบวนการทั้งสามข้างต้น เราจึงเห็นได้ว่ากระบวนการวิเคราะห์เป็นหัวใจที่สำคัญของการใช้ซอฟต์แวร์ CAE ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจะมีความเป็นจริงถูกต้องมากเพียงไร ขึ้นกับความเข้าใจในวิธีการวิเคราะห์ซึ่งตั้งอยู่บนคณิตศาสตร์และการคำนวณอีกต่อหนึ่ง ดังนั้น ความเข้าใจในคณิตศาสตร์และวิธีการคำนวณจึงเป็นสิ่งที่หลีกเลี่ยงไม่ได้

1.4 พื้นฐานคณิตศาสตร์ที่จำเป็น

ดังที่ได้เกริ่นไว้ข้างต้น พื้นฐานคณิตศาสตร์เป็นสิ่งจำเป็นเพื่อการใช้ซอฟต์แวร์ CAE ได้อย่างถูกต้อง ทั้งนี้ เนื่องจากผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากซอฟต์แวร์ CAE เป็นผลลัพธ์โดยประมาณจากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งบ่งบอกความเป็นจริงของปัญหานั้น ๆ สมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้ล้วนอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) ซึ่งอาจมีเพียงสมการเดียวหรือหลายสมการที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์ (coupled) กันก็ได้ ขึ้นอยู่กับธรรมชาติของปัญหานั้น ๆ ลักษณะการกระจายของผลลัพธ์ที่คำนวณได้จึงขึ้นอยู่กับ

รูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ครอบคลุม (governed) ปัญหานั้น ดังนั้น ในการศึกษาวิชาทางด้านนี้เพื่อทำให้เกิดความเข้าใจได้โดยง่าย เราจึงมักเริ่มจากการพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเพียงสมการเดียวก่อน สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาส่วนใหญ่ที่เกิดขึ้นในงานทางวิศวกรรมสามารถจำแนกออกได้เป็น 3 รูปแบบ ดังนี้

(ก) สมการแบบเอลลิปติก (elliptic equation)

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(c\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(c\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)+au = f$$

โดย c , a และ f อาจเป็นค่าคงตัวหรือเป็นฟังก์ชันของ x และ y ก็ได้ สมการแบบเอลลิปติกเกิดขึ้นในปัญหาหลายชนิดในงานวิศวกรรม เช่น ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบอยู่ตัว ปัญหาการไหลแบบศักย์ ปัญหาการเสีรูปร่างและความเค้นในของแข็ง กล่าวคือ ผลลัพธ์ u ขึ้นอยู่กับระยะโคออร์ดิเนต x และ y บนโดเมนของปัญหานั้น

(ข) สมการแบบพาราโบติก (parabolic equation)

$$d\frac{\partial u}{\partial t}-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(c\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(c\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)+au = f$$

โดย d อาจเป็นค่าคงตัวหรือเป็นฟังก์ชันของ x และ y ก็ได้ สมการแบบพาราโบติกนี้เกิดขึ้นในปัญหาหลายชนิดในงานวิศวกรรมเช่นกัน นับตั้งแต่ปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบไม่อยู่ตัว ปัญหาการไหลแบบไม่อยู่ตัว กล่าวคือ ผลลัพธ์ u นอกเหนือจากขึ้นอยู่กับระยะโคออร์ดิเนต x และ y แล้ว ยังขึ้นอยู่กับเวลา t อีกด้วย

(ค) สมการแบบไฮเพอร์โบติก (hyperbolic equation)

$$d\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(c\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(c\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)+au = f$$

สมการแบบไฮเพอร์โบติกมักเกิดขึ้นในปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการสั่น เช่น ปัญหาการสั่นสะเทือนของมอเตอร์ไปจนถึงโครงสร้างสะพานและอาคาร สมการแบบไฮเพอร์โบติกนี้คล้ายคลึงกับสมการแบบพาราโบติกมาก แต่ผลลัพธ์ $u(x,y,t)$ ที่เกิดขึ้นนั้นมีลักษณะที่แตกต่างกันโดยสิ้นเชิง

ผลลัพธ์ที่เกิดจากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้ง 3 แบบข้างต้นนี้ยังขึ้นอยู่กับเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ซึ่งอาจประกอบด้วย

(ก) เงื่อนไขแบบดิริชเลต (Dirichlet condition) ซึ่งเป็นการกำหนดค่า u ที่ขอบเขตดังนี้

$$hu = r$$

โดย h และ r เป็นค่าคงตัวหรือเป็นฟังก์ชันของ x และ y ที่กำหนดมาให้

(ข) เงื่อนไขแบบนอยมันน์ (Neumann condition) ซึ่งเป็นการกำหนดค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของตัวแปร u ที่ขอบเขตนั้น ดังนี้

$$c \frac{\partial u}{\partial n} + qu = g$$

โดย c , q และ g เป็นค่าคงตัวหรือเป็นฟังก์ชันของ x และ y ที่กำหนดมาให้ ส่วน n เป็นเวกเตอร์หน่วย (unit vector) ที่ตั้งฉากกับขอบเขตนั้น

การแก้สมการแบบเอลลิปติกไม่ต้องใช้เงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) ในขณะที่การแก้สมการแบบพาราโบลาต้องการเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,y,0)$ ณ เวลาเริ่มต้น $t=0$ ส่วนการแก้สมการแบบไฮเพอร์โบลาต้องการเงื่อนไขเริ่มต้นทั้ง $u(x,y,0)$ และ $\partial u / \partial t(x,y,0)$ ณ เวลาเริ่มต้น $t=0$

อนึ่ง สมการแบบเอลลิปติกในสองมิติเมื่อลดรูปลงสู่หนึ่งมิติ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจะกลายเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) ดังนี้

$$-\frac{d}{dx} \left(c \frac{du}{dx} \right) + au = f$$

โดย $u = u(x)$ เป็นผลลัพธ์ซึ่งแปรไปตามโคออร์ดิเนต x เท่านั้น สมการเชิงอนุพันธ์สามัญในรูปแบบข้างต้นนี้มักใช้ในการเรียนรู้ CAE เบื้องต้น เพราะเป็นสมการที่ง่ายต่อการประดิษฐ์สมการที่ซับซ้อนด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่อง วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และวิธีไฟไนต์วอลุ่มที่สอดคล้องกัน อีกทั้งยังเป็นสมการที่พบเห็นสมัยเรียนวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานและมีเฉลยแม่นยำตรงที่สามารถนำมาใช้เปรียบเทียบกับเฉลยโดยประมาณที่เกิดขึ้นจาก CAE ได้อีกด้วย จึงทำให้ผู้ใช้เกิดความมั่นใจในการใช้ซอฟต์แวร์ CAE ก่อนนำไปใช้แก้ปัญหาจริง

1.5 วิธีเชิงตัวเลขและทักษะโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในกระบวนการเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ไปสู่สมการพีชคณิตด้วยวิธีผลต่างสลับเนื่อง วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หรือวิธีไฟไนต์วอลุ่ม องค์ความรู้ในวิธีเชิงตัวเลข (numerical methods) หลายชนิดต้องถูกนำมาประยุกต์ใช้ ยกตัวอย่างเช่น วิธีผลต่างสลับเนื่องเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ไปสู่ระบบสมการทางพีชคณิต (system of algebraic equations) ซึ่งอาจประกอบไปด้วยสมการย่อยเป็นจำนวนมาก องค์ความรู้ในวิธีเชิงตัวเลขเพื่อแก้ระบบสมการทางพีชคณิต เช่น วิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss elimination method) หรือวิธีการแยกแบบแอลยู (LU decomposition method) จึงต้องถูกนำมาใช้แก่ ยิ่งไปกว่านั้น หากสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้นอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear differential equation) ระบบสมการเชิงพีชคณิตที่เกิดขึ้นจะอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นเช่นกัน องค์ความรู้อื่นในวิธีเชิงตัวเลข เช่น วิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson iteration method) จึงจำเป็นต้องถูกนำมาประยุกต์เพื่อรวมแก้ระบบสมการทางพีชคณิตแบบไม่เชิงเส้นนี้ด้วย

องค์ความรู้บางชนิดในวิธีเชิงตัวเลข (numerical methods) เช่น ความเข้าใจในฟังก์ชันการประมาณภายใน (interpolation functions) จำเป็นต้องศึกษาก่อนการใช้ซอฟต์แวร์ CAE ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ นอกเหนือไปจากนั้น องค์ความรู้อื่น ๆ ในวิธีเชิงตัวเลขอาจต้องนำมาประยุกต์ใช้ในระหว่างการคำนวณ ยกตัวอย่างเช่น การอินทิเกรตเชิงตัวเลข (numerical integration) ต้องถูกนำมาประยุกต์ใช้เพื่อคำนวณไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ (finite element matrices) สำหรับเอลิเมนต์บางชนิด องค์ความรู้ในวิธีเชิงตัวเลขจึงเป็นฐานที่สำคัญเพื่อทำให้เกิดความมั่นใจในขณะใช้ซอฟต์แวร์ CAE

ทักษะการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์มีส่วนช่วยทำให้การใช้ซอฟต์แวร์ CAE เป็นไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ ซอฟต์แวร์ CAE เหล่านี้ถูกประดิษฐ์ขึ้นด้วยภาษาที่นิยมใช้กันในทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม เช่น ภาษาฟอร์แทรน (Fortran) ภาษาซี (C) รวมไปถึงภาษาแมทแล็บ (MATLAB) ภาษาแมทมาทิกา (Mathematica) และภาษาไพธอน (Python) ที่นิยมใช้เรียนรู้ CAE ในภาคการศึกษา เพราะภาษาเหล่านี้ง่ายต่อการเรียนรู้ และบางภาษามีฟังก์ชันฝังตัวอยู่ภายใน (built-in functions) ที่ช่วยทำให้การประดิษฐ์ซอฟต์แวร์เป็นไปได้อย่างสะดวกมากยิ่งขึ้น

1.6 ประโยชน์ของ CAE

ซอฟต์แวร์ CAE ได้ถูกนำไปใช้วิเคราะห์งานหลากหลายชนิดเป็นจำนวนมากในปัจจุบัน จนกลายเป็นเครื่องมือที่ได้รับการยอมรับกันในระดับสากล งานที่ซอฟต์แวร์ CAE สามารถวิเคราะห์ได้ประกอบไปด้วย

- (ก) การวิเคราะห์ความแข็งแรงของโครงสร้างรถยนต์ เครื่องบิน รถไฟ เรือ อาคารสูง สะพาน ลงไปถึงชิ้นงานขนาดเล็ก เช่น ชิ้นส่วนยานยนต์ มอเตอร์ แก๊ส ขวดน้ำ และภาชนะต่าง ๆ
- (ข) การวิเคราะห์การสั่นไหวของเสาไฟฟ้าแรงสูงและป้ายทางด่วนจากแรงลม การยุบตัวของโครงสร้างรถยนต์ขณะเกิดการชน ความเค้นจากอุณหภูมิสูงของกังหันใบพัดเทอร์ไบน์
- (ค) การวิเคราะห์การไหลของอากาศผ่านบ้านและอาคารในเมืองขนาดใหญ่ การหมุนวนของอากาศภายในอาคารเพื่อการประหยัดพลังงาน การทำนายสภาวะอากาศ การเคลื่อนตัวของอากาศเย็นผ่านทวีป ทิศทางการไหลท่วมของน้ำเมื่อเกิดอุทกภัย
- (ง) การวิเคราะห์คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าสำหรับเสาส่งสัญญาณทางอากาศ ทรานซิสเตอร์ มอเตอร์ สายไฟฟ้าแรงสูง
- (จ) การวิเคราะห์การไหลในเส้นเลือดตามร่างกายและหัวใจ ไปจนถึงอุปกรณ์ทางการแพทย์ กระดูกข้อต่อเทียม เท้าเทียม รากฟันเทียม
- (ฉ) และงานอื่น ๆ ที่ไม่สามารถทดลองได้เพราะอาจเป็นอันตรายต่อมนุษย์หรือมีค่าใช้จ่ายสูง เช่น อากาศการระเบิดของขีปนาวุธ การไหลของแก๊สที่เป็นพิษต่อมนุษย์ในโรงงานอุตสาหกรรม

ประโยชน์ต่าง ๆ ดังตัวอย่างข้างต้นนี้เองทำให้สถาบันการศึกษาจำนวนมากจำเป็นต้องบรรจุวิชาคอมพิวเตอร์ช่วยในงานทางวิศวกรรม (Computer Aided Engineering, CAE) ให้เป็นวิชาที่นิสิตนักศึกษาในหลายสาขาต้องเรียนรู้กัน ก่อให้เกิดความเข้าใจในทฤษฎีที่ฝังตัวอยู่ในซอฟต์แวร์ เพื่อให้สามารถใช้ซอฟต์แวร์ได้อย่างถูกต้องหลังสำเร็จการศึกษาแล้วออกไปทำงานจริง

1.7 บทสรุป

บทนี้อธิบายความจำเป็นของคอมพิวเตอร์ช่วยในงานวิศวกรรม (CAE) ในปัจจุบัน องค์ความรู้ของ CAE ก่อให้เกิดซอฟต์แวร์สำเร็จรูปเชิงพาณิชย์ผลิออกมาจำหน่ายเป็นจำนวนมาก ซอฟต์แวร์เหล่านี้ใช้เวลาประดิษฐ์ตรวจสอบความถูกต้องมาอย่างยาวนานและใช้ได้โดยสะดวกบนเครื่องคอมพิวเตอร์ จึงทำให้ล้วนมีราคาสูง อย่างไรก็ตาม ภาคอุตสาหกรรมมักไม่มีปัญหาในการจัดซื้อ ปัญหาที่ภาคอุตสาหกรรมประสบ คือ การขาดผู้รู้จริงมาใช้ซอฟต์แวร์ได้อย่างถูกต้อง ทั้งนี้ เนื่องจากซอฟต์แวร์เหล่านี้ตั้งอยู่บนองค์ความรู้ของคณิตศาสตร์และการคำนวณ ผลลัพธ์จากซอฟต์แวร์ CAE ปรากฏขึ้นบนหน้าจอคอมพิวเตอร์เป็นโทนสีในระดับแตกต่างกัน ผู้ไม่เข้าใจในองค์ความรู้ที่ฝังตัวอยู่ในซอฟต์แวร์ จึงไม่สามารถตอบได้ว่าโทนสีเหล่านี้คำนวณมาได้อย่างไร และมีความถูกต้องมากน้อยเพียงใด

โทนสีที่ปรากฏขึ้นบนหน้าจอคอมพิวเตอร์นี้เกิดจากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งอธิบายความเป็นจริงของปัญหาที่ทำการวิเคราะห์อยู่นั้น สมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้พร้อมทั้งรูปร่างที่ซับซ้อนของปัญหาไม่สามารถแก้เพื่อหาผลเฉลยแม่นยำตรงด้วยวิธีพื้นฐานแบบที่เคยเรียนกันมาในชั้นเรียนได้ จึงต้องใช้วิธีเชิงตัวเลขผสมผสานกับการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์แล้วให้เครื่องคอมพิวเตอร์แก้เพื่อหาผลลัพธ์ให้ ผู้ใช้จึงต้องเข้าใจในวิธีเชิงตัวเลขและควรมีพื้นฐานในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วย จึงสามารถตอบได้ว่าผลลัพธ์ที่ปรากฏขึ้นบนหน้าจอคอมพิวเตอร์นั้นมีความถูกต้องหรือไม่อย่างไร และเพื่อคาดคะเนระยะเวลาของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ควรใช้ไปในการแก้ปัญหานั้น

ในบทต่อ ๆ ไปของหนังสือเล่มนี้จึงประกอบด้วยการวางพื้นฐานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ควรศึกษา การทำความเข้าใจในสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกิดขึ้นในงานทางวิศวกรรม การประยุกต์ใช้วิธีเชิงตัวเลขเพื่อแก้ปัญหามือและด้วยการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้นเอง จากนั้นจึงเป็นการใช้ซอฟต์แวร์ CAE อย่างง่ายเพื่อให้เกิดความมั่นใจในผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น ก่อนฝึกฝนการใช้ซอฟต์แวร์ CAE เชิงพาณิชย์ที่ใช้กันภาคอุตสาหกรรมเพื่อวิเคราะห์ปัญหาจริงทางปฏิบัติ

บทที่ 2

ซอฟต์แวร์แมทแลบ

2.1 บทนำ

ซอฟต์แวร์แมทแลบ (MATLAB) เป็นซอฟต์แวร์ที่ง่ายต่อการเรียนรู้และมีฟังก์ชันที่ฝังตัว (built-in functions) อยู่ภายใน ก่อให้เกิดความสะดวกในการทำความเข้าใจ CAE โปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาแมทแลบสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยง่ายและตรวจสอบ (debug) ถึงความถูกต้องได้อย่างรวดเร็ว นอกจากนี้ แมทแลบยังมีศักยภาพด้านกราฟิก (graphic) เพื่อแสดงผลลัพธ์ได้โดยสะดวก

ในบทนี้ เราจะมาศึกษาพื้นฐานความรู้ในแมทแลบที่จำเป็นเพื่อช่วยวิเคราะห์ปัญหาทาง CAE โดยเริ่มจากคำสั่งและฟังก์ชันพื้นฐาน เวกเตอร์และเมทริกซ์ การพล็อตกราฟ การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ การแก้สมการทางพีชคณิต การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ และการใช้ศักยภาพของคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ที่ฝังตัวอยู่ในแมทแลบ ความรู้เหล่านี้เป็นสิ่งจำเป็นและเป็นบันไดขั้นแรกในศึกษาวิธีวิเคราะห์ปัญหาด้วย CAE สำหรับบทต่อ ๆ ไป

2.2 คำสั่งและฟังก์ชันพื้นฐาน

เราใช้แมทแลบเสมือนเครื่องคิดเลขเพื่อทำ การบวก (+) ลบ (-) คูณ (*)หาร (/) และยกกำลัง (^) ดังตัวอย่างเช่น